МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Оренбургский государственный университет»
Бузулукский колледж промышленности и транспорта

Предметно-цикловая комиссия общеобразовательных и общепрофессиональных дисциплин

М.И.Матвеева

МАТЕМАТИКА

методические указания для обучающихся по выполнению практических работ

Бузулук 2016

Методические указания предназначены для обучающихся по специальности 11.02.02 «Техническое обслуживание и ремонт радиоэлектронной техники (по отраслям)

Методические указания являются приложением к рабочей программе по дисциплине Математика.

Методические указания рассмотрены и утверждены на заседании ПЦК

общеобразовательных и общепрофессиональных дисциплин
наименование ПЦК

протокол № 1 от "31" 08 2016 г.

Председатель ПЦК

	[подпись]	Петрова С. Д.
наименование ПЦК	подпись	расшифровка подписи

Исполнители:

преподаватель	[подпись]	Матвеева М. И.
должность	подпись	расшифровка подписи
должность	подпись	расшифровка подписи

Содержание

Введение

Сборник практических работ служит для организации практических занятий по математике в объеме 20 часов. Данное пособие предназначено для студентов 2 курса и разработано в соответствии с рабочей программой по математике. Практические занятия служат связующим звеном между теорией и практикой. Они необходимы для закрепления теоретических знаний, полученных на уроках теоретического обучения, а так же для получения практических знаний. Практические задания выполняются студентом самостоятельно, с применением знаний и умений, полученных на уроках, а так же с использованием необходимых пояснений, полученных от преподавателя при выполнении практического задания.

Целью практических занятий является формирование учебных практических умений по математике и содействие оптимальному освоению студентами учебного материала. Выполнение студентами практических работ направлено на обобщение, систематизацию, углубление, закрепление полученных знаний по конкретным темам, формирование умений применять полученные знания на практике, формирование профессионально значимых качеств таких, как самостоятельность, ответственность, точность.

В сборнике содержится 10 практических работ. Практическое занятие проводится в учебной аудитории. Оценки за выполнение практических работ выставляются по четырёхбалльной системе. Практические работы выполняются в специально заведённых для практических работ тетрадях.

Методические указания предназначены для оказания помощи студентам при выполнении практических работ по дисциплине «Математика»

В результате проведения практических занятий по дисциплине студент должен:

уметь:

- уметь выполнять операции над матрицами и решать системы линейных уравнений;
- уметь применять методы дифференциального и интегрального исчисления;
- уметь решать дифференциальные уравнения:
- уметь применять основные положения теории вероятностей и математической статистики в профессиональной деятельности;

знать:

- иметь представление о роли и месте математики в современном мире, общности её понятий и представлений;
- основы линейной алгебры и аналитической геометрии;
- основные понятия и методы дифференциального и интегрального исчисления;
- основные численные методы решения математических задач;
- решение прикладных задач в области профессиональной деятельности.

Оценивание выполнения практических заданий

4-балльная шкала	Показатели	Критерии
Отлично	1. Полнота выполнения практического задания; 2. Своевременность выполнения задания; 3. Последовательность и рациональность выполнения задания; 4. Самостоятельность решения;	Задание решено самостоятельно. При этом составлен правильный алгоритм решения задания, в логических рассуждениях, в выборе формул и решении нет ошибок, получен верный ответ, задание решено рациональным способом.
Хорошо		Задание решено с помощью преподавателя. При этом составлен правильный алгоритм решения задания, в логическом рассуждении и решении нет существенных ошибок; правильно сделан выбор формул для решения; есть объяснение решения, но задание решено нерациональным способом или допущено не более двух несущественных ошибок, получен верный ответ.
Удовлетворительно		Задание решено с подсказками преподавателя. При этом задание понято правильно, в логическом рассуждении нет существенных ошибок, но допущены существенные ошибки в выборе формул или в математических расчетах; задание решено не полностью или в общем виде.
Неудовлетвори-тельно		Задание не решено.

Практическая работа№1 «Приложение производной»

Цель работы: закрепление практических навыков нахождения производных функций.

Содержание работы.
1.Внимательно изучите теоретический материал.
2.Выполните предложенное задание

Теоретические основы темы

1.1. Производная.

Производной функции $f(x)$ в точке x_0 называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю: $\lim\limits_{\Delta x \to o} \dfrac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$.

Правила дифференцирования *(u, v, w*— функции аргумента *x,* по которому производится дифференцирование, с - постоянная).

1.*Производная алгебраической суммы* $(u+v-w)' = u' + v' - w'$

2.*Производная произведения* $(uv)' = u'v + uv'$;

3. $(cu)' = cu'$;

3.*Производная частного (дроби)* $(\frac{u}{v})' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2} (v \neq 0)$;

4. *Производная сложной функции (функции от функции).*
Если $y = f(u), u = \varphi(x)$, *то* $y' = f'(u)\varphi'(x)$

Таблица основных формул дифференцирования

№ п/п	**Функция**	**Производная**	**№ п/п**	**Функция**	**Производная**	**№ п/п**	**Функция**	**Производная**
1	C (постоянная)	0	**7**	e^x	e^x	**13**	ctg$x$	$-\dfrac{1}{\sin^2 x}$
2	x^n (n – постоянная)	nx^{n-1}	**8**	$\log_a x$ $(0 < a \neq 1)$	$\dfrac{1}{x \ln a}$	**14**	arcsin$x$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
3	x	1	**9**	ln$x$	$\dfrac{1}{x}$	**15**	arccos$x$	$-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
4	$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	**10**	sin x	cos$x$	**16**	arctg$x$	$\dfrac{1}{1+x^2}$
5	$\dfrac{1}{x} = x^{-1}$	$-\dfrac{1}{x^2}$	**11**	cos$x$	–sin x	**17**	arcctg$x$	$-\dfrac{1}{1+x^2}$
6	a^x, (a >0)	a^x ln$a$	**12**	tg$x$	$\dfrac{1}{\cos^2 x}$	**18**	lg$x$	$\dfrac{1}{x\ln 10}$

Пример:
№1. Вычислить производную:

$$y = x^3 - 3x^2 - \frac{1}{6}x^{-6} + 5;$$

Решение.

$$y' = \left(x^3 - 3x^2 - \frac{1}{6}x^{-6} + 5\right)' = \left(x^3\right)' - 3\left(x^2\right)' - \frac{1}{6}\left(x^{-6}\right)' + 5' =$$

$$= 3x^{3-1} - 3\cdot 2x^{2-1} - \frac{1}{6}\cdot(-6)x^{-6-1} + 0 = 3x^2 - 6x + x^{-7}.$$

№2. Найти производную функции

$$y = \frac{x^3+x-1}{x^2-2x}$$

Решение

$$y' = \left(\frac{x^3+x-1}{x^2-2x}\right)' = \frac{(x^3+x-1)'(x^2-2x)-(x^2-2x)'(x^3+x-1)}{(x^2-2x)^2}$$

$$= \frac{(3x^2+1)(x^2-2x)-(2x-2)(x^3+x-1)}{(x^4-4x^3+4x^2)}$$

$$= \frac{3x^4-6x^3+x^2-2x-2x^4-2x^2+2x+2x^3+2x-2}{x^4-4x^3+4x^2}$$

$$= \frac{x^4-4x^3-x^2+2x-2}{x^4-4x^3+4x^2}$$

1.2.Экстремумы функции

Определение: Точка x_0 называется точкой максимума **т.max** функции f(x) если для всех x из некоторой окрестности точки x_0 выполняется неравенство $f(x) \le f(x_0)$

Другими словами: **т.max** – точка, выше которой график не поднимается (в примере: x=4 – т.max)

Определение: Точка x_0 называется точкой минимума **т.min** функции f(x) если для всех x из некоторой окрестности точки x_0 выполняется неравенство $f(x) \ge f(x_0)$

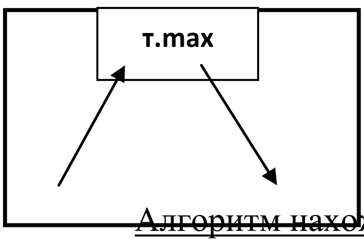
Другими словами: **т.min** – точка, ниже которой график не опускается

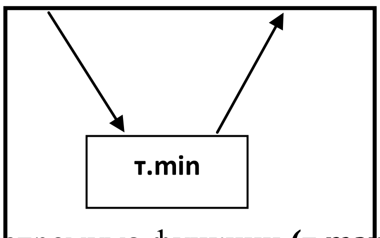
(в примере: x=-1 –т.min)

Определение: Точки минимума **т.min** и точки максимума **т.max**называются точками экстремума функции.

Теорема Ферма: Пусть функция f(x) определена в некоторой окрестности точки x_0 и дифференцируема в этой точке. Если x_0 – точка экстремума функции f(x), то $f'(x_0)=0$.

Другими словами: Необходимое условие существования точек экстремума: $f'(x_0)=0$





Алгоритм нахождения точек экстремума функции (т.max, т.min):

1) Найти интервалы возрастания и убывания функции:

1. Найти производную функции $f'(x)$;
2. Найти стационарные точки (точки, в которых производная f(x) равна нулю), т.е. решить уравнение $f'(x)=0$;
3. Отметить эти точки на числовой оси, указать промежутки;

4. Выявить знаки производной f′(x) на каждом из полученных промежутков (подставить любое число из проверяемого промежутка в производную и узнать знак);
5. Записать ответ.

2) По схеме определить точки максимума и точки минимума.

1.3.Исследование функции с помощью производной

<u>Алгоритм исследования функции для построения графика</u>

Дана функция y = f(x).

1) Найти область определения функции D(y);
2) Исследовать функцию на четность;
3) Определить, является ли функция периодичной;
4) Найти точки пересечения графика с осями координат:
   - С осью *Ox* – ***нули функции***;
   - С осью *Oy, y(0);*
5) Исследовать функцию при помощи первой производной, т.е. найти:
   - Промежутки возрастания и убывания функции;
   - Точки экстремумов и экстремумы;
6) Исследовать функцию при помощи второй производной, т.е. найти:
   - Точки перегиба и значения функции в этих точках;
   - Определить вид выпуклости графика;
7) Сосчитать дополнительные точки (в том случае, если невозможно найти нули функции);
8) Построить график.

1.4 Наибольшее и наименьшее значение функции

<u>Алгоритм нахождения наибольшего и наименьшего значения функции на отрезке [а;в]</u>

Найти значение функции на концах отрезка, т.е. f(a), f(в);

1) Найти производную функции f′(x);
2) Найти стационарные точки (f′(x) =0)
3) Проверить входят ли стационарные точки в отрезок [а;в];
4) Найти значение функции в стационарных точках;
5) Из найденных значений выбрать наибольшее и наименьшее.

<u>2. Примеры и упражнения</u>

Пример 1: Найти точки экстремума функции: $f(x) = x^3+6x^2+4$

Решение:

1) $\underline{f'(x)} = (x^3+6x^2+4) = (x^3)'+(6x^2)'+(4)'= 3x^2+6\cdot 2x+0=\underline{3x^2+12x}$
2) $f'(x)=0 \quad 3x^2+12x=0$

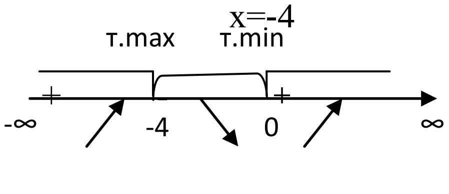
$x(3x+12)=0$

$x=0$ или $3x+12=0$

$3x=-12$

$x=\frac{-12}{3}$

$x=-4$

3) f′(x) 

f(x)

4) На интервале (-∞;-4) возьмём число -5, подставим в производную f′(x):

$f'(-1)=3\cdot(-5)^2+12\cdot(-5)=75-60=15>0$, знак «+», значит (↑)

На интервале (-4;0) возьмём число -1, подставим в производную f′(x):

$f'(-1)=3\cdot(-1)^2+12\cdot(-1)=3-12=-9<0$, знак «-», значит (↓)

На интервале (0;∞) возьмём число 1, подставим в производную f′(x):

$f'(1)=3\cdot1^2+12\cdot1=3+12=15>0$, знак «+», значит (↑)

5) На схеме определяем, что x=-4 т.max, x=0 – т.min

Ответ: x=-4 т.max, x=0 – т.min

Пример 2: Исследовать функцию и построить график$f(x) = 6x^2-2x^3$

Решение: D(x) = R.

1) $f(-x) = 6(-x)^2 - 2(-x)^3 = 6x^2+2x^3$ – ни четная, ни нечетная;
2) $f'(x) = (6x^2)'-(2x^3)'=6\cdot2x-2\cdot3x^2=12x-6x^2$
3) $f'(x)=0 \quad 12x-6x^2=0$

$x(12-6x)=0$

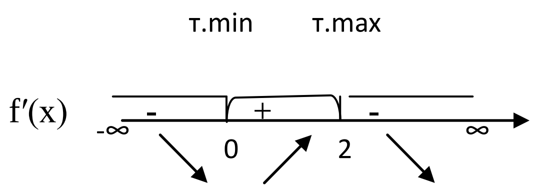
$x=0$ или $12-6x=0$

$-6x=-12$

$x=\frac{-12}{-6}$

$x=2$

4)



(-∞;0) «-1» $f'(-1)=12\cdot(-1)-6\cdot(-1)^2=-12-6=-18<0$, знак «-», значит (↓)

(0;2) «1» $f'(1)=12\cdot1-6\cdot1^2=12-6=6>0$, знак «+», значит (↑)

(2;∞) «3» $f'(3)=12\cdot3-6\cdot3^2=36-54=-18<0$, знак «-», значит (↓)

5) Определим по схеме, что x=0 – т.min, x=2 – т.max

6) $f(0) = 6\cdot0^2-2\cdot0^3=0-0=0$

$f(2) = 6\cdot2^2-2\cdot2^3=24-16=8$

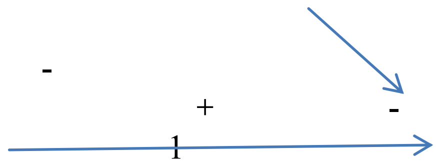
Заполним таблицу:

x	(-∞;0)	0	(0;2)	2	(2;∞)
f′(x)	-	0	+	0	-
f(x)	↘	0	↗	8	↘

6) $f''(x)= 12- 12x$;
7) $f''(x)= 0$, $12- 12x= 0$,

$12x = 12,$

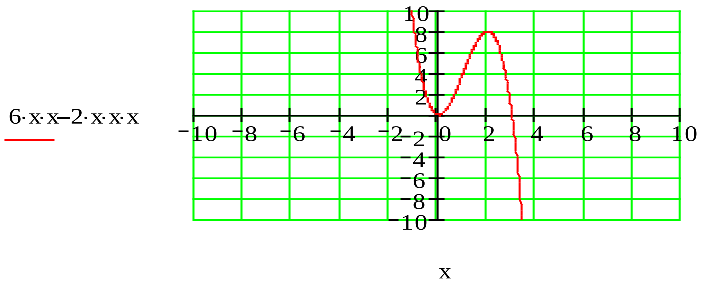
$x=1$



f(1)= 4, (1; 4) – точка перегиба

(-∞;1) выпукла вверх, (1;∞) выпукла вниз

9) Строим график функции $f(x) = 6x^2-2x^3$



Пример 3: Найти наибольшее и наименьшее значение функции $f(x)=2x^3-3x^2+2$ на отрезке [-2;3]

Решение:

1) **f(-2)**$=2\cdot(-2)^3-3\cdot(-2)^2+2=-16-12+2=$**-26**

f(3)$=2\cdot3^3-3\cdot3^2+2=54-27+2=$**29**

2) $f'(x) =(2x^3-3x^2+2)'= (2x^3)'-(3x^2)'+(2)'=2\cdot3x^2-3\cdot2x+0=6x^2-6x$

3) $f'(x) =0$ $6x^2-6x =0$; $x(6x -6)=0$; $x=0$ или $6x-6=0$; $6x=6$, $x=\dfrac{6}{6}$, $x=1$

4). Получили стационарные точки $x_1=0$, $x_2=1$,

по заданию имеем отрезок [-2;3], x_1 и x_2 <u>входят</u> в заданный отрезок, значит обе стационарные точки нам подходят.

5) **f(0)**$=2\cdot0^3-3\cdot0^2+2=0-0+2=$**2** **;f(1)**$=2\cdot1^3-3\cdot1^2+2=2-3+2=$**1**

6) Имеем:

f(-2)= <u>**-26**</u> **f(3)**=<u>**29**</u> **f(0)**=<u>**2**</u> **f(1)**=<u>**1**</u>

Выбираем самое большое и самое маленькое значение:

Наибольшее значение: f(3)= 29 **,** наименьшее значение:f(-2)= -26

Ответ: наибольшее значение: f(3)= 29 **,** наименьшее значение:f(-2)= -26

<u>**Задание для самостоятельного решения:**</u>

<u>**Задание 1:**</u> Найти производные функций

Вариант 1: а) $4tgx$; б) $\log_4 x+\sqrt{x}$; в) $x^2\cdot\ln x$; г) $\dfrac{\sin x}{x^2}$.

Вариант 2: а) $12ctgx$; б) $\log_3 x+x^3$; в) $\dfrac{\ln x}{x}$; г) $x^3\cdot\cos x$.

Вариант 3: а) $\sin(4x)$; б) $\sqrt{x}-\ln x$; в) $\dfrac{x^2}{e^x}$; г). $\sin x\cdot tgx$.

Вариант 4: а) $\cos(2x+1)$; б) $4x^3+\dfrac{1}{x}$; в) $e^x\cdot x^2$; г) $\dfrac{\sin x}{x}$.

Вариант 5: а) 4^x+4x^3; б) $2e^{3x}+2x$; в) $\ln x\cdot\cos(x)$; г) $\dfrac{\cos 2x}{e^x}$.

Вариант 6: а) $3x^2-2^x$; б) $e^{2x}-2e^x$; в) $\dfrac{\cos(2x)}{x^3}$; г) $x^2\cdot\log_2 x$.

Вариант 7: а) $3e^x-3^x$; б) $e^x+0{,}5^x-2x$; в) $5^x\cdot\sin 3x$; г) $\dfrac{\ln(3x)}{\cos x}$.

Вариант 8: а) 3^x+4e^x; б) $e^{x^2-x}-0{,}2^{-x}$; в) $\dfrac{\cos(5x)}{x^2}$; г) $2x\cdot\ln(x)$.

Вариант 9: а) $\left(x^2+3x-4\right)-\sin x$; б) $\dfrac{x}{\cos\dfrac{x}{3}}$; в) $ctg2x+3x$; г) $x^2\cos\left(\dfrac{x}{2}\right)$.

Вариант 10: а) $\left(2x^2-x-3\right)+\cos\pi x$; б) $\dfrac{4x^2}{\sin\dfrac{x}{2}}$; в) $tg5x-3$; г) $x^2\cdot\sin(7x)$.

Вариант 11: а) $3\cos x-2x$; б) $\log_2 x+4\sqrt{x}$; в) $x^5\cdot\ln x$; г) $\dfrac{\cos 3x}{x^3}$.

Вариант 12: а) $2tgx-5x-4$; б) $\ln x+2x^4+\cos x$; в) $\dfrac{\ln 2x}{x^2}$; г) $x\ \ \cdot\sin 5x$.

Вариант 13: а) $\sin(-x+1)$; б) $2\sqrt{x}+2\sin x$; в) $\dfrac{x^4}{e^x}$; г). $\ln x\cdot\cos x$.

Вариант 14: а) $\cos(-4x-3)$; б) $-2x^3+\dfrac{1}{x}$; в) $e^x\cdot x$; г) $\dfrac{\sin x}{x^2}$.

Вариант 15: а) 4^x+4x^3; б) $2e^x-e^{-2x}$; в) $\ln x\cdot\cos(2x)$; г) $\dfrac{tgx}{x+1}$.

Вариант 16: а) $\dfrac{1}{4}ctgx+3x$; б) $\log_4 x+2\sqrt{x}$; в) $x^2\cdot\ln x$; г) $\dfrac{\sin x}{(x+2)^2}$.

Вариант 17: а) $12\sin x-3x^3$; б) $\log_3 x+x^3$; в) $\dfrac{\ln x}{x}$; г) $x^3\cdot\cos x$.

Вариант 18: а) $\sin(4x)$; б) $\sqrt{x}-\ln x$; в) $\dfrac{x^2}{e^x}$; г). $\sin x\cdot tgx$.

Вариант 19: а) $\cos(\dfrac{1}{3}x+1)$; б) $4x^3+3\dfrac{1}{x^2}$; в) $\ln x\cdot x^2$; г) $\dfrac{\sin x}{x-1}$.

Вариант 20: а) 4^x-x^3-2; б) e^{3x}+2x; в) $\ln(x+1)\cdot\sin(x)$; г) $\dfrac{\cos 2x}{e^x}$.

Вариант 21: а) $6x^2-7^x$; б) $e^{4x}-2^x$; в) $\dfrac{\cos(x)}{x^3-1}$; г) $x^2\cdot\log_2 x$.

Вариант 22: а) $3e^x-3^x$; б) $0{,}5^x-3x+2$; в) $5^x\cdot\sin x$; г) $\dfrac{\ln(x)}{\cos x-2}$.

Вариант 23: а) 3^x+4e^x; б) $e^{x^2-x}-0{,}2^{-x}$; в) $\dfrac{\cos(5x)}{x^2}$; г) $2x\cdot\ln(x)$.

Вариант 24: а) $(3x-4)-\sin x$; б) $\dfrac{x}{\cos\ 3x}$; в) $ctg2x+3x$; г) $x^2\cos\left(\dfrac{x}{2}\right)$.

Вариант 25: а) $\left(2x^2+3\right)+\cos 2x$; б) $\dfrac{x^2}{\sin\dfrac{x}{2}}$; в) $tgx-3x$; г) $x^4\cdot\sin x$.

Вариант 26: а) $3ctgx-2x$; б) $\log_2 x-5\sqrt{x}$; в) $x^7\cdot\ln x$; г) $\dfrac{\cos(-3x)}{x^3}$.

Вариант 27: а) $2tgx-5x^3-4x$; б) $\ln x+x^4+3\sin x$; в) $\dfrac{\ln 2x}{x^2}$; г) $x^4\cdot\cos 2x$.

Вариант 28: а) $\sin(-x-1)$; б) $4\sqrt{x}-5\sin x+2$; в) $\dfrac{2x^4-1}{e^x}$; г). $tgx\cdot\cos x$.

Вариант 29: а) $\sin(4x+1)$; б) $-2x^4+\dfrac{1}{x^2-1}$; в) $e^x\cdot x^3$; г) $\dfrac{\sin x}{x^2}$.

Вариант 30: а) 2^x+3x^3+2x; б) $2-e^{-7x}-x^3$; в) $\ln 2x\cdot\cos(x)$; г) $\dfrac{ctgx}{2x+1}$.

<u>**Задание 2:**</u> Найти точки экстремума функции

Вариант 1:
а) $f(x)=-x^4+4x^2-3$ б) $f(x)=(6x-7)\cdot(2x+8)$
Вариант 2:
а) $f(x)=x^3-6x^2+9x+3$ б) $f(x)=(4x+5)\cdot(x-7)$
Вариант 3:
а) $f(x)=-x^3-3x^2+24x-4$ б) $f(x)=(2x+1)\cdot(3x+6)$
Вариант 4:
а) $f(x)=x^3-3x^2-9x+3$ б) $f(x)=(x-2)\cdot(9x+1)$
Вариант 5:
а) $f(x)=-x^3+6x^2+15x+1$ б) $f(x)=(8x+2)\cdot(4x-13)$
Вариант 6:
а) $f(x)=-x^3+x^2+8x$ б) $f(x)=(x+12)\cdot(12x-1)$
Вариант 7:
а) $f(x)=2x^3+9x^2-24x$ б) $f(x)=(8x-3)\cdot(2x-7)$
Вариант 8:
а) $f(x)=2x^3-3x^2-1$ б) $f(x)=(13x-6)\cdot(9x+1)$
Вариант 9:
а) $f(x)=2x^3-3x^2-36x$ б) $f(x)=(4x+3)\cdot(9x-5)$
Вариант 10:
а) $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{1}{2}x^2-2$ б) $f(x)=(2x-5)\cdot(3x-4)$
Вариант 11:
а) $f(x)=x^2-12x$ б) $f(x)=(6x+7)\cdot(4x-7)$
Вариант 12:
а) $f(x)=2x^3+3x^2-11$ б) $f(x)=(2x-8)\cdot(9x+1)$
Вариант 13:
а) $f(x)=0{,}5x^2-x^3$ б) $f(x)=(5x+1)\cdot(x+3)$
Вариант14:
а) $f(x)=x^3-3x^2$ б) $f(x)=(4x-9)\cdot(6x+2)$
Вариант 15:
а) $f(x)=x^4-10x^2+9$ б) $f(x)=(5x-6)\cdot(2x+10)$
Вариант 16:
а) $f(x)=4x^3-20x^2+25x-6$ б) $f(x)=(12x+13)\cdot(7x-1)$
Вариант 17:
а) $f(x)=11x^3-23x^2+16x+3$ б) $f(x)=(2x-8)\cdot(x-5)$
Вариант 18:
а) $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{11}{2}x^2+24x+151$ б) $f(x)=(5x+6)\cdot(17x-1)$
Вариант1 9:

а) $f(x)=2x^3+3x^2-11$ б) $f(x)=(2x-8)\cdot(9x+1)$

Вариант 20:

а) $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{13}{2}x^2-14x+13$ б) $f(x)=(6x+6)\cdot(17x-71)$

Вариант 21:

а) $f(x)=2x^3+9x^2-24x$ б) $f(x)=(x+12)\cdot(12x-1)$

Вариант 22:

а) $f(x)=-x^3-3x^2+24x-4$ б) $f(x)=(8x-3)\cdot(2x-7)$

Вариант 23:

а) $f(x)=-x^3+x^2+8x$ б) $f(x)=(2x+1)\cdot(3x+6)$

Вариант 24:

а) $f(x)=-x^3+6x^2+15x+1$ б) $f(x)=(5x-6)\cdot(2x+10)$

Вариант 25:

а) $f(x)=x^4-10x^2+9$ б) $f(x)=(8x+2)\cdot(4x-13)$

Вариант 26:

а) $f(x)=\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2$ б) $f(x)=(4x-8)\cdot(2x+81)$

Вариант 27:

а) $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2$ б) $f(x)=(5x-2)\cdot(4x+6)$

Вариант 28:

а) $f(x)=-3x^3+6x-5x^2$ б) $f(x)=(x+3)\cdot(9x+1)$

Вариант 29:

а) $f(x)=2x^3+3x^2-11$ б) $f(x)=(13x-6)\cdot(9x+1)$

Вариант 30:

а) $f(x)=-x^4+4x^2-3$ б) $f(x)=(2x-8)\cdot(9x+1)$

Задание 3: Исследовать и построить график функции

Вариант 1: $f(x)=3x^3-9x$

Вариант 2: $f(x)=x^4-8x^2+9$

Вариант 3: $f(x)=-x^4+8x^2-10$

Вариант 4: $f(x)=-x^3+12x-15$

Вариант 5: $f(x)=x^3-3x-7$

Вариант 6: $f(x)=x^3-12x-7$

Вариант 7: $f(x)=\frac{1}{3}x^3+3x^2+8x$

Вариант 8: $f(x)=-\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x-5$

Вариант 9: $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 16x + \frac{2}{3}$

Вариант 10: $f(x)=x^3+6x^2-4$

Вариант 11: $f(x)=x^3+3x^2+20$

Вариант 12: $f(x)=-x^3+3x-4$

Вариант 13: $f(x)= 2+3x-x^3$

Вариант14: $f(x)= \frac{1}{4}x^3-3x$

Вариант 15: $f(x)= -\frac{1}{4}x^4+2x^2-4$

Вариант 16: $f(x)=\frac{1}{2}x^4-4x^2 +8$

Вариант 17: $f(x) = x^2 - 3x + 2$

Вариант 18: $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$

Вариант1 9: $f(x) = x^3 - 3x + 1$

Вариант 20: $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 1{,}5x^2$

Вариант 21: $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5$

Вариант 22: $f(x) = 2x^3 - 3x^2$

Вариант 23: $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{5}x^5$

Вариант 24: $f(x) = -x^3 + 3x + 2$

Вариант 25: $f(x) = x^3 - x^2$

Вариант 26: $f(x)=x^3-3x-7$

Вариант 27: $f(x)=x^4-8x^2+9$

Вариант 28: $f(x)= \frac{1}{3}x^3 + 3x^2 + 8x$

Вариант 29: $f(x)=-x^3+12x-15$

Вариант 30: $f(x)=x^3+3x^2+20$

<u>**Задание 4:**</u> Найти наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке

Вариант 1: $f(x) = x^4 - 2x^2 - 3$, $[0;2]$

Вариант 2: $f(x) = 2x^2 - 4x + 3$, $[0;4]$

Вариант 3: $f(x) = 3x^2 - x^3$, $[-1;3]$

Вариант 4: $f(x) = 3x^3 - 9x^2 + 2$, $[-1;1]$

Вариант 5: $f(x) = \frac{4}{3}x^3 - 4x$, $[0;2]$

Вариант 6: $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 2$, $[-2;2]$

Вариант 7: $f(x) = -x^4 + 2x^2 + 3$, $[0; 2]$

Вариант 8; $f(x)=2x^3+3x^2-12x-1$, $[-1;3]$

Вариант 9: $f(x)=4x^2-16x+17$, $[0;3]$

Вариант 10: $f(x)=5x^2-20x+3,\quad [0;3]$

Вариант 11: $f(x)=2x^3-15x^2+24x+3,\quad [0;3]$

Вариант 12: $f(x)=3x^2+18x+7,\quad [-5;-1]$

Вариант 13: $f(x)=5-8x-x^2,$ $[-6;-3]$

Вариант14: $f(x)=2x^3+3x^2+2,\quad [-2;1]$

Вариант 15: $f(x)=x^3-3x^2-9x-4,\quad [-4;4]$

Вариант 16: $f(x)=3x^2-12x+1,\quad [1;4]$

Вариант 17: $f(x)=x^3+6x^2-4,\quad [-4;1]$

Вариант 18: $f(x)=x^3-x^2,\quad [-1;1]$

Вариант1 9: $f(x)=x^3-3x^2+3x+2,\ [-2;2]$

Вариант 20: $f(x)=3x^4-6x^2+3,\quad [-2;2]$

Вариант 21: $f(x)=3x^2-x^3,\ [-1;3]$

Вариант 22: $f(x)=-x^3-3x^2-+9x-2,\quad [-2;2]$

Вариант 23: $f(x)=2x^3-9x^2-3,\quad [-1;4]$

Вариант 24: $f(x)=2x^2-x^4,\quad [0;2]$

Вариант 25: $f(x)=x^3-27x,\quad [-1;4]$

Вариант 26: $f(x)=3x^2-12x+1,\quad [1;4]$

Вариант 27: $f(x)=x^4-8x^2-9,\quad [-3;3]$

Вариант 28: $f(x)=3x^4-6x^2+3,\quad [-2;2]$

Вариант 29: $f(x)=2+3x^2-x^3,$ $[-2;2]$

Вариант 30: $f(x)=3x^3+9x^2+10,\quad [4;0]$

Практическая работа №2 «Приложение определённого интеграла»

Цель работы: закрепление практических навыков вычисления определённых интегралов.

Содержание работы.
1.Внимательно изучите теоретический материал.
2.Выполните предложенное задание

Теоретические основы темы

Определённым интегралом от непрерывной функции $f(x)$ на конечном отрезке $[a, b]$ (где $a \neq b$) называется приращение какой-нибудь её первообразной на этом отрезке. При этом употребляется запись

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Числа a и b называются соответственно нижним и верхним пределами интегрирования, а отрезок $[a, b]$ – отрезком интегрирования. Равенство называется формулой Ньютона-Лейбница. Разность $F(b) - F(a)$ кратко записывают так: $F(x)\Big|_a^b.$
Поэтому формула Ньютона-Лейбница имеет и иную запись:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b.$$

Свойства определенного интеграла
Теорема 1. *Определённый интеграл с одинаковыми пределами интегрирования равен нулю*, т.е.

$$\int_a^a f(x)\ dx = F(a) - F(a) = 0.$$

Теорема 2. *Постоянный множитель можно выносить за знак определённого интеграла*, т.е.

$$\int_a^b kf(x)\ dx = k\int_a^b f(x)\ dx.$$

Теорема 3. *Определённый интеграл от алгебраической суммы конечного числа функций равен алгебраической сумме определённых интегралов от этих функций*, т.е.

$$\int_a^b [f(x) + \varphi(x) - \psi(x)]dx = \int_a^b f(x)\ dx + \int_a^b \varphi(x)\ dx - \int_a^b \psi(x)\ dx.$$

Теорема 4. *Если отрезок интегрирования разбит на части, то определённый интеграл по всему отрезку равен сумме определённых интегралов по его частям*, т.е. если$c \in [a; b]$, то

$$\int_a^b f(x)\ dx = \int_a^c f(x)\ dx + \int_c^b f(x)\ dx.$$

Теорема 5. *При перестановке пределов интегрирования абсолютная величина определенного интеграла не меняется, а изменяется лишь его знак*, т.е.

$$\int_b^a f(x)\ dx = -\int_a^b f(x)\ dx.$$

Свойства определенного интеграла позволяют упрощать непосредственное вычисление интегралов.

ПРИМЕР 1. Вычислить

$$\int_1^2 e^{2x} dx.$$

РЕШЕНИЕ. По формуле $\int e^{kx} dx = \frac{1}{k} e^{kx} + C,$ получим

$$\int_1^2 e^{2x} dx = \frac{1}{2} e^{2x} \Big|_1^2 = \frac{1}{2}(e^4 - e^2) = \frac{1}{2} e^2 (e^2 - 1).$$

ПРИМЕР 2. Вычислить

$$\int_1^2 \left(\frac{4}{x} - 5x^4 + 2\sqrt{x} \right) dx.$$

РЕШЕНИЕ.

$$\int_1^2 \left(\frac{4}{x} - 5x^4 + 2\sqrt{x} \right) dx = 4\int_1^2 \frac{dx}{x} - 5\int_1^2 x^4 dx + 2\int_1^2 \sqrt{x}\ dx =$$

$$= 4\ln|x| \Big|_1^2 - 5\frac{x^5}{5} \Big|_1^2 + 2\frac{x^{3/2}}{3/2} \Big|_1^2 = 4(\ln 2 - \ln 1) - (2^5 - 1^5) +$$

$$+ \frac{4}{3}\left(2\sqrt{2} - 1\sqrt{1}\right) = 4\ln 2 + \frac{8}{3}\sqrt{2} - 32\frac{1}{3}.$$

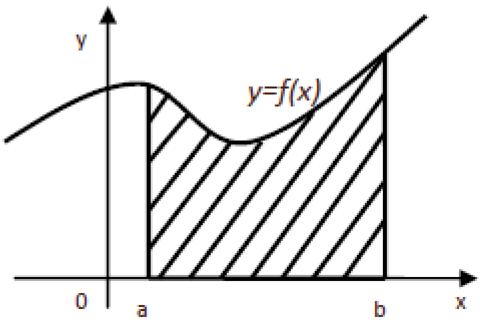
На практике очень часто приходится решать следующие задачи:

1) найти путь точки, движущейся прямолинейно, по заданному закону изменения скорости этой точки;

2) вычислить площадь фигур, которые имеют форму криволинейной трапеции;

3) вычислить объем тел, полученных вращением вокруг оси какой-либо криволинейной трапеции.

Криволинейная трапеция - это фигура, ограниченная графиком непрерывной и не меняющей своего знака на отрезке *[a; b]* функции, прямыми *x=a, x=b* и отрезком *[a; b]*.



Площадь криволинейной трапеции вычисляется по формуле Ньютона-Лейбница:

$$S_ф = \int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Объем тела вращения можно вычислить по формуле:

$$V = \pi\int_a^b f^2(x)dx$$

Пример 1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $y=-x^2+5x+6$ и осью OX.

Решение. Найдем точки пересечения параболы с осью OX:

$-x^2+5x+6=0$

Имеем корни квадратного уравнения: $x_1=-1$, $x_2=6$.

Построим график функции $y=-x^2+5x+6$.

Пределы интегрирования: -1 и 6.

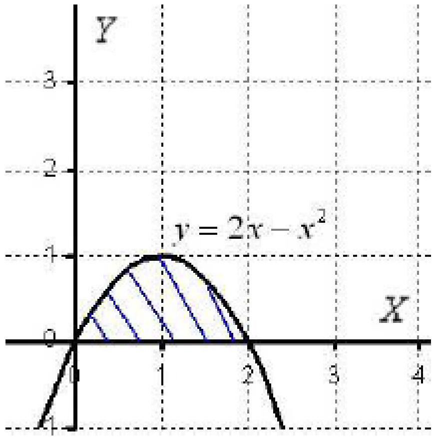
По формуле найдем площадь фигуры, ограниченной сверху параболой и снизу осью OX

$$\int_{-1}^{6}\left(-x^2+5x+6\right)dx = -\int_{-1}^{6}x^2dx + 5\int_{-1}^{6}x\,dx + 6\int_{-1}^{6}dx = \left(-\frac{x^3}{3}+5\frac{x^2}{2}+6x\right)\Bigg|_{-1}^{6} =$$

$$=\left(-\frac{6^3}{3}+5\cdot\frac{6^2}{2}+6\cdot6\right)-\left(-\frac{(-1)^3}{3}+5\cdot\frac{(-1)^2}{2}+6\cdot(-1)\right) = -72+90+36-\frac{1}{3}-\frac{5}{2}+6=$$

$$=60-\frac{5}{2}-\frac{1}{3}=60-\frac{17}{6}=60-2\frac{5}{6}=57\frac{1}{6}$$

Ответ: $S_ф = 57\frac{1}{6}$ (кв.ед.)



Пример 2. Вычислить объем тела, полученного вращением фигуры, ограниченной линиями $y = 2x - x^2$, $y = 0$ вокруг оси OX.

Решение. Построим фигуру, ограниченную линиями $y = 2x - x^2$, $y = 0$, здесь уравнение $y = 0$ задаёт ось OX. Плоская заштрихованная фигура вращается вокруг оси X. В результате вращения получается «яйцевидное» тело, которое симметрично относительно оси OX. В практических заданиях плоская фигура иногда может располагаться и ниже оси OX. Это ничего не меняет – функция в формуле возводится в квадрат: $f^2(x)$, таким образом, **объем тела вращения всегда неотрицателен**. Вычислим объем тела вращения, используя формулу

$$V = \pi\int_a^b f^2(x)dx = \pi\int_0^2 (2x - x^2)^2 dx = \pi\int_0^2 (4x^2 - 4x^3 + x^4)dx =$$

$$= \pi \cdot \left(\frac{4x^3}{3} - x^4 + \frac{x^5}{5}\right)\Big|_0^2 = \pi \cdot \left(\frac{32}{3} - 16 + \frac{32}{5} - 0\right) = \frac{16\pi}{15}$$

Ответ: $V = \frac{16\pi}{15}\, ед^3. \approx 3{,}35\, ед^3.$

Пример 3. Скорость прямолинейного движения точки задана уравнением *v=3t2-4t+7*. Найдите закон движения точки, если в начальный момент движения *S=1м.*

Решение. Воспользуемся формулой 1 приложения неопределенного интеграла

$\int v(t)dt = S(t) + c$, S – перемещение, v - скорость

$$\int (3t^2 - 4t + 7)dt = 3 \cdot \frac{t^3}{3} - 4 \cdot \frac{t^2}{2} + 7t + c = t^3 - 2t^2 + 7t + c$$

Г.к. при *t=0 S=1*, то $0^3 - 2 \cdot 0^2 + 7 \cdot 0 + c = 1$ *c=1*

Ответ: *S(t)=* $t^3 - 2t^2 + 7t + 1$ *(м)*

<u>Задание для самостоятельного решения:</u>

Вариант 1

1. Вычислите определенные интегралы:

а) $\int_1^3 \left(x^4 + 4^x\right)dx$; б) $\int_4^5 \frac{2dt}{t+1}$; в) $\int_0^{10} \left(5x + 3e^x - \sqrt[5]{x^2}\right)dx$; г) $\int_2^3 (2x-1)^3\,dx$.

2. Решите задачу. Скорость движения точки определяется по закону $v = (2t-1)^2$ м/с. Найдите путь, пройденный точкой за 3-ю секунду.
3. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 - 5x - 6, y = 0$. Сделайте чертеж.
4. Найдите объем тела, образованного вращением вокруг оси ОХ фигуры, ограниченной линиями $y = \sqrt{x}, y = 0, x = 9$. Сделайте чертеж.

Вариант 2

1. Вычислите определенные интегралы:

а) $\int_0^2 \left(x^5 + 5^x\right)dx$; б) $\int_3^5 \frac{3dt}{t-1}$; в) $\int_0^7 \left(e^{-2x} + 4x + \sqrt[3]{x}\right)dx$; г) $\int_2^3 (2x+1)^3\,dx$.

2. Решите задачу. Скорость движения точки определяется по закону $v = (3t+2)^2$ м/с. Найдите путь, пройденный точкой от начала движения до момента времени 4с.
3. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 8x - x^2 - 7, y = 0$. Сделайте чертеж.
4. Найдите объем тела, образованного вращением вокруг оси ОХ фигуры, ограниченной линиями $y = 2 + x, x = 1, x = 2, y = 0$. Сделайте чертеж.

Вариант 3

1. Вычислите определенные интегралы:

а) $\int_0^2 \left(x^9 + 9^x\right)dx$; б) $\int_4^6 \frac{2dt}{t-1}$; в) $\int_1^3 \left(\sqrt[4]{x} - 2e^x + 3\right)dx$; г) $\int_0^1 (3x-1)^4\,dx$.

2. Решите задачу. Скорость движения точки определяется по закону $v = (2-3t)^2$ м/с. Найдите путь, пройденный точкой за 4-ю секунду.
3. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 - 3x - 4, y = 0$. Сделайте чертеж.
4. Найдите объем тела, образованного вращением вокруг оси ОХ фигуры, ограниченной линиями $y = 2x, x = 1, x = 4, y = 0$. Сделайте чертеж.

Вариант 4

1. Вычислите определенные интегралы:

а) $\int_1^2 \left(x^6 + 6^x\right)dx$; б) $\int_2^6 \frac{5dt}{t+4}$; в) $\int_0^2 \left(2x + \sqrt[4]{x^3} - e^{-x}\right)dx$; г) $\int_0^1 (3x-1)^3\,dx$.

2. Решите задачу. Скорость движения точки определяется по закону $v = (3t-1)^2$ м/с. Найдите путь, пройденный точкой за 2-ю секунду.
3. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 5x - x^2 + 6, y = 0$. Сделайте чертеж.
4. Найдите объем тела, образованного вращением вокруг оси ОХ фигуры, ограниченной линиями $y = 2 - x, x = 0, y = 0$. Сделайте чертеж.

Вариант 5

1. Вычислите определенные интегралы:

а) $\int_1^2 \left(x^8 + 8^x\right)dx$; б) $\int_3^6 \frac{4dt}{t-1}$; в) $\int_1^4 \left(2+\sqrt{x^3}-x\right)dx$; г) $\int_2^3 (2x-1)^4 dx$.

2. Решите задачу. Скорость движения точки определяется по закону $v=(2t+1)^2\ м/с$. Найдите путь, пройденный точкой от начала движения до момента времени 3с.

3. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 - 6x + 8, y = 0$. Сделайте чертеж.

4. Найдите объем тела, образованного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной линиями $y = x, x = 5, y = 0$. Сделайте чертеж.

Вариант 6

1. Вычислите определенные интегралы:

а) $\int_0^1 \left(x^{10} + 10^x\right)dx$; б) $\int_2^8 \frac{dt}{t+10}$; в) $\int_0^1 \left(x + 2\sqrt[3]{x}\right)dx$; г) $\int_2^3 (2x+1)^4 dx$.

2. Решите задачу. Скорость движения точки определяется по закону $v=(3t-2)^2\ м/с$. Найдите путь, пройденный точкой от начала движения до момента времени 2с.

3. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 - 4x - 5, y = 0$. Сделайте чертеж.

4. Найдите объем тела, образованного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной линиями $y = x+1, x = 0, x = 2, y = 0$. Сделайте чертеж.

Вариант 7

1. Вычислите определенные интегралы:

а) $\int_1^4 \left(3x^2 + 2^x\right)dx$; б) $\int_4^8 \frac{2dt}{t-3}$; в) $\int_1^2 \left(2\sqrt{e} + \sqrt[5]{x}\right)dx$; г) $\int_0^1 (3x+2)^4 dx$.

2. Решите задачу. Скорость движения точки определяется по закону $v=(4t-3)^2 м/с$. Найдите путь, пройденный точкой за 4-ю секунду.

3. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 + 1, y = 0, x = 0, x = 2$. Сделайте чертеж.

4. Найдите объем тела, образованного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной линиями $y = 3x, x = 2, y = 0$. Сделайте чертеж.

Вариант 8

1. Вычислите определенные интегралы:

а) $\int_0^3 \left(\frac{x^3}{2} + 3^x\right)dx$; б) $\int_6^7 \frac{\sqrt{2}dx}{x-5}$; в) $\int_0^1 \left(e^{3x} + 2\pi - \sqrt[3]{x^2}\right)dx$; г) $\int_0^1 (3x-2)^5 dx$.

2. Решите задачу. Скорость движения точки определяется по закону $v = t(t-2)^2\ м/с$. Найдите путь, пройденный точкой от начала движения до момента времени 4с.

3. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \frac{3}{x}, x + y - 4 = 0$. Сделайте чертеж.

4. Найдите объем тела, образованного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной линией $y = x^2, x = 2, y = 0$. Сделайте чертеж.

Вариант 9

1. Вычислите определенные интегралы:

а) $\int_0^2 (4x^2 + x - 3)dx$; б) $\int_3^6 \frac{dx}{x+1}$; в) $\int_0^1 e^{4x} dx$; г) $\int_2^3 (2x-1)^3 dx$.

2. Скорость движения точки изменяется по закону $v = 3t^2 + 2t + 1$ (м/с). Найти путь S, пройденный точкой за 10с от начала движения.

3. Вычислите, предварительно сделав рисунок, площадь фигуры, ограниченной линиями: $y = -x^2 + 4$, $y = 0$, $x = -2$, $x = 2$. Сделайте чертеж.

4. Найдите объем тела, полученного при вращении вокруг оси абсцисс криволинейной трапеции, ограниченной линиями: $y = \sqrt{x}$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 4$. Сделайте чертеж.

Вариант 10

1. Вычислите определенные интегралы:

а) $\int_0^3 (2x^2 - x + 4)dx$; б) $\int_2^5 \frac{dx}{x+2}$; в) $\int_1^3 e^{4x} dx$; г) $\int_0^1 (3x+1)^4 dx$.

2. Скорость движения точки изменяется по закону $v = 9t^2 - 8t$ (м/с). Найти путь S, пройденный точкой за четвертую секунду.
3. Вычислите, предварительно сделав рисунок, площадь фигуры, ограниченной линиями: $y = -x^2 + 1$, $y = 0$, $x = -1$, $x = 1$. Сделайте чертеж.
4. Найдите объем тела, полученного при вращении вокруг оси абсцисс криволинейной трапеции, ограниченной линиями: $y = \sqrt{x}$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$. Сделайте чертеж.

Вариант 11

1. Вычислите определенные интегралы:

а) $\int_2^4 x^3 dx$; б) $\int_2^4 3^x dx$; в) $\int_1^8 \frac{3dx}{x+4}$; г) $\int_1^3 (e + \sqrt[3]{x} - 2x)dx$.

2. Решите задачу. Скорость движения точки определяется по закону $v = (4t+3)^2$ м/с. Найдите путь, пройденный точкой за 2-ю секунду.
3. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 9 - x^2, y = 0$. Сделайте чертеж.
4. Найдите объем тела, образованного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной линиями $y = 2x, x = 3, y = 0$. Сделайте чертеж.

Вариант 12

1. Вычислите определенные интегралы:

а) $\int_1^3 x^4 dx$; б) $\int_1^3 4^x dx$; в) $\int_4^5 \frac{2dt}{t+1}$; г) $\int_0^{10} \left(5x + 3e^x - \sqrt[5]{x^2}\right)dx$.

2. Решите задачу. Скорость движения точки определяется по закону $v = (2t-1)^2$ м/с. Найдите путь, пройденный точкой за 3-ю секунду.
3. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 - 5x - 6, y = 0$. Сделайте чертеж.

Вариант 13

1. Вычислите определенные интегралы:

а) $\int_0^2 x^5 dx$; б) $\int_0^2 5^x dx$; в) $\int_3^5 \frac{3dt}{t-1}$; г) $\int_0^7 \left(e^{-2x} + 4x + \sqrt[3]{x}\right)dx$.

2. Решите задачу. Скорость движения точки определяется по закону $v = (3t+2)^2$ м/c. Найдите путь, пройденный точкой от начала движения до момента времени 4с.
3. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 8x - x^2 - 7, y = 0$. Сделайте чертеж.
4. Найдите объем тела, образованного вращением вокруг оси ОХ фигуры, ограниченной линиями $y = 2 + x, x = 1, x = 2, y = 0$. Сделайте чертеж.

Вариант 14

1. Вычислите определенные интегралы:

а) $\int_0^2 x^9 dx$; б) $\int_0^2 9^x dx$; в) $\int_4^6 \frac{2dt}{t-1}$; г) $\int_1^3 \left(\sqrt[4]{x} - 2e^x + 3\right)dx$.

2. Решите задачу. Скорость движения точки определяется по закону $v = (2-3t)^2$ м/c. Найдите путь, пройденный точкой за 4-ю секунду.
3. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 - 3x - 4, y = 0$. Сделайте чертеж.
4. Найдите объем тела, образованного вращением вокруг оси ОХ фигуры, ограниченной линиями $y = 2x, x = 1, x = 4, y = 0$. Сделайте чертеж.

Вариант 15

1. Вычислите определенные интегралы:

а) $\int_1^2 x^6 dx$; б) $\int_1^2 6^x dx$; в) $\int_2^6 \frac{5dt}{t+4}$; г) $\int_0^2 \left(2x + \sqrt[4]{x^3} - e^{-x}\right)dx$.

2. Решите задачу. Скорость движения точки определяется по закону $v = (3t-1)^2$ м/c. Найдите путь, пройденный точкой за 2-ю секунду.
3. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 5x - x^2 + 6, y = 0$. Сделайте чертеж.
4. Найдите объем тела, образованного вращением вокруг оси ОХ фигуры, ограниченной линиями $y = 2 - x, x = 0, y = 0$. Сделайте чертеж.

Вариант 16

1. Вычислите определенные интегралы:

а) $\int_0^8 \frac{x^3}{2} dx$; б) $\int_0^3 3^x dx$; в) $\int_6^7 \frac{\sqrt{2}dx}{x-5}$; г) $\int_0^1 \left(e^{3x} + 2\pi - \sqrt[3]{x^2}\right)dx$.

2. Решите задачу. Скорость движения точки определяется по закону $v = t(t-2)^2$ $м/c$. Найдите путь, пройденный точкой от начала движения до момента времени 4с.
3. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \frac{3}{x}, x + y - 4 = 0$. Сделайте чертеж.
4. Найдите объем тела, образованного вращением вокруг оси ОХ фигуры, ограниченной линиями $y = x^2, x = 2, y = 0$. Сделайте чертеж.

Вариант 17

1. Вычислите определенные интегралы:

а) $\int_0^1 x^{10}dx$; б) $\int_0^1 10^x dx$; в) $\int_2^8 \frac{dt}{t+10}$; г) $\int_0^1 \left(x+2\sqrt[3]{x}\right)dx$.

2. Решите задачу. Скорость движения точки определяется по закону $v=(3t-2)^2\ м/с$. Найдите путь, пройденный точкой от начала движения до момента времени 2с.
3. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y=x^2-4x-5, y=0$. Сделайте чертеж.
4. Найдите объем тела, образованного вращением вокруг оси ОХ фигуры, ограниченной линиями $y=x+1, x=0, x=2, y=0$. Сделайте чертеж.

Вариант 18

1. Вычислите определенные интегралы:

а) $\int_2^3 x^4 dx$; б) $\int_2^3 4^x dx$; в) $\int_6^8 \frac{dx}{x-5}$; г) $\int_0^1 \left(\sqrt{x}-e^{3x}+1\right)dx$.

2. Решите задачу. Скорость движения точки определяется по закону $v=(4t-1)^2\ м/с$. Найдите путь, пройденный точкой за первую секунду.
3. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y=6x-3x^2, y=0$. Сделайте чертеж.
4. Найдите объем тела, образованного вращением вокруг оси ОХ фигуры, ограниченной линиями $y=x-1, x=3, y=0$. Сделайте чертеж.

Вариант 19

1. Вычислите определенные интегралы:

а) $\int_1^3 x^3 dx$; б) $\int_1^3 3^x dx$; в) $\int_2^5 \frac{4dt}{t+1}$; г) $\int_1^4 \left(e^{5x}-\sqrt{x}-\pi\right)dx$.

2. Решите задачу. Скорость движения точки определяется по закону $v=(1+4t)^2\ м/с$. Найдите путь, пройденный точкой от начала движения до момента времени 2с.
3. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y=x^2, y=x+2$. Сделайте чертеж.
4. Найдите объем тела, образованного вращением вокруг оси ОХ фигуры, ограниченной линиями $y=1-x, x=3, y=0$. Сделайте чертеж.

Вариант 20

1. Вычислите определенные интегралы:

а) $\int_1^4 3x^2 dx$; б) $\int_1^4 2^x dx$; в) $\int_4^8 \frac{2dt}{t-3}$; г) $\int_1^2 \left(2\sqrt{e}+\sqrt[5]{x}\right)dx$.

2. Решите задачу. Скорость движения точки определяется по закону $v=(4t-3)^2\ м/с$. Найдите путь, пройденный точкой за 4-ю секунду.
3. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y=x^2+1, y=0, x=0, x=2$. Сделайте чертеж.
4. Найдите объем тела, образованного вращением вокруг оси ОХ фигуры, ограниченной линиями $y=3x, x=2, y=0$. Сделайте чертеж.

Вариант 21

1. Вычислите определенные интегралы:

а) $\int_2^4 x^3 dx$; б) $\int_2^4 3^x dx$; в) $\int_1^8 \frac{3dx}{x+4}$; г) $\int_1^3 \left(e+\sqrt[3]{x}-2x\right)dx$.

2. Решите задачу. Скорость движения точки определяется по закону $v=(4t+3)^2$ м$/c$. Найдите путь, пройденный точкой за 2-ю секунду.

3. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y=9-x^2, y=0$. Сделайте чертеж.

4. Найдите объем тела, образованного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной линиями $y=2x, x=3, y=0$. Сделайте чертеж.

Вариант 22

1. Вычислите определенные интегралы:

а) $\int_1^3 x^4 dx$; б) $\int_1^3 4^x dx$; в) $\int_4^5 \frac{2dt}{t+1}$; г) $\int_0^{10} \left(5x+3e^x-\sqrt[5]{x^2}\right)dx$.

2. Решите задачу. Скорость движения точки определяется по закону $v=(2t-1)^2$ м$/c$. Найдите путь, пройденный точкой за 3-ю секунду.

3. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y=x^2-5x-6, y=0$. Сделайте чертеж.

4. Найдите объем тела, образованного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной линиями $y=\sqrt{x}, y=0, x=9$. Сделайте чертеж.

Вариант 23

1. Вычислите определенные интегралы:

а) $\int_0^2 x^5 dx$; б) $\int_0^2 5^x dx$; в) $\int_3^5 \frac{3dt}{t-1}$; г) $\int_0^7 \left(e^{-2x}+4x+\sqrt[3]{x}\right)dx$.

2. Решите задачу. Скорость движения точки определяется по закону $v=(3t+2)^2$ м$/c$. Найдите путь, пройденный точкой от начала движения до момента времени 4с.

3. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y=8x-x^2-7, y=0$. Сделайте чертеж.

4. Найдите объем тела, образованного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной линиями $y=2+x, x=1, x=2, y=0$. Сделайте чертеж.

Вариант 24

1. Вычислите определенные интегралы:

а) $\int_0^2 x^9 dx$; б) $\int_0^2 9^x dx$; в) $\int_4^6 \frac{2dt}{t-1}$; г) $\int_1^3 \left(\sqrt[4]{x} - 2e^x + 3\right)dx$.

2. Решите задачу. Скорость движения точки определяется по закону $v = (2-3t)^2$ м/с. Найдите путь, пройденный точкой за 4-ю секунду.
3. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 - 3x - 4, y = 0$. Сделайте чертеж.
4. Найдите объем тела, образованного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной линиями $y = 2x, x = 1, x = 4, y = 0$. Сделайте чертеж.

Вариант 25

1. Вычислите определенные интегралы:

а) $\int_0^8 \frac{x^3}{2} dx$; б) $\int_0^3 3^x dx$; в) $\int_6^7 \frac{\sqrt{2}dx}{x-5}$; г) $\int_0^1 \left(e^{3x} + 2\pi - \sqrt[3]{x^2}\right)dx$.

2. Решите задачу. Скорость движения точки определяется по закону $v = t(t-2)^2$ м/с. Найдите путь, пройденный точкой от начала движения до момента времени 4с.
3. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \frac{3}{x}, x + y - 4 = 0$. Сделайте чертеж.
4. Найдите объем тела, образованного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной линиями $y = x^2, x = 2, y = 0$. Сделайте чертеж.

Вариант 26

1. Вычислите определенные интегралы:

а) $\int_1^2 x^6 dx$; б) $\int_1^2 6^x dx$; в) $\int_2^6 \frac{5dt}{t+4}$; г) $\int_0^2 \left(2x + \sqrt[4]{x^3} - e^{-x}\right)dx$.

2. Решите задачу. Скорость движения точки определяется по закону $v = (3t-1)^2$ м/с. Найдите путь, пройденный точкой за 2-ю секунду.
3. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 5x - x^2 + 6, y = 0$. Сделайте чертеж.
4. Найдите объем тела, образованного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной линиями $y = 2 - x, x = 0, y = 0$. Сделайте чертеж.

Вариант 27

1. Вычислите определенные интегралы:

а) $\int_1^2 x^8 dx$; б) $\int_1^2 8^x dx$; в) $\int_3^6 \frac{4dt}{t-1}$; г) $\int_1^4 \left(2 + \sqrt{x^3} - x\right)dx$.

2. Решите задачу. Скорость движения точки определяется по закону $v = (2t+1)^2$ м/с. Найдите путь, пройденный точкой от начала движения до момента времени 3с.
3. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 - 6x + 8, y = 0$. Сделайте чертеж.
4. Найдите объем тела, образованного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной линиями $y = x, x = 5, y = 0$. Сделайте чертеж.

Вариант 28

1. Вычислите определенные интегралы:

а) $\int\limits_0^1 x^{10}dx$; б) $\int\limits_0^1 10^x dx$; в) $\int\limits_2^8 \frac{dt}{t+10}$; г) $\int\limits_0^1 \left(x+2\sqrt[3]{x}\right)dx$.

2. Решите задачу. Скорость движения точки определяется по закону $v=(3t-2)^2\ м/с$. Найдите путь, пройденный точкой от начала движения до момента времени 2с.
3. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y=x^2-4x-5, y=0$. Сделайте чертеж.
4. Найдите объем тела, образованного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной линиями $y=x+1, x=0, x=2, y=0$. Сделайте чертеж.

Вариант 29

1. Вычислите определенные интегралы:

а) $\int\limits_2^3 x^4 dx$; б) $\int\limits_2^3 4^x dx$; в) $\int\limits_6^8 \frac{dx}{x-5}$; г) $\int\limits_0^1 \left(\sqrt{x}-e^{3x}+1\right)dx$.

2. Решите задачу. Скорость движения точки определяется по закону $v=(4t-1)^2\ м/с$. Найдите путь, пройденный точкой за первую секунду.
3. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y=6x-3x^2, y=0$. Сделайте чертеж.
4. Найдите объем тела, образованного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной линиями $y=x-1, x=3, y=0$. Сделайте чертеж.

Вариант 30

1. Вычислите определенные интегралы:

а) $\int\limits_1^3 x^3 dx$; б) $\int\limits_1^3 3^x dx$; в) $\int\limits_2^5 \frac{4dt}{t+1}$; г) $\int\limits_1^4 \left(e^{5x}-\sqrt{x}-\pi\right)dx$.

2. Решите задачу. Скорость движения точки определяется по закону $v=(1+4t)^2\ м/с$. Найдите путь, пройденный точкой от начала движения до момента времени 2с.
3. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y=x^2, y=x+2$. Сделайте чертеж.
4. Найдите объем тела, образованного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной линиями $y=1-x, x=3, y=0$. Сделайте чертеж.

Практическая работа №3 «Дифференциальные уравнения»

Цель работы: На конкретных примерах научиться решать дифференциальные уравнения с разделяющими переменными

Содержание работы.
1.Внимательно изучите теоретический материал.
2.Выполните предложенное задание

Теоретические основы темы

<u>*Определение.*</u> Дифференциальное уравнение $y' = f(x,y)$ называется **уравнением с разделяющимися переменными**, если его можно записать в виде

$$y' = \alpha(x)\beta(y) \text{ или } X(x)dx + Y(y)dy = 0;$$

<u>Пример1.</u> Найти решение дифференциального уравнения $\frac{y}{y'} = \ln y$ при условии y(2) = 1.

$$\frac{ydx}{dy} = \ln y \quad dx = \frac{\ln y dy}{y} \quad \int dx = \int \frac{\ln y dy}{y} \quad x + C = \int \ln y d(\ln y)$$

$x + C = \frac{\ln^2 y}{2}$ - общее решение, при y(2) = 1 получаем

$$2 + C = \frac{\ln^2 1}{2}; \quad \Rightarrow \quad 2 + C = 0; \quad \Rightarrow \quad C = -2;$$

Итого: $2(x-2) = \ln^2 y;$ или $y = e^{\pm\sqrt{2x-4}}$ - частное решение;

<u>Пример2.</u> Решить уравнение $y' = x(y^2+1)$.

$$\frac{dy}{y^2+1} = dx; \qquad \int \frac{dy}{y^2+1} = \int dx;$$

$$arctgy = \frac{x^2}{2} + C; \qquad y = tg\left(\frac{x^2}{2} + C\right);$$

Дифференциальное уравнение *первого порядка*, **содержит**:
1) независимую переменную x;
2) зависимую переменную y (функцию);
3) первую производную функции y ‘ .

Что значит решить дифференциальное уравнение? Решить дифференциальное уравнение – это значит, найти **множество функций** $y = f(x) + C$, которые удовлетворяют данному уравнению. Такое множество функций называется **общим решением дифференциального уравнения**.

<u>Пример 1</u> Решить дифференциальное уравнение $xy' = y$

В первую очередь нужно переписать производную немного в другом виде. Вспоминаем

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

$$x \cdot \frac{dy}{dx} = y$$

обозначение производной:

Итак, на первом этапе переписываем производную в нужном нам виде:

На втором этапе **всегда** смотрим, нельзя ли **разделить переменные?** Что значит разделить переменные? Грубо говоря, **в левой части** нам нужно оставить **только «игреки»**, а **в правой части** организовать **только «иксы»**. Разделение переменных выполняется с помощью «школьных» манипуляций: вынесение за скобки, перенос слагаемых из части в часть со сменой знака, перенос множителей из части в часть по правилу пропорции и т.п.

Дифференциалы dy и dx – это полноправные множители.

В рассматриваемом примере переменные легко разделяются перекидыванием множителей по правилу пропорции: $\frac{dy}{y}=\frac{dx}{x}$ Переменные разделены.
В левой части – только «игреки», в правой части – только «иксы».

Следующий этап – **интегрирование дифференциального уравнения**. Всё просто, навешиваем интегралы на обе части: $\int\frac{dy}{y}=\int\frac{dx}{x}$

Разумеется, интегралы нужно взять. В данном случае они табличные: $\ln|y|=\ln|x|+C$

К любой первообразной приписывается константа. Здесь два интеграла, но константу достаточно записать один раз. Почти всегда её приписывают в правой части.
Строго говоря, после того, как взяты интегралы, дифференциальное уравнение считается решенным. Единственное, у нас «игрек» не выражен через «икс», то есть решение представлено *в неявном* виде. Решение дифференциального уравнения в неявном виде называется **общим интегралом дифференциального** $\ln|y|=\ln|x|+C$ **уравнения**. То есть, – это общий интеграл.

Пример 2

Найти частное решение дифференциального уравнения $y'=-2y$, удовлетворяющее начальному условию $y(0)=2$

По условию требуется найти **частное решение** ДУ, удовлетворяющее начальному условию. Такая постановка вопроса также называется *задачей Коши*.

Сначала находим общее решение. Переписываем производную в нужном виде:
$\frac{dy}{dx}=-2y$ Очевидно, что переменные можно разделить: $\frac{dy}{y}=-2dx$

Интегрируем уравнение:

$$\int\frac{dy}{y}=-2\int dx$$

$$\ln|y|=-2x+C^*$$

Общий интеграл получен. Теперь пробуем общий интеграл преобразовать в общее решение (выразить «игрек» в явном виде). Вспоминаем определение логарифма : $\ln a=b\Rightarrow a=e^b$. В данном

случае: $y = e^{-2x+C^*}$ Используя свойство степеней, перепишем функцию следующим образом:
$y = e^{C^*} \cdot e^{-2x}$

Если C^* – это константа, то e^{C^*} – тоже некоторая константа, которую обозначим через букву C:
$y = Ce^{-2x}$

Итак, общее решение: $y = Ce^{-2x}$, где $C = const$.

На завершающем этапе нужно найти частное решение, удовлетворяющее заданному начальному условию $y(0) = 2$.

Необходимо подобрать **такое** значение константы C, чтобы выполнялось заданное начальное условие $y(0) = 2$.

В общее решение вместо «икса» подставляем ноль, а вместо «игрека» двойку:
$2 = Ce^{-2\cdot 0}$
$2 = Ce^{0}$
$2 = C \cdot 1$ $y(0) = Ce^{-2\cdot 0} = Ce^{0} = C = 2$ То есть, $C = 2$

Итак,

В общее решение $y = Ce^{-2x}$ подставляем найденное значение $C = 2$ константы:
$y = 2e^{-2x}$
– это и есть нужное нам частное решение.

<u>Задание для самостоятельного решения:</u>

1. Решить дифференциальные уравнения с разделёнными переменными.

1.1 $(x^2+1)dx = dy$	**1.6** $3dy = (9x^2+3)dx$	**1.11** $x^4dx = (y-5)dy$
1.2 $\frac{5dx}{x} = y^2dy$	**1.7** $e^x dx = (2y+1)dy$	**1.12** $\frac{4dy}{y} = xdx$
1.3 $\sin(5x+1)\,dx - dy = 0$	**1.8** $\cos(6x+1)\,dx - y^2dy = 0$	**1.13** $(2x-3)^4dx + y^4dy = 0$
1.4 $xdx + 2ydy = 0$	**1.9** $3xdx = 3y^2dy$	**1.14** $dx = (4y^3-3)dy$
1.5 $\frac{dx}{3x+8} = ydy$	**1.10** $\frac{dy}{y} = e^{(4x-2)}dx$	**1.15** $\frac{dx}{x} - (y^5+2y)dy = 0$

2. Решить дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными.

2.1 $2xdy - 3ydx = 0$	**2.6** $x^{-2}dy = y^{-3}dx$	**2.11** $dy = \frac{dx}{5y^3}$

2.2	$\frac{dy}{e^x} - \frac{dx}{(y^2+1)} = 0$	**2.7**	$x^2dy = y^3dx$	**2.12**	$\frac{dy}{x} - 5ydx = 0$
2.3	$cos^2xdy = dx$	**2.8**	$(x^2+x)dy = \frac{dx}{y}$	**2.13**	$ydx = \frac{dy}{x^2}$
2.4	$y' = \frac{sinx}{y}$	**2.9**	$y' = x^2$	**2.14**	$y' = 4x$
2.5	$\frac{\cos(3x+2)}{dy} = \frac{y}{dx}$	**2.10**	$\frac{(4x-1)^3}{dy} = \frac{1}{dx}$	**2.15**	$\frac{1}{2y+3} = \frac{dy}{dx}$

3. Найти частное решение дифференциального уравнения (задача Коши).

3.1
$x^2dx + ydy = 0,$ если $y = 1$ при $x = 0$

3.2
$(2x-1)dy = (y+1)dx,$ если $y = 0$ при $x = 5$

3.3
$dy = xydx,$ если $y = 4$ при $x = 0$

3.4
$2yy' = 1 - 3x^2,$ если $y = 3$ при $x = 1$

3.5
$(1+x^2)dy - 2x(y+3)dx = 0,$ если $y = -1$ при $x = 0$

3.6
$(1+x)ydx = (y-1)xdy,$ если $y = 1$ при $x = 1$

3.7
$\frac{dx}{cos^2x \cdot cosy} + ctgx \cdot sinydy = 0$ если $y = \pi$ при $x = \frac{\pi}{3}$

3.8
$y'tgx = 1 + y,$ если $y = -\frac{1}{2}$ при $x = \frac{\pi}{6}$

3.9
$y'\sqrt{1-x^2} = x,$ если $y = 0$ при $x = 1$

3.10
$\frac{dy}{\sqrt{y}} + dx = \frac{dx}{\sqrt{x}},$ если $y = 1$ при $x = 0$

<u>Контрольные вопросы:</u>

1) Что называется дифференциальным уравнением?
2) Что такое порядок дифференциального уравнения?
3) Что называется решением дифференциального уравнения?
4) Что такое общее решение?
5) Какое решение называется частным?
6) Где применяются дифференциальные уравнения?
7) Какие уравнения называются уравнениями с разделяющимися переменными?
8) Каков алгоритм решения дифференциального уравнения при помощи разделения переменных?

№ варианта	№ задания	№ варианта	№ задания
1	1.1; 2.1; 3.1	16	1.1; 2.1; 3.6
2	1.2; 2.2; 3.2	17	1.2; 2.2; 3.7
3	1.3; 2.3; 3.3	18	1.3; 2.3; 3.8
4	1.4; 2.4; 3.4	19	1.4; 2.4; 3.9
5	1.5; 2.5; 3.5	20	1.5; 2.5; 3.10
6	1.6; 2.6; 3.6	21	1.6; 2.6; 3.1
7	1.7; 2.7; 3.7	22	1.7; 2.7. 3.2
8	1.8; 2.8; 3.8	23	1.8; 2.8; 3.3
9	1.9; 2.9; 3.9	24	1.9; 2.9; 3.4
10	1.10; 2.10; 3.10.	25	1.10; 2.10; 3.5
11	1.11; 2.11; 3.1	26	1.11; 2.11; 3.6
12	1.12; 2.12; 3.2	27	1.12; 2.12; 3.7
13	1.13; 2.13; 3.3	28	1.13; 2.13; 3.8
14	1.14; 2.14; 3.4	29	1.14; 2.14; 3.9
15	1.15; 2.15; 3.5	30	1.15; 2.15; 3.10

Практическая работа №4 «Элементарные преобразования матриц»

Содержание работы.

1.Внимательно изучите теоретический материал.
2.Выполните предложенное задание

Теоретические основы темы

Сложение матриц. Суммой двух матриц А и В одинакового размера $m \times n$ называется матрица $C = A + B,$ элементы которой $C_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ при i=1,2, . . . , m; j=1,2, . . . , n (т.е. матрицы складываются поэлементно).

Например, $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 6 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -4 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = A + B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -4 \\ 8 & 10 & 7 \end{pmatrix}$

В частном случае $A + O = A.$

<u>Определение:</u> Произведением матриц называется матрица, элементы которой могут быть вычислены по следующим формулам:

$$A \cdot B = C;$$

$$\boxed{c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj}.}$$

Из приведенного определения видно, что операция умножения матриц определена только для матриц, **число столбцов первой из которых равно числу строк второй.**

Пример. Вычислить произведение матриц $A \cdot B,$

где А=$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 5 & 4 & 4 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

Решение. Найдем размер матрицы-произведения (если умножение матриц возможно): $\underset{2\times3}{A}\cdot\underset{3\times3}{B}=\underset{2\times3}{C}$.
Вычислим элементы матрицы-произведения С, умножая элементы каждой

строки матрицы А на соответствующие элементы столбцов матрицы В следующим образом:

$$\tilde{N}=\begin{pmatrix} (-1)\cdot3+0\cdot5+2\cdot(-2) & (-1)\cdot0+0\cdot4+2\cdot0 & (-1)\cdot1+0\cdot4+2\cdot0 \\ 3\cdot3+4\cdot5+0\cdot(-2) & 3\cdot0+4\cdot4+0\cdot0 & 3\cdot1+4\cdot4+0\cdot1 \end{pmatrix}$$

Получаем С= $\begin{pmatrix} -7 & 0 & 1 \\ 29 & 16 & 19 \end{pmatrix}$

<u>Пример.</u> Найти произведение матриц А = $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ и В = $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

$$AB=\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1\cdot2 & 1\cdot4 & 1\cdot1 \\ 4\cdot2 & 4\cdot4 & 4\cdot1 \\ 3\cdot2 & 3\cdot4 & 3\cdot1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 8 & 16 & 4 \\ 6 & 12 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$BA=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}=2\cdot1+4\cdot4+1\cdot3=2+16+3=21.$$

<u>Пример.</u> Найти произведение матриц А= $\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$, В= $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$

$$AB=(1 \quad 2)\cdot\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}=(3+10 \quad 4+12)=(13 \quad 16).$$

Возведение в степень. Целой положительной степенью A^m (m>1) квадратной матрицы А называется произведение m матриц, равных А, т.е.
$A^m\cdot=A\cdot A\cdot\ldots\cdot A.$

Заметим, что операция возведения в степень определяется только для квадратных матриц. По определению полагают $A^0=E, A^1=A$. Нетрудно показать, что $A^m\cdot A^k=A^{m+k}, (A^m)^k=A^{mk}$.

Пример. Найти A^2, где А= $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}$.

Решение. $A^2=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 17 & 6 \\ 24 & 32 \end{pmatrix}$. Необходимо заметить, что из равенства $A^m=O$ еще не следует, что матрица А=О.

<u>Определение.</u> Рангом матрицы А называется число ненулевых строк, полученных после приведения ее к ступенчатому виду.

Теорема. Ранг матрицы не изменяется при элементарных преобразованиях матрицы.

С помощью элементарных преобразований можно привести матрицу к так называемому ступенчатому виду, когда вычисление ее ранг не представляет труда.

Матрица А называется **ступенчатой**, если она имеет вид

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} & \dots & a_{1k} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2r} & \dots & a_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{rr} & \dots & a_{rk} \end{pmatrix}$$

где $a_{ij} \neq 0, i=1,2,\dots,r; r \leq k.$

Пример нахождения матрицы с помощью элементарных преобразований. Найти ранг матрицы А = $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & -4 & 1 & 5 & 3 \\ -4 & 5 & 7 & -10 & 0 \\ -2 & 1 & 8 & -5 & 3 \end{pmatrix}$.

Решение. 1. Если $a_{11}=0,$ то при перестановке строк или столбцов добиваются того, что $a_{11} \neq 0,$. В данном примере поменяем местами, например, 1-ю и 2-ю строки матрицы .

2. Если $a_{11} \neq 0,$ то, умножая элементы 2-й, 3-й и 4-й строк на подходящие числа (именно на $-a_{21}/a_{11}=0, -a_{31}/a_{11}=2, -a_{41}/a_{11}=1,$) и прибавляя полученные числа соответственно к элементам 2-й, 3-й и 4-й строк, добьемся того, чтобы все элементы 1-го столбца (кроме a_{11}) равнялись нулю

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ -4 & 5 & 7 & -10 & 0 \\ -2 & 1 & 8 & -5 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 7 & -10 & 0 \\ 0 & -3 & 8 & -5 & 3 \end{pmatrix}$$

3. Если в полученной матрице $a_{22} \neq 0$ (в данном случае $a_{22} = -1 \neq 0$), то, умножая элементы 3-й и 4-й строк на подходящие числа (а именно на $-a_{32}/a_{22} = -3$, $-a_{42}/a_{22} = -3$), добьемся того, чтобы все элементы 2-го столбца

(кроме a_{12}, a_{22}) равнялись нулю. Если в процессе преобразований получаются строки

(или столбцы), целиком состоящие из нулей (как в данном примере), то отбрасываем эти строки (или столбцы):

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 8 & -5 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Последняя матрица имеет ступенчатый вид и 2е ненулевые строки. Поэтому ранг полученной ступенчатой, а следовательно, и данной матрицы равен двум.

Задания для самостоятельного выполнения:

ЗАДАНИЕ 1. Выполнить действия:

1) А+**B**; **2) B**-А; **3)** 3А+**2B**; **4) B**^{2}-А

1.A= $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix}$ B= $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$	2.A= $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 6 \\ 4 & 0 & -3 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ B= $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 6 & -4 & 9 \end{pmatrix}$
3.A= $\begin{pmatrix} 7 & -3 & 1 \\ -5 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & -6 \end{pmatrix}$ B= $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 8 & 3 & 0 \\ 2 & -4 & 1 \end{pmatrix}$	4.A= $\begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \\ 4 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ B= $\begin{pmatrix} -4 & 5 & 8 \\ -1 & 6 & 0 \\ -4 & 3 & 5 \end{pmatrix}$
5.A= $\begin{pmatrix} -3 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 8 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ B= $\begin{pmatrix} -2 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 6 \\ 2 & -7 & 8 \end{pmatrix}$	6.A= $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -3 & 3 & -1 \\ 1 & 9 & 1 \end{pmatrix}$ B= $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ -6 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$
7.A= $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ B= $\begin{pmatrix} 1 & 9 & 5 \\ 3 & 7 & 2 \\ 0 & -3 & 5 \end{pmatrix}$	8.A= $\begin{pmatrix} 6 & -3 & 6 \\ 1 & -2 & 5 \\ 2 & 7 & 9 \end{pmatrix}$ B= $\begin{pmatrix} -9 & 1 & 4 \\ 7 & 3 & 8 \\ 3 & 9 & 2 \end{pmatrix}$
9.A= $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix}$ B= $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 6 \\ 4 & 0 & -3 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$	10.A= $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ B= $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$
11.A= $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 6 & -4 & 9 \end{pmatrix}$ B= $\begin{pmatrix} 7 & -3 & 1 \\ -5 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & -6 \end{pmatrix}$	12.A= $\begin{pmatrix} -2 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 6 \\ 2 & -7 & 8 \end{pmatrix}$ B= $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ -6 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$
13.A= $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ B= $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 8 & 3 & 0 \\ 2 & -4 & 1 \end{pmatrix}$	14.A= $\begin{pmatrix} 6 & -3 & 6 \\ 1 & -2 & 5 \\ 2 & 7 & 9 \end{pmatrix}$ B= $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$
15.A= $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 6 \\ 4 & 0 & -3 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ B= $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 6 \\ 5 & 1 & 7 \\ -7 & 3 & 0 \end{pmatrix}$	16.A= $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 7 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ B= $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 6 & 0 & 3 \end{pmatrix}$
17.A= $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ B= $\begin{pmatrix} 1 & -7 & -2 \\ 1 & 0 & 8 \\ 4 & -4 & 1 \end{pmatrix}$	18.A= $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 6 \\ 4 & 0 & -3 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ B= $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$
19.A= $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -3 & -3 & -3 \end{pmatrix}$ B= $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ -6 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$	20.A= $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ B= $\begin{pmatrix} 4 & -3 & 7 \\ -1 & 0 & 5 \\ 2 & 7 & 2 \end{pmatrix}$
21.A= $\begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ -9 & 8 & 7 \end{pmatrix}$ B= $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 6 \\ 4 & 0 & -3 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$	22.A= $\begin{pmatrix} 5 & 6 & -2 \\ 7 & 8 & -9 \\ 4 & 8 & -3 \end{pmatrix}$ B= $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ -6 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$
23.A= $\begin{pmatrix} 7 & -3 & 1 \\ -5 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & -6 \end{pmatrix}$ B= $\begin{pmatrix} 6 & -9 & 6 \\ -4 & 1 & 3 \\ 7 & 0 & -5 \end{pmatrix}$	24.A= $\begin{pmatrix} 7 & -3 & 1 \\ -5 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & -6 \end{pmatrix}$ B= $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ -8 & 9 & 3 \\ 7 & -3 & -2 \end{pmatrix}$
25.A= $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ B= $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ -6 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$	26.A= $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ -8 & 9 & 3 \\ 7 & -3 & -2 \end{pmatrix}$ B= $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -3 & -3 & -3 \end{pmatrix}$

27. A= $\begin{pmatrix} 7 & -3 & 1 \\ -5 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & -6 \end{pmatrix}$ B= $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$	28. A= $\begin{pmatrix} 7 & -3 & 1 \\ -5 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & -6 \end{pmatrix}$ B= $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ -8 & 9 & 3 \\ 7 & -3 & -2 \end{pmatrix}$
29. A= $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ -8 & 9 & 3 \\ 7 & -3 & -2 \end{pmatrix}$ B= $\begin{pmatrix} 7 & -3 & 1 \\ -5 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & -6 \end{pmatrix}$	30. A= $\begin{pmatrix} 7 & -3 & 1 \\ -5 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & -6 \end{pmatrix}$ B= $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -3 & -3 & -3 \end{pmatrix}$

ЗАДАНИЕ 2. Умножить матрицы:

1. а) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$
2. а) $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 5 & 8 & -4 \\ 6 & 9 & -5 \\ 4 & 7 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 4 & -1 & 3 \\ 9 & 6 & 5 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$
3. а) $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 5 & -1 & -1 \\ 3 & 6 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 1 & 4 & -1 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}$
4. а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$
5. а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -4 & 3 & -5 \\ 5 & -4 & 7 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
6. а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 3 & -3 \\ -4 & 3 & -5 \\ 5 & -4 & 7 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

7. а) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} -2 & 3 & -3 \\ -4 & 3 & -5 \\ 5 & -4 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$

8. а) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

9. а) $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -7 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 3 \\ 10 & 5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 11 & -4 & 1 \\ -25 & 9 & -2 \\ 15 & -5 & 1 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

10. а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 11 & -4 & 1 \\ -25 & 9 & -2 \\ 15 & -5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 3 \\ 10 & 5 & 1 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$

11. а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$

12. а) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 3 & -3 \\ -4 & 3 & -5 \\ 5 & -4 & 7 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

13. а) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

14. а) $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & 0 \\ 4 & -3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$

15. а) $\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 7 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$

16. а) $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$
17. а) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$
18. а) $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 5 & 8 & -4 \\ 6 & 9 & -5 \\ 4 & 7 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 4 & -1 & 3 \\ 9 & 6 & 5 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$
19. а) $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 5 & -1 & -1 \\ 3 & 6 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 1 & 4 & -1 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}$
20. а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$
21. а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -4 & 3 & -5 \\ 5 & -4 & 7 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
22. а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 3 & -3 \\ -4 & 3 & -5 \\ 5 & -4 & 7 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
23. а) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} -2 & 3 & -3 \\ -4 & 3 & -5 \\ 5 & -4 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$
24. а) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

25. а) $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -7 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 3 \\ 10 & 5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 11 & -4 & 1 \\ -25 & 9 & -2 \\ 15 & -5 & 1 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
26. а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 11 & -4 & 1 \\ -25 & 9 & -2 \\ 15 & -5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 3 \\ 10 & 5 & 1 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$
27. а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$
28. а) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 3 & -3 \\ -4 & 3 & -5 \\ 5 & -4 & 7 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$
29. а) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$
30. а) $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & 0 \\ 4 & -3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$

Практическая работа №5 «Вычисление определителей»

Содержание работы.
1.Внимательно изучите теоретический материал.
2.Выполните предложенное задание

Теоретические основы темы

Определителем матрицы второго порядка $a = (a_{ij})$, или **определителем второго порядка**, называется число, которое отыскивается по формуле:

$\Delta = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$, например, пусть А=$\begin{pmatrix} -2 & 8 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$.

тогда $\Delta = |A| = \begin{vmatrix} -2 & 8 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -2 \cdot 5 - 8 \cdot 1 = -18$

Пусть дана квадратная матрица третьего порядка $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

Определителем матрицы третьего порядка $a = (a_{ij})$, или **определителем третьего порядка**, называется число, которое находится по формуле

$\Delta = |A| = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$.

Пример. Вычислить определитель третьего порядка |A|=$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix}$

Решение. $\Delta = 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} - (-1) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$ =1·0+1·3+3·6=21

Определитель третьего порядка удобно вычислить по правилу треугольников (или по правилу Сарруса). Покажем это на схеме

$$\begin{vmatrix} \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \bullet & \circ & \circ \\ \circ & \bullet & \circ \\ \circ & \circ & \bullet \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \circ & \bullet & \circ \\ \circ & \circ & \bullet \\ \bullet & \circ & \circ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \circ & \circ & \bullet \\ \bullet & \circ & \circ \\ \circ & \bullet & \circ \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \circ & \circ & \bullet \\ \circ & \bullet & \circ \\ \bullet & \circ & \circ \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \circ & \bullet & \circ \\ \bullet & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \bullet \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \bullet & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \bullet \\ \circ & \bullet & \circ \end{vmatrix}$$

Например,

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \end{vmatrix}$ = 1·0·5+2·1·2+(-1) ·4·3-2·0·3-(-1) ·2·5-4·1·1 = 0+4-12-0+10-4= -2

Для того, чтобы ввести понятие определителя более высокого порядка, потребуются некоторые дополнительные понятия.

Минором M_{ij} **элемента** a_{ij} матрицы n-го порядка называется определитель матрицы (n-1) порядка, полученной матрицы А вычеркиванием i-й строки и j-го столбца. Например, минором элемента a_{12} матрицы А третьего порядка будет

$$M_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{21}a_{33}-a_{31}a_{23}.$$

Каждая матрица n-го порядка имеет n^2 миноров (n-1)-го порядка.

Алгебраическим дополнением элемента A_{ij} матрицы n-го порядка называется его минор, взятый со знаком $(-1)^{i+j}$; т.е. алгебраическое дополнение совпадает с минором, если сумма номеров строки и столбца $(i + j)$ - четное число, и отличается от минора знаком, если $(i + j)$ - нечетное число. Например,

$A_{23}=(-1)^{2+3}M_{23}==M_{23}$; $A_{31}=(-1)^{3+1}M_{31}=M_{31}$

Пример. Найти алгебраические дополнения всех элементов матрицы

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Решение

$\mathbf{A_{11}=(-1)^{1+1}}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}\mathbf{=0;}$ $\mathbf{A_{12}=(-1)^{1+1}}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}\mathbf{=0;}$ $\mathbf{A_{13}=(-1)^{1+1}}\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}\mathbf{=0;}$

$\mathbf{A_{21}=(-1)^{1+1}}\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}\mathbf{=0;}$ $\mathbf{A_{22}=(-1)^{1+1}}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}\mathbf{=0;}$ $\mathbf{A_{23}=(-1)^{1+1}}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}\mathbf{=0;}$

$\mathbf{A_{31}=(-1)^{1+1}}\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\mathbf{=0;}$ $\mathbf{A_{32}=(-1)^{1+1}}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\mathbf{=0;}$ $\mathbf{A_{33}=(-1)^{1+1}}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}\mathbf{=0;}$

Определителем квадратной матрицы А n-го порядка называется число, равное сумме произведений элементов 1**-й строки на их алгебраические дополнения:**

$\Delta=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\ldots+a_{1n}A_{1n}=\sum_{s=1}^{n}a_{is}A_{is}$ (разложение по элементам 1-й строки).

s=1

Так, например, вычисление определителя 4-го порядка сведется к вычислению четырех определителей 3-го порядка.

Знание свойств определителей позволит избежать громоздких вычислений.

Задания для самостоятельного выполнения:

ЗАДАНИЕ 1:

1.1. Выписать все миноры данного определителя;

1.2. Вычислить определитель с помощью правила «треугольников».

1. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 7 \\ 4 & 3 & -5 \\ -6 & -4 & 3 \end{vmatrix}$	2. $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & -5 & 8 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix}$	3. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & -4 & 7 \\ -3 & 12 & -15 \end{vmatrix}$	4. $\begin{vmatrix} 4 & -2 & 4 \\ 10 & 2 & 12 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$	5. $\begin{vmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}$
6. $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & -3 \end{vmatrix}$	7. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \end{vmatrix}$	8. $\begin{vmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & -3 \\ -2 & -3 & 2 \end{vmatrix}$	9. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$	10. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix}$
11. $\begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix}$	12. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$	13. $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 25 \\ 1 & 7 & 49 \\ 1 & 8 & 64 \end{vmatrix}$	14. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 9 \\ 16 & 25 & 81 \end{vmatrix}$	15. $\begin{vmatrix} -2 & -3 & 5 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & -2 \end{vmatrix}$
16. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -4 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$	17. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 7 \\ 4 & 3 & -5 \\ -6 & -4 & 3 \end{vmatrix}$	18. $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & -5 & 8 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix}$	19. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & -4 & 7 \\ -3 & 12 & -15 \end{vmatrix}$	20. $\begin{vmatrix} 4 & -2 & 4 \\ 10 & 2 & 12 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$
21. $\begin{vmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}$	22. $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & -3 \end{vmatrix}$	23. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \end{vmatrix}$	24. $\begin{vmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & -3 \\ -2 & -3 & 2 \end{vmatrix}$	25. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$
26. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix}$	27. $\begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix}$	28. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$	29. $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 25 \\ 1 & 7 & 49 \\ 1 & 8 & 64 \end{vmatrix}$	30. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 9 \\ 16 & 25 & 81 \end{vmatrix}$

ЗАДАНИЕ 2:

2.1. Выписать все алгебраические дополнения элементов 3 строки

2.2. Вычислить определитель с помощью разложения его по элементам строки или столбца

1. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & -1 & 7 \end{vmatrix}$	2. $\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 5 & -6 & 7 \end{vmatrix}$	3. $\begin{vmatrix} 12 & 6 & -4 \\ 6 & 4 & 4 \\ 3 & 2 & 8 \end{vmatrix}$	4. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -5 \\ -1 & 4 & 1 \\ 6 & -2 & -7 \end{vmatrix}$	5. $\begin{vmatrix} 6 & 4 & 2 \\ 7 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix}$
6. $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 2 & -1 & -7 \\ 3 & 5 & -2 \end{vmatrix}$	7. $\begin{vmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 2 & 8 & 5 \\ 8 & 7 & 3 \end{vmatrix}$	8. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$	9. $\begin{vmatrix} 1 & 17 & -7 \\ -1 & 13 & 1 \\ 1 & 7 & 1 \end{vmatrix}$	10. $\begin{vmatrix} 4 & -3 & 5 \\ 3 & -2 & 8 \\ 1 & -7 & -5 \end{vmatrix}$
11. $\begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 5 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}$	12. $\begin{vmatrix} 5 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 7 & 4 & 5 \end{vmatrix}$	13. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$	14. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & -4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$	15. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & -4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$
16. $\begin{vmatrix} 5 & 7 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \end{vmatrix}$	17. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & -1 & 7 \end{vmatrix}$	18. $\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 5 & -6 & 7 \end{vmatrix}$	19. $\begin{vmatrix} 12 & 6 & -4 \\ 6 & 4 & 4 \\ 3 & 2 & 8 \end{vmatrix}$	20. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -5 \\ -1 & 4 & 1 \\ 6 & -2 & -7 \end{vmatrix}$
21. $\begin{vmatrix} 6 & 4 & 2 \\ 7 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix}$	22. $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 2 & -1 & -7 \\ 3 & 5 & -2 \end{vmatrix}$	23. $\begin{vmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 2 & 8 & 5 \\ 8 & 7 & 3 \end{vmatrix}$	24. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$	25. $\begin{vmatrix} 1 & 17 & -7 \\ -1 & 13 & 1 \\ 1 & 7 & 1 \end{vmatrix}$
26. $\begin{vmatrix} 4 & -3 & 5 \\ 3 & -2 & 8 \\ 1 & -7 & -5 \end{vmatrix}$	27. $\begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 5 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}$	28. $\begin{vmatrix} 5 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 7 & 4 & 5 \end{vmatrix}$	29. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$	30. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & -4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

ЗАДАНИЕ 3: Вычислить определитель 2мя способами

1. $\begin{vmatrix} 6 & -1 & 1 \\ 2 & 6 & -2 \\ -3 & 3 & 6 \end{vmatrix}$	**2** $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$	**3** $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 6 & -6 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}$	**4** $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix}$	**5** $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & -1 \\ -1 & 8 & 3 \end{vmatrix}$
6 $\begin{vmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 0 & 8 & 4 \\ 2 & 3 & 8 \end{vmatrix}$	**7** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix}$	**8** $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$	**9** $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$	**10** $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 4 & 1 & -2 \\ 5 & 2 & -3 \end{vmatrix}$
11 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix}$	**12** $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 7 & 1 & 6 \\ 6 & 0 & 5 \end{vmatrix}$	**13** $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix}$	**14** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 5 \end{vmatrix}$	**15** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 5 \\ -7 & 1 & 0 \end{vmatrix}$
16 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 5 \\ -2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$	**17** $\begin{vmatrix} 6 & -1 & 1 \\ 2 & 6 & -2 \\ -3 & 3 & 6 \end{vmatrix}$	**18** $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$	**19** $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 6 & -6 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}$	**20** $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix}$
21 $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & -1 \\ -1 & 8 & 3 \end{vmatrix}$	**22** $\begin{vmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 0 & 8 & 4 \\ 2 & 3 & 8 \end{vmatrix}$	**23** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix}$	**24** $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$	**25** $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$
26 $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 4 & 1 & -2 \\ 5 & 2 & -3 \end{vmatrix}$	**27** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix}$	**28** $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 7 & 1 & 6 \\ 6 & 0 & 5 \end{vmatrix}$	**29** $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix}$	**30** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 5 \end{vmatrix}$

Практическая работа №6 «Решение систем линейных уравнений».

Цель: закрепить знания, умения и навыки по теме «Методы решения систем линейных уравнений».

Содержание работы.

1.Внимательно изучите теоретический материал.
2.Выполните предложенное задание

Теоретические основы темы

Решение системы линейных уравнений тремя методами: методом Гаусса, методом Крамера и методом обратной матрицы.

Задача. Данную систему линейных уравнений решить тремя различными методами.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 7 \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 8 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 3 \end{cases}$$

Метод Гаусса:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 7 \\ 5 & 1 & 2 & 8 \\ 3 & -1 & 1 & 3 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \mathrm{II}-5\cdot\mathrm{I} \\ \mathrm{III}-3\cdot\mathrm{I} \end{array} \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & -9 & -18 & -27 \\ 0 & -7 & -11 & -18 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \mathrm{II}:(-9) \to \\ \mathrm{III}\cdot(-1) \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 7 & 11 & 18 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ \mathrm{III}-7\cdot\mathrm{II} \end{array} \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ \mathrm{III}:(-3) \end{array} \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)\begin{array}{l} \mathrm{I}-4\cdot\mathrm{III} \\ \mathrm{II}-2\cdot\mathrm{III} \to \\ \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)\begin{array}{l} \mathrm{I}-2\cdot\mathrm{II} \\ \\ \\ \end{array} \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

$x_1 = 1;\ x_2 = 1;\ x_3 = 1.$

Правило Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 20 + 12 - 12 + 2 - 10 = -27;$$

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} 7 & 2 & 4 \\ 8 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 7 - 32 + 12 - 12 + 14 - 16 = -27;$$

$$\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} 1 & 7 & 4 \\ 5 & 8 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 8 + 60 + 42 - 96 - 6 - 35 = -27;$$

$$\Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 5 & 1 & 8 \\ 3 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 35 + 48 - 21 + 8 - 30 = -27;$$

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta} = 1;\ x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta} = 1;\ x_3 = \frac{\Delta_{x_3}}{\Delta} = 1.$$

Решение с помощью обратной матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix};\ B = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix};\ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix};\ X = A^{-1}B.$$

$$\Delta A = -27;$$

$$A_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 3;\ A_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1;\ A_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -8;$$

$$A_{21} = -6;\ A_{22} = -11;\ A_{23} = 7;$$

$$A_{31} = 0;\ A_{32} = 18;\ A_{33} = -9.$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{27} \begin{pmatrix} 3 & -6 & 0 \\ 1 & -11 & 18 \\ -8 & 7 & -9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{27} \begin{pmatrix} 3 & -6 & 0 \\ 1 & -11 & 18 \\ -8 & 7 & -9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$x_1 = 1;\ x_2 = 1;\ x_3 = 1.$$

Задание

1. Решить систему линейных уравнений третьего порядка методом Крамера

2. Решить систему линейных уравнений третьего порядка методом Гаусса

3. Решить систему линейных уравнений третьего порядка матричным методом.

1 $\begin{cases} 3x+5y+z=-2 \\ -2x-2y-3z=7 \\ x+4y+z=-5 \end{cases}$

2 $\begin{cases} x+y+z=6 \\ 3x-y+3z=2 \\ 4x+3y-z=5 \end{cases}$

3 $\begin{cases} x+y-3z=-3 \\ 2x-y-6z=9 \\ -x+y+4z=-6 \end{cases}$

4 $\begin{cases} 3x-6y-z=1 \\ -x+2y+z=-3 \\ 2x+y+3z=-4 \end{cases}$

5 $\begin{cases} 3x+5y+z=2 \\ 2x-y+2z=1 \\ -x+3y-3z=-4 \end{cases}$

6 $\begin{cases} -x-y+z=-5 \\ 3x-2y-2z=-4 \\ -2x+2y-3z=1 \end{cases}$

7 $\begin{cases} x-y-2z=6 \\ -2x-3y-5z=-1 \\ 4x-2y-z=6 \end{cases}$

8 $\begin{cases} 4x-3y+z=3 \\ 3x+2y-2z=-3 \\ -x+3y+z=10 \end{cases}$

9 $\begin{cases} -x+3y-4z=-3 \\ 2x-y-3z=5 \\ -3x+4y+5z=-2 \end{cases}$

10 $\begin{cases} x-y+z=4 \\ 5x-3y-2z=1 \\ 3x+2y-3z=-1 \end{cases}$

11 $\begin{cases} 3x-2y+2z=3 \\ x+2y-5z=3 \\ -4x+y+2z=-3 \end{cases}$

12 $\begin{cases} 3x-2y+2z=5 \\ 5x+y-3z=-6 \\ -2x+2y-z=1 \end{cases}$

13 $\begin{cases} 3x-4y+5z=4 \\ x+2y+z=6 \\ 2x-y+2z=2 \end{cases}$

14 $\begin{cases} x+2y+3z=4 \\ 2x-5y+2z=3 \\ 3x-8y+2z=5 \end{cases}$

15 $\begin{cases} 3x-2y+3z=-2 \\ x+5y-2z=-1 \\ -4x-3y-5z=-5 \end{cases}$

16 $\begin{cases} 4x+5y+4z=3 \\ -7x+2y-z=2 \\ 3x+y+z=-1 \end{cases}$

17 $\begin{cases} 2x+2y-z=1 \\ x-3y-5z=4 \\ 4x+5y-3z=-1 \end{cases}$

18 $\begin{cases} x-y+z=-4 \\ 5x+6y-2z=23 \\ 4x-3y-2z=4 \end{cases}$

19 $\begin{cases} -2x+3y-2z=4 \\ x+y+z=-7 \\ 4x-3y-z=6 \end{cases}$

20 $\begin{cases} x+y-z=-3 \\ 4x-2y-5z=5 \\ 3x+2y+7z=4 \end{cases}$

21 $\begin{cases} x-y-z=-3 \\ 2x-2y+5z=1 \\ 3x-y-z=3 \end{cases}$

22 $\begin{cases} x+y-z=-1 \\ 3x+3y+2z=7 \\ 2x-y-3z=8 \end{cases}$

23 $\begin{cases} 5x+2y-z=-1 \\ 3x-y+3z=-4 \\ x+2y-3z=3 \end{cases}$

24 $\begin{cases} x+y+z=-4 \\ 3x+4y-3z=1 \\ 4x+5y-3z=-1 \end{cases}$

25 $\begin{cases} x+5y-3z=-4 \\ 3x+y-5z=10 \\ -2x-3y+z=-9 \end{cases}$

26 $\begin{cases} 3x+y+z=2 \\ 5x+3y+2z=-1 \\ x-y+4z=1 \end{cases}$

27 $\begin{cases} x+y-z=2 \\ -4x+3y-z=3 \\ 3x-2y-2z=11 \end{cases}$

28 $\begin{cases} x+y-2z=3 \\ 4x+5y+4z=-3 \\ 3x+3y-5z=8 \end{cases}$

29 $\begin{cases} x+y+z=-1 \\ 3x+4y+5z=2 \\ -4x-7y-3z=3 \end{cases}$

30 $\begin{cases} -x+y-z=-6 \\ 4x-2y-z=-1 \\ -2x+y+z=7 \end{cases}$

31 $\begin{cases} x+y+z=-2 \\ 5x+7y-4z=3 \\ 2x-2y-7z=-3 \end{cases}$

32 $\begin{cases} x+y-z=6 \\ 3x+7y+z=2 \\ -2x+2y-3z=-1 \end{cases}$

33 $\begin{cases} -x-y-z=-2 \\ 7x-4y-z=-4 \\ -5x+3y+2z=9 \end{cases}$

Практическая работа №7 «Действия над комплексными числами» (в алгебраической форме)

Цель: закрепить навыки действий над комплексными числами в алгебраической форме.

Содержание работы.

1.Внимательно изучите теоретический материал.
2.Выполните предложенное задание

Теоретические основы темы

Комплексным числом z называется выражение $z = a + bi, где\ a\ и\ b$- действительные числа, i - мнимая единица, которая определяется соотношением: $i^2 = -1; i = \sqrt{-1}$.

Число a называется действительной частью числа z, а b - мнимой частью.
Числа $z = a + bi\ и\ z = a - bi$ *называются комплексно − сопряженными.*
Два комплексных числа $z_1 = a + bi$ и $z_2 = c + di$, называются равными, если соответственно равны их действительные и мнимые части : $a = c;\ b = d$.

$z = a + bi -$ алгебраическая форма комплексного числа
$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ −тригонометрическая форма
$z = re^{i\varphi} -$ показательная форма

<u>Действия с комплексными числами в алгебраической форме.</u>

$$z_1 = a + bi \qquad\qquad z_2 = c + di$$

1. Сложение и вычитание комплексных чисел:
$$z_1 + z_2 = (a + bi) \pm (c + di) = (a \pm c) + (b \pm d)i$$
2. Произведение комплексных чисел:
$$z_1 \cdot z_2 = (a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$
3. Деление комплексных чисел:
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(a + bi)}{(c + di)} = \frac{(a + bi) \cdot (c - di)}{(c + di) \cdot (c - di)} = \frac{(a + bi) \cdot (c - di)}{c^2 + d^2}$$

Даны комплексные числа $\mathbf{z_1 = 5 + 3i}$, $\mathbf{z_2 = 7 - 4i}$

Найти
а) $\boldsymbol{z_1 + z_2}$ *б)* $\boldsymbol{z_1 - z_2}$ *в)* $\boldsymbol{z_1 \cdot z_2}$
Решение:
а) $z_1 + z_2 = (5 + 3i) + (7 - 4i) = 5 + 3i + 7 - 4i = 12 - i$
б) $z_1 - z_2 = (5 + 3i) - (7 - 4i) = 5 + 3i - 7 + 4i = -2 + 7i$
в) $z_1 \cdot z_2 = (5 + 3i) \cdot (7 - 4i) = 35 - 20i + 21i - 12i^2 = 35 + i - 12 \cdot (-1) = 35 + i + 12 = 47 + i$

Выполнить деление $\boldsymbol{\frac{3+2i}{7-5i}}$:
Решение:
$$\frac{3 + 2i}{7 - 5i} = \frac{(3 + 2i) \cdot (7 + 5i)}{(7 - 5i) \cdot (7 + 5i)} = \frac{21 + 15i + 14i + 10i^2}{49 - 25i^2} = \frac{11 + 29i}{74} = \frac{11}{74} + \frac{29}{74}$$

Каждому комплексному числу вида $z = x + iy$ можно поставить в соответствие точку *M(x;y)* на декартовой плоскости (при этом на оси *OX* располагаются вещественные числа $z = x + i0 = x$, а на оси *OY* – чисто мнимые числа $z = 0 + iy = iy$).

Модулем комплексного числа назовем длину отрезка $|OM|$ (или расстояние от начала координат до точки *M*), т.е. $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Аргументом комплексного числа ($\varphi = \mathrm{Arg}z$) назовем угол, который вектор $\overline{OM}$ образует с положительным направлением оси OX. Главное значение аргумента, которое, как правило, используется при осуществлении действий с комплексными числами, удовлетворяет условию $0 \le \varphi < 2\pi$.

Образец выполнения работы

Задание

Исходные данные:

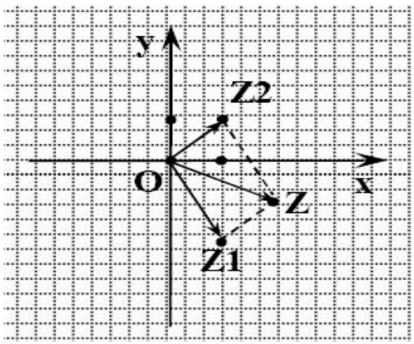
1 Даны комплексные числа $z_1 = 1 - 2i$ и $z_2 = 1 + i$. Вычислить $z = z_1 + z_2$ аналитически и графически, найти модуль и аргумент z, а также

$z_1 - z_2; \quad z_1 \cdot z_2; \quad \dfrac{z_1}{z_2}$

Решение:

а) Вычислим сумму аналитически и графически:

$$z = z_1 + z_2 = 1 - 2i + 1 + i = 2 - i$$



б) Найдем модуль z: $r = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$

в) Вычислим аргумент:

$$\cos\varphi = \frac{x}{r}; \quad \sin\varphi = \frac{y}{r} \Rightarrow tg\varphi = \frac{y}{x} = \frac{-1}{2} \Rightarrow$$
$$\varphi = -arctg\frac{1}{2}$$

г) Найдем $z_1 - z_2 = 1 - 2i - (1 + i) = 1 - 2i - 1 - i = -3i$

д) Вычислим $z_1 \cdot z_2 = (1 - 2i)(1 + i) = 1 - 2i + i - 2i^2 = 1 - i + 2 = 3 - i$

е) Найдем

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1-2i}{1+i} = \frac{(1-2i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{1-2i-i+2i^2}{1-i^2} = \frac{1-3i-2}{2} = \frac{-1-3i}{2} = -0{,}5 - 1{,}5i$$

<u>Задание для самостоятельного решения:</u>

Задание 1. Даны комплексные числа z_1 и z_2. Выполните действия: а) $z = z_1 + z_2$ аналитически и графически; б) $z_1 - z_2$; в) $z_1 \bullet z_2$; г) $z_1 : z_2$; д) найти модуль числа z; е) найти аргумент числа z.

Задание 2

Решить уравнение.

1) $x^2 + 9 = 0$; 2) $x^2 - 3x + 10 = 0$; 4) $x^2 - 2x + 10 = 0$; 5) $x^2 + 2x + 10 = 0$; 6) $x^4 - 16 = 0$ 7) $x^2 + 100 = 0$

Задания к практической работе.

1 $z_1 = 5 - i$, $z_2 = 1 + 3i$	2 $z_1 = 5 + i$, $z_2 = 1 - 2i$	3 $z_1 = 5 + 2i$, $z_2 = 2 - i$
4 $z_1 = 3 - 4i$, $z_2 = 1 + i$	5 $z_1 = 3 + i$, $z_2 = 5 - 2i$	6 $z_1 = 4 + 5i$, $z_2 = 1 - 2i$
7 $z_1 = 1 - 5i$, $z_2 = 1 + 4i$	8 $z_1 = 1 - 5i$, $z_2 = 1 + 3i$	9 $z_1 = 1 + 5i$, $z_2 = 2 - 3i$
10 $z_1 = 1 + 3i$, $z_2 = 7 - i$	11 $z_1 = 1 + 3i$, $z_2 = -2 + 5i$	12 $z_1 = -1 + 3i$, $z_2 = 6 - 5i$
13 $z_1 = 1 - i$, $z_2 = 7 + 3i$	15 $z_1 = 1 - i$, $z_2 = 5 - 4i$	16 $z_1 = 1 - 4i$, $z_2 = 1 + 2i$
17 $z_1 = 3 + 4i$, $z_2 = -2 + i$	18 $z_1 = 5 - 2i$, $z_2 = -2 + i$	19 $z_1 = -3 - 2i$, $z_2 = 4 + 3i$
20 $z_1 = -i$, $z_2 = 7 + 4i$	21 $z_1 = 7 - 2i$, $z_2 = 5 + 3i$	22 $z_1 = -5 + i$, $z_2 = 1 + 2i$
23 $z_1 = 6 - 5i$, $z_2 = 1 + i$	24 $z_1 = 7 - 3i$, $z_2 = -1 + 4i$	25 $z_1 = 7 - 2i$, $z_2 = -2 + 3i$
26 $z_1 = -1 + 5i$, $z_2 = 2 - 5i$	27 $z_1 = -2 + 3i$, $z_2 = 5 - 4i$	28 $z_1 = -3 + 5i$, $z_2 = 4 + 5i$
29 $z_1 = 5 - 7i$, $z_2 = 1 - 3i$	30 $z_1 = -3 + 2i$, $z_2 = 6 + 5i$	31 $z_1 = 5 - 2i$, $z_2 = -6 - i$
32 $z_1 = -3 - 2i$, $z_2 = -1 + 7i$	33 $z_1 = -1 + 7i$, $z_2 = 4 - 5i$	34 $z_1 = -1 + 2i$, $z_2 = 4 - 3i$

Практическое занятие № 8 «Операции над комплексными числами»

Цель: закрепить навыки выполнения действий над комплексными числами в разных формах в процессе решения задач.

Содержание работы.

1.Внимательно изучите теоретический материал.
2.Выполните предложенное задание

Теоретические основы темы

Комплексными числами называются числа вида $a+bi$, где a и b - действительные числа, а число i, определяемое равенством $i^2=-1$, называется *мнимой единицей*.

Алгебраическая форма комплексного числа $\boldsymbol{z=a+bi}$

Тригонометрическая форма комплексного числа $\mathbf{z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)}$;

Модуль комплексного числа r можно найти по формуле $r=\sqrt{a^2+b^2}$

Величину угла φ можно найти по формуле $\cos\varphi=\frac{a}{r}; \sin\varphi=\frac{b}{r}$

Показательная форма комплексного числа $\mathbf{z=re^{i\varphi}}$

Действия над комплексными числами в тригонометрической форме.

$$z_1=r_1\cdot(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1) \qquad z_2=r_2\cdot(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)$$

1. Произведение комплексных чисел:
$$z_1\cdot z_2=r_1\cdot r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2))$$
2. Деление комплексных чисел:
$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}\cdot(\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2))$$
3. Возведение в степень:
$z^n=r^n(\cos\varphi n+i\sin\varphi n)$ - формула Муавра
4. Извлечение корня $n-$*ой степени*:
$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n}+i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right)$$

Примеры и решения

№1 Решить квадратное уравнение:

$X^2-6x+13=0$

Решение: a=1, в=-6, c=13. Найдем $D=b^2-4ac$;

$D=(-6)^2-4\cdot 1\cdot 13=35-52=-16$

Корни уравнения находим по формулам $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$x_{1,2}=\frac{6\pm\sqrt{-16}}{2}=\frac{6\pm4i}{2}=3\pm2i$; *таким образом*

$x_1=3+2i \quad x_2=3-2i$

Ответ: $x_1=3+2i$; $x_2=3-2i$.

№2 Найти значения x и y из равенства (2x+3y) + (x-y)i = 7 + 6i

Решение: из условия равенства комплексных чисел следует

$$\begin{cases} 2x + 3y = 7, \\ x - y = 6 \end{cases}$$

Умножив второе уравнение на 3, и сложив результат с первым уравнением, имеем 5x=25,т.е. x=5. Подставим это значение во второе уравнение: 5 – y = 6,откуда y = -1. Итак, получаем ответ: x = 5,y = -1.

№3 Даны комплексные числа $z_1 = 5 + 3i$, $z_2 = 7 - 4i$

Найти

а) $z_1 + z_2$ б) $z_1 - z_2$ в) $z_1 \cdot z_2$

Решение:

а) $z_1 + z_2 = (5+3i) + (7-4i) = 5 + 3i + 7 - 4i = 12 - i$

б) $z_1 - z_2 = (5+3i) - (7-4i) = 5 + 3i - 7 + 4i = -2 + 7i$

в) $z_1 \cdot z_2 = (5+3i)\cdot(7-4i) = 35 - 20i + 21i - 12i^2 = 35 + i - 12\cdot(-1) = 35 + i + 12 = 47 + i$

г).

№4 Выполнить деление $\frac{3+2i}{7-5i}$:

Решение:

$$\frac{3+2i}{7-5i} = \frac{(3+2i)\cdot(7+5i)}{(7-5i)\cdot(7+5i)} = \frac{21+15i+14i+10i^2}{49-25i^2} = \frac{11+29i}{74} = \frac{11}{74} + \frac{29}{74}$$

№5 Записать число $Z = 3 - 3i\sqrt{3}$ в тригонометрической и показательной формах.

Решение: 1.Так как a=3, в=-3$\sqrt{3}$,то r=$\sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{3^2 + (-3\sqrt{3})^2} = \sqrt{9 + 9\cdot 3} = 6$

2. Геометрически определяем, что числу z соответствует точка Z, лежащая в 4 четверти

3. Составим отношения $\cos\varphi = \frac{a}{r} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}, \sin\varphi = \frac{b}{r} = \frac{-3\sqrt{3}}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.Отсюда следует, что $\varphi = 360° - 60° = 300°\, или\, \varphi = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$

4. Итак, z = 6($\cos\frac{5\pi}{3} + \sin\frac{5\pi}{3}$) - тригонометрическая форма числа

Z = $6e^{\frac{5\pi}{3}i}$ - показательная форма числа.

№6 Даны комплексные числа $z_1 = 3(\cos 330° + i\sin 330°)$

$$z_2 = 2(\cos 60° + i\sin 60°)$$

Найти:

а) $z_1 \cdot z_2$ б) z_1/z_2 в) z_2^4 г) $\sqrt[3]{z_1}$

Решение:

а) $z_1 \cdot z_2 = 2\cdot 3(\cos(330° + 60°) + i\sin(330° + 60°)) = 6(\cos 390° + i\sin 390°) = 6(\cos 30° + i\sin 30°) = 6(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}) = 3\sqrt{3} + 3i$

б) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{2}{3}(\cos(330° - 60°) + i\sin(330° - 60°)) = \frac{2}{3}(\cos 270° + i\sin 270°) = 1{,}5 \cdot \big(0 + i\cdot(-1)\big) = -1{,}5i$

в) $z_2^4 = [2(\cos 60° + i\sin 60°)]^4 = 2^4[\cos(60°\cdot 4) + i\sin(60°\cdot 4)] = 16(\cos 240° + i\sin 240°)$

Используем формулы приведения

$$\cos 240° = \cos(180° + 60°) = -\cos 60° = -\frac{1}{2}$$

$$\sin 240° = \sin(180° + 60°) = -\sin 60° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$z_2^4 = 16\left(\cos 240° + i \sin 240°) = 16(-\frac{1}{2} + i\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) = -8 - 8 \cdot \sqrt{3}i$$

г) $\sqrt[3]{z_1} = \sqrt[3]{3}\left(\cos\frac{330°+360°k}{3} + i\sin\frac{330°+360°k}{3}\right),$ *где* k *принимает значение* 0,1,2.

Если $k = 0,$ *то* $z_1^{(1)} = \sqrt[3]{3}(\cos 110° + i \sin 110°)$

Если $k = 1,$ *то* $z_1^{(2)} = \sqrt[3]{3}(\cos 230° + i \sin 230°)$

Если $k = 2,$ *то* $z_1^{(3)} = \sqrt[3]{3}(\cos 350° + i \sin 350)$

<u>Задание для самостоятельного решения:</u>

Вариант №1 1. Выполнить действия в алгебраической форме. Z1=2-7i, Z2=3+5i. Найти: Z1+Z2; Z1•Z2, Z1:Z2 2.Записать в алгебраической форме комплексное число. Z=3•(cos п:2+I•sin п:2). 3. Изобразите число на комплексной плоскости. Найдите модуль и аргумент комплексного числа. Записать в тригонометрической форме комплексное число. $Z=-\sqrt{3}+i$. 4.Решите уравнение : $x^2-8x+25=0$ 5.Возведите в степень по формуле Муавра: $(-2+i2)^9$	Вариант №2 1. Выполнить действия в алгебраической форме. Z1=3+4i, Z2=-1-2i. Найти: Z1-Z2; Z1:Z2, Z1•Z2 2.Записать в алгебраической форме комплексное число. Z=3•(cosп +i•sin п) 3. Изобразите число на комплексной плоскости. Найдите модуль и аргумент комплексного числа. Записать в тригонометрической форме комплексное число. $Z=-1+i\sqrt{3}$. 4.Решите уравнение : $2x^2+2x+5=0$ 5.Возведите в степень по формуле Муавра: $(-1+i\sqrt{3})^8$
Вариант №3 1. Выполнить действия в алгебраической форме. Z1=3-4i, Z2=2+5i. Найти: Z1+Z2; Z1•Z2, Z1:Z2. 2.Записать в алгебраической форме комплексное число. Z=3•(cos п:4+I•sin п:4). 3. Изобразите число на комплексной плоскости. Найдите модуль и аргумент комплексного числа Записать в тригонометрической форме комплексное число. $Z=-\sqrt{3}-i$. 4.Решите уравнение : $2x^2-6x+9=0$ 5.Возведите в степень по формуле Муавра: $(4+i4)^6$	Вариант №4 1. Выполнить действия в алгебраической форме. Z1=3-2i, Z2=-3+5i. Найти: Z1-Z2; Z1:Z2, Z1•Z2 2.Записать в алгебраической форме комплексное число. Z=3•(cosп:3 +i•sin п:3) 3. Изобразите число на комплексной плоскости. Найдите модуль и аргумент комплексного числа Записать в тригонометрической форме комплексное число. $Z=-1-i\sqrt{3}$. 4.Решите уравнение : $3x^2-8x+10=0$ 5.Возведите в степень по формуле Муавра: $(3-i3)^7$
Вариант №5 1. Выполнить действия в алгебраической форме. Z1=2-5i, Z2=2+4i. Найти: Z1+Z2; Z1•Z2, Z1:Z2. 2.Записать в алгебраической форме комплексное число. $Z=3•(\cos 30^0+I•\sin 30^o)$. 3. Изобразите число на комплексной плоскости. Найдите модуль и аргумент комплексного числа Записать в тригонометрической форме комплексное	Вариант №6 1. Выполнить действия в алгебраической форме. Z1=1+2i, Z2=-5-2i. Найти: Z1-Z2; Z1:Z2, Z1•Z2 2.Записать в алгебраической форме комплексное число. $Z=3•(\cos 45^o +i•\sin 45^o)$ 3. Изобразите число на комплексной плоскости. Найдите модуль и аргумент комплексного числа Записать в тригонометрической форме комплексное число.

число. $Z=\sqrt{3}-i$.

4.Решите уравнение : $x^2-6x+34=0$

5.Возведите в степень по формуле Муавра: $(2-i2)^7$

$Z=1-i\sqrt{3}$.

4.Решите уравнение : $x^2-2x+5=0$

5.Возведите в степень по формуле Муавра: $(-7+i7)^5$

Вариант №7

1. Выполнить действия в алгебраической форме.
Z1=2-6i, Z2=3+4i.
Найти: Z1+Z2; Z1•Z2, Z1:Z2 .

2.Записать в алгебраической форме комплексное число.
Z=3•(cos п:6+I•sin п:6).

3. Изобразите число на комплексной плоскости. Найдите модуль и аргумент комплексного числа Записать в тригонометрической форме комплексное число. $Z=\sqrt{3}+i$.

4.Решите уравнение : $x^2-4x+13=0$

5.Возведите в степень по формуле Муавра: $(-2-i2)^9$

Вариант №8

1. Выполнить действия в алгебраической форме.
Z1=1+2i, Z2=-1-7i.
Найти: Z1-Z2; Z1:Z2, Z1•Z2

2.Записать в алгебраической форме комплексное число.
$Z=3•(\cos 60^o+i•\sin 60^o)$

3. Изобразите число на комплексной плоскости. Найдите модуль и аргумент комплексного числа Записать в тригонометрической форме комплексное число.
$Z=1+i\sqrt{3}$.

4.Решите уравнение : $x^2-6x+25=0$

5.Возведите в степень по формуле Муавра: $(-4+i4)^3$

Вариант №9

1. Выполнить действия в алгебраической форме.
Z1=2-4i, Z2=3+2i.
Найти: Z1+Z2; Z1•Z2, Z1:Z2 .

2.Записать в алгебраической форме комплексное число.
Z=4•(cos 0+i•sin 0).

3. Изобразите число на комплексной плоскости. Найдите модуль и аргумент комплексного числа Записать в тригонометрической форме комплексное число. $Z=-\sqrt{3}+i\sqrt{3}$.

4.Решите уравнение : $x^2-4x+7=0$

5.Возведите в степень по фор. Муавра: $(7-i7)^9$

Вариант №10

1. Выполнить действия в алгебраической форме.
Z1=1-2i, Z2=-1-3i.
Найти: Z1-Z2; Z1:Z2, Z1•Z2

2.Записать в алгебраической форме комплексное число.
$Z=5•(\cos 60^o+i•\sin 60^o)$

3. Изобразите число на комплексной плоскости. Найдите модуль и аргумент комплексного числа Записать в тригонометрической форме комплексное число.
$Z=\sqrt{3}+i\sqrt{3}$.

4.Решите уравнение : $2x^2+2x+5=0$

5.Возведите в степень по формуле Муавра: $(-2+i2)^3$

Вариант №11

1. Выполнить действия в алгебраической форме.
Z1=1+7i, Z2=2+2i.
Найти: Z1+Z2; Z1•Z2, Z1:Z2

2.Записать в алгебраической форме комплексное число.
Z=7•(cos п:2+I•sin п:2).

3. Изобразите число на комплексной плоскости. Найдите модуль и аргумент комплексного числа Записать в тригонометрической форме комплексное число. $Z=-\sqrt{3}+2i$.

4.Решите уравнение : $x^2-8x+20=0$

5.Возведите в степень по формуле Муавра: $(-2+i2)^3$

Вариант №12

1. Выполнить действия в алгебраической форме.
Z1=3+i, Z2=-1-2i.
Найти: Z1-Z2; Z1:Z2, Z1•Z2

2.Записать в алгебраической форме комплексное число.
Z=2•(cosп +i•sin п)

3. Изобразите число на комплексной плоскости. Найдите модуль и аргумент комплексного числа Записать в тригонометрической форме комплексное число.
$Z=-9+i9\sqrt{3}$.

4.Решите уравнение : $2x^2+2x+1{,}5=0$

5.Возведите в степень по формуле Муавра: $(-1+i\sqrt{3})^4$

Вариант №13

1. Выполнить действия в алгебраической форме.
Z1=1-4i, Z2=-2+5i.
Найти: Z1+Z2; Z1·Z2, Z1:Z2.

2.Записать в алгебраической форме комплексное число.
Z=4•(cos п:4+I•sin п:4).

3. Изобразите число на комплексной плоскости. Найдите модуль и аргумент комплексного числа Записать в тригонометрической форме комплексное число. $Z=-3\sqrt{3}-3i$.

4.Решите уравнение : $2x^2-6x+7=0$

5.Возведите в степень по формуле Муавра: $(4+i4)^5$

Вариант №14

1. Выполнить действия в алгебраической форме.
Z1=3+2i, Z2=-3+2i.
Найти: Z1-Z2; Z1:Z2, Z1•Z2

2.Записать в алгебраической форме комплексное число.
Z=6•(cosп:3 +i•sin п:3)

3. Изобразите число на комплексной плоскости. Найдите модуль и аргумент комплексного числа Записать в тригонометрической форме комплексное число.
$Z=-2-i2\sqrt{3}$.

4.Решите уравнение : $2x^2-8x+11=0$

5.Возведите в степень по формуле Муавра: $(3-i3)^5$

Вариант №15

1. Выполнить действия в алгебраической форме.
$Z1=3-5i$, $Z2=2+4i$.
Найти: $Z1+Z2$; $Z1 \cdot Z2$, $Z1:Z2$.

2.Записать в алгебраической форме комплексное число.
$Z=4\cdot(\cos 135^0+I\cdot\sin 30^o)$.

3. Изобразите число на комплексной плоскости. Найдите модуль и аргумент комплексного числа Записать в тригонометрической форме комплексное число. $Z=\sqrt{3}-i$.

4.Решите уравнение : $x^2-6x+34=0$

5.Возведите в степень по формуле Муавра: $(2-i2)^7$

Вариант №16

1. Выполнить действия в алгебраической форме.
$Z1=-1+3i$, $Z2=-5-3i$.
Найти: $Z1-Z2$; $Z1:Z2$, $Z1 \cdot Z2$

2.Записать в алгебраической форме комплексное число.
$Z=3\cdot(\cos 45^o+i\cdot\sin 45^o)$

3. Изобразите число на комплексной плоскости. Найдите модуль и аргумент комплексного числа Записать в тригонометрической форме комплексное число.
$Z=1-i\sqrt{3}$.

4.Решите уравнение : $x^2-2x+5=0$

5.Возведите в степень по формуле Муавра: $(-7+i7)^5$

Вариант №17

1. Выполнить действия в алгебраической форме.
$Z1=2-6i$, $Z2=3+4i$.
Найти: $Z1+Z2$; $Z1 \cdot Z2$, $Z1:Z2$.

2.Записать в алгебраической форме комплексное число.
$Z=3\cdot(\cos п:6+I\cdot\sin п:6)$.

3. Изобразите число на комплексной плоскости. Найдите модуль и аргумент комплексного числа Записать в тригонометрической форме комплексное число. $Z=3\sqrt{3}+3i$.

4.Решите уравнение : $x^2-4x+13=0$

5.Возведите в степень по формуле Муавра: $(-2-i2)^6$

Вариант №18

1. Выполнить действия в алгебраической форме.
$Z1=1+2i$, $Z2=-1-7i$.
Найти: $Z1-Z2$; $Z1:Z2$, $Z1 \cdot Z2$

2.Записать в алгебраической форме комплексное число.
$Z=3\cdot(\cos 60^o+i\cdot\sin 60^o)$

3. Изобразите число на комплексной плоскости. Найдите модуль и аргумент комплексного числа Записать в тригонометрической форме комплексное число.
$Z=2+i2\sqrt{3}$.

4.Решите уравнение : $x^2-6x+24=0$

5.Возведите в степень по формуле Муавра: $(-4+i4)^4$

Вариант №19

1. Выполнить действия в алгебраической форме.
$Z1=1-4i$, $Z2=3+4i$.
Найти: $Z1+Z2$; $Z1 \cdot Z2$, $Z1:Z2$.

2.Записать в алгебраической форме комплексное число.
$Z=4\cdot(\cos 180^o+i\cdot\sin 180^o)$.

3. Изобразите число на комплексной плоскости. Найдите модуль и аргумент комплексного числа Записать в тригонометрической форме комплексное число. $Z=-2\sqrt{3}+i2\sqrt{3}$.

4.Решите уравнение : $2x^2-4x+7=0$

5.Возведите в степень по фор. Муавра: $(1-i4)^5$

Вариант №20

1. Выполнить действия в алгебраической форме.
$Z1=-1-2i$, $Z2=2-3i$.
Найти: $Z1-Z2$; $Z1:Z2$, $Z1 \cdot Z2$

2.Записать в алгебраической форме комплексное число.
$Z=5\cdot(\cos 270^o+i\cdot\sin 270^o)$

3. Изобразите число на комплексной плоскости. Найдите модуль и аргумент комплексного числа Записать в тригонометрической форме комплексное число.
$Z=3\sqrt{3}+i3\sqrt{3}$.

4.Решите уравнение : $x^2-3x+5=0$

5.Возведите в степень по формуле Муавра: $(-2+i2)^3$

Вариант №21

1. Выполнить действия в алгебраической форме.
$Z1=2-i$, $Z2=3-5i$.
Найти: $Z1+Z2$; $Z1 \cdot Z2$, $Z1:Z2$

2.Записать в алгебраической форме комплексное число.
$Z=3\cdot(\cos 360^o+I\cdot\sin 360^o)$.

3. Изобразите число на комплексной плоскости. Найдите модуль и аргумент комплексного числа Записать в тригонометрической форме комплексное число. $Z=-2\sqrt{3}+2i$.

4.Решите уравнение : $x^2-8x+25=0$

5.Возведите в степень по формуле Муавра: $(-2+i2)^5$

Вариант №22

1. Выполнить действия в алгебраической форме.
$Z1=3+4i$, $Z2=-1+2i$.
Найти: $Z1-Z2$; $Z1:Z2$, $Z1 \cdot Z2$

2.Записать в алгебраической форме комплексное число.
$Z=3\cdot(\cos п+i\cdot\sin п)$

3. Изобразите число на комплексной плоскости. Найдите модуль и аргумент комплексного числа Записать в тригонометрической форме комплексное число.
$Z=-4+i4\sqrt{3}$.

4.Решите уравнение : $x^2+2x+3=0$

5.Возведите в степень по формуле Муавра: $(-1+i\sqrt{3})^6$

Вариант №23

1. Выполнить действия в алгебраической форме.
$Z1=3-i$, $Z2=2+5i$.
Найти: $Z1+Z2$; $Z1 \cdot Z2$, $Z1:Z2$.

2.Записать в алгебраической форме комплексное число.
$Z=3\cdot(\cos 45^o+I\cdot\sin 45^o)$.

Вариант №24

1. Выполнить действия в алгебраической форме.
$Z1=3+2i$, $Z2=-3+i$.
Найти: $Z1-Z2$; $Z1:Z2$, $Z1 \cdot Z2$

2.Записать в алгебраической форме комплексное число.
$Z=3\cdot(\cos 120^o+i\cdot\sin 120^o)$

3. Изобразите число на комплексной плоскости. Найдите модуль и аргумент комплексного числа Записать в тригонометрической форме комплексное число. $Z=-2-i$.
4.Решите уравнение : $2x^2-6x+8=0$
5.Возведите в степень по формуле Муавра: $(1+i2)^4$

3. Изобразите число на комплексной плоскости. Найдите модуль и аргумент комплексного числа Записать в тригонометрической форме комплексное число. $Z=-1-i2$.
4.Решите уравнение : $2x^2-8x+10=0$
5.Возведите в степень по формуле Муавра: $(1-i3)^5$

Вариант №25
1. Выполнить действия в алгебраической форме.
$Z1=2-3i$, $Z2=1+4i$.
Найти: Z1+Z2; Z1•Z2, Z1:Z2.

2.Записать в алгебраической форме комплексное число.
$Z=2\cdot(\cos 270^0+I\cdot\sin 270^o)$.

3. Изобразите число на комплексной плоскости. Найдите модуль и аргумент комплексного числа Записать в тригонометрической форме комплексное число. $Z=3-i$.
4.Решите уравнение : $x^2-6x+34=0$
5.Возведите в степень по формуле Муавра:
$(2-i2)^7$

Вариант №26
1. Выполнить действия в алгебраической форме.
$Z1=1+2i$, $Z2=-2-2i$.
Найти: Z1-Z2; Z1:Z2, Z1•Z2

2.Записать в алгебраической форме комплексное число.
$Z=2\cdot(\cos 315^o+i\cdot\sin 315^o)$

3. Изобразите число на комплексной плоскости. Найдите модуль и аргумент комплексного числа Записать в тригонометрической форме комплексное число. $Z=1-2i$.
4.Решите уравнение : $x^2-2x+15=0$
5.Возведите в степень по формуле Муавра:
$(1+i2)^5$

Вариант №27
1. Выполнить действия в алгебраической форме.
$Z1=2-5i$, $Z2=2+4i$.
Найти: Z1+Z2; Z1•Z2, Z1:Z2 .
2.Записать в алгебраической форме комплексное число.
$Z=3\cdot(\cos 90^o+I\cdot\sin 90^o)$.
3. Изобразите число на комплексной плоскости. Найдите модуль и аргумент комплексного числа Записать в тригонометрической форме комплексное число. $Z=4+2i$.
4.Решите уравнение : $x^2-4x+9=0$
5.Возведите в степень по формуле Муавра: $(-2-i4)^5$

Вариант №28
1. Выполнить действия в алгебраической форме.
$Z1=1+2i$, $Z2=-1-4i$.
Найти: Z1-Z2; Z1:Z2, Z1•Z2
2.Записать в алгебраической форме комплексное число.
$Z=7\cdot(\cos 60^o+i\cdot\sin 60^o)$
3. Изобразите число на комплексной плоскости. Найдите модуль и аргумент комплексного числа Записать в тригонометрической форме комплексное число. $Z=2-i2$.
4.Решите уравнение : $x^2-6x+18=0$
5.Возведите в степень по формуле Муавра: $(-3+i6)^3$

Вариант №29
1. Выполнить действия в алгебраической форме.
$Z1=2-5i$, $Z2=3+i$.
Найти: Z1+Z2; Z1•Z2, Z1:Z2 .
2.Записать в алгебраической форме комплексное число.
$Z=10\cdot(\cos 0+i\cdot\sin 0)$.
3. Изобразите число на комплексной плоскости. Найдите модуль и аргумент комплексного числа Записать в тригонометрической форме комплексное число. $Z=-1+i4$.
4.Решите уравнение : $x^2-4x+7=0$
5.Возведите в степень по фор. Муавра: $(4-i2)^5$

Вариант №30
1. Выполнить действия в алгебраической форме.
$Z1=1-2i$, $Z2=-1-5i$.
Найти: Z1-Z2; Z1:Z2, Z1•Z2
2.Записать в алгебраической форме комплексное число.
$Z=7\cdot(\cos 60^o+i\cdot\sin 60^o)$
3. Изобразите число на комплексной плоскости. Найдите модуль и аргумент комплексного числа Записать в тригонометрической форме комплексное число.
$Z=2+i\sqrt{3}$.
4.Решите уравнение : $x^2+2x+5=0$
5.Возведите в степень по формуле Муавра: $(-2+i2)^3$

Вариант №31
1. Выполнить действия в алгебраической форме.
$Z1=2-4i$, $Z2=-3+5i$.
Найти: Z1+Z2; Z1•Z2, Z1:Z2
2.Записать в алгебраической форме комплексное число.
$Z=2\cdot(\cos 360^o+I\cdot\sin 360^o)$.
3. Изобразите число на комплексной плоскости. Найдите модуль и аргумент комплексного числа Записать в тригонометрической форме комплексное число. $Z=-2+2i$.
4.Решите уравнение : $x^2-5x+25=0$
5.Возведите в степень по формуле Муавра: $(-2+i2)^3$

Вариант №32
1. Выполнить действия в алгебраической форме.
$Z1=3+i$, $Z2=-3-2i$.
Найти: Z1-Z2; Z1:Z2, Z1•Z2
2.Записать в алгебраической форме комплексное число.
$Z=9\cdot(\cos\pi+i\cdot\sin\pi)$
3. Изобразите число на комплексной плоскости. Найдите модуль и аргумент комплексного числа Записать в тригонометрической форме комплексное число. $Z=-3+i3$.

4.Решите уравнение : $2x^2+x+5=0$
5.Возведите в степень по формуле Муавра: $(-1+i4)^4$

Вариант №33 1. Выполнить действия в алгебраической форме. Z1=3-i, Z2=-2+5i. Найти: Z1+Z2; Z1•Z2, Z1:Z2. 2.Записать в алгебраической форме комплексное число. Z=(cos п:4+I•sin п:4). 3. Изобразите число на комплексной плоскости. Найдите модуль и аргумент комплексного числа Записать в тригонометрической форме комплексное число. Z=-3-i. 4.Решите уравнение : $2x^2-6x+7=0$ 5.Возведите в степень по формуле Муавра: $(4+i4)^3$	

Практическая работа №9 «Простейшие задачи на определение вероятностей»

Цель: сформировать умение решать задачи на нахождение вероятностей

Содержание работы.

1.Внимательно изучите теоретический материал.
2.Выполните предложенное задание

Теоретические основы темы

Раздел математики, изучающий закономерности случайных событий, называется теорией вероятностей.

Вероятностью P(A) события A в испытании с равновозможными элементарными исходами называют отношение числа исходов m, благоприятствующих событию A, к числу n всех исходов испытания.

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

Пример 1: В партии из 30 миксеров 2 бракованных. Найти вероятность купить исправный миксер.

$$n = 30, m = 30 - 2 = 28$$
$$P = \frac{28}{30} = \frac{14}{15}$$

Свойства вероятностей:
Вероятность невозможного события равна нулю P=0.
Вероятность достоверного события равна единице P=1.
Вероятность произвольного случайного события A заключается между 0 и 1: 0<P(A)<1.

Пример 2: Из 34 экзаменационных билетов, пронумерованных с помощью чисел от 1 до 34, наудачу извлекается один. Какова вероятность, что номер вытянутого билета есть число, кратное трем.

Решение: Найдем количество чисел от 1 до 34, кратных трем. Это числа 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33. Всего таких чисел 11. Таким образом, искомая вероятность $p = \frac{11}{34}$

События А и В называются совместными, если они могут одновременно произойти, и несовместными, если при осуществлении одного события не может произойти другое.

События А и В называются независимыми, если вероятность наступления одного события не зависит от того, произошло другое событие или нет.

Вероятность суммы двух совместных событий равна сумме вероятностей слагаемых без вероятности произведения: P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)

Пример 3: Вероятность поражения одной мишени – 0,7, а другой – 0,8. Какова вероятность, что будет поражена хотя бы одна мишень, если по ним стреляют независимо друг от друга.

Решение: Т.к. события совместны, то $p = 0,7 + 0,8 - 0,7 \cdot 0,8 = 1,5 - 0,56 = 0,94$

Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей слагаемых: P(A+B)=P(A)+P(B).

$$P(A)+P(\overline{A})=1$$

Условная вероятность – вероятность одного события, при условии, что другое событие уже произошло.

Вероятность произведения событий А и В равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого: P(AB)=P(A)·P(A/B) или P(BA)=P(A)·P(B/A)

Вероятность произведения двух независимых событий А и В равна произведению вероятностей сомножителей: P(AB)=P(A)·P(B).

Пример 4: В двух коробках лежат ручки разного цвета. В первой коробке – 4 красных и 6 черных, во второй – 3 красных, 5 синих и 2 черных. Из обеих коробок вынимают по одной ручки. Найти вероятность, что обе ручки красные.

Решение: Найдем вероятности вытащить красную ручку из каждой коробки

$$n_1 = 10$$
$$m_1 = 4$$
$$p_1 = \frac{4}{10}$$
$$n_2 = 10$$
$$m_2 = 3$$
$$p_2 = \frac{3}{10}$$

Тогда вероятность того, что обе ручки красные: $p = p_1 \cdot p_2 = \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{10} = \frac{12}{100} = 0,12$

<u>Задание для самостоятельного решения:</u>

Решите задачи

Задача 1.

В лотерее из 1000 билетов имеются 200 выигрышных. Вынимают наугад один билет. Чему равна вероятность того, что этот билет выигрышный?

Задача 2.
Из урны, в которой находятся 5 белых и 3 черных шара, вынимают один шар. Найти вероятность того, что шар окажется черным.

Задача 3.
Из урны, в которой находятся 12 белых и 8 черных шаров, вынимают наудачу два шара. Какова вероятность того, что оба шара окажутся черными?

Задача 4.
В ящике в случайном порядке разложены 20 деталей, причем 5 из них стандартные. Рабочий берет наудачу 3 детали. Найти вероятность того, что по крайней мере одна из взятых деталей окажется стандартной.

Задача 5.
Найти вероятность того, что наудачу взятое двухзначное число окажется кратным либо 3, либо 5, либо тому и другому одновременно

Задача 6.
В одной урне находятся 4 белых и 8 черных шаров, в другой – 3 белых и 9 черных. Из каждой урны вынули по шару. Найти вероятность того, что оба шара окажутся белыми.

Задача 7.
В ящике находится 12 деталей, из которых 8 стандартных. Рабочий берет наудачу одну за другой две детали. Найти вероятность того, что обе детали окажутся стандартными.

Практическая работа №10 «Формулы прямоугольника, трапеции и Симпсона»

Цель: Закрепить навыки приближенного вычисления определенного интеграла. Научить применять на практике формулы прямоугольников, трапеции, формулу параболических трапеций (формулу Симпсона).

Содержание работы.

1.Внимательно изучите теоретический материал.
2.Выполните предложенное задание

Теоретические основы темы

Формулы прямоугольников:

$$\int_a^b y\,dx \approx \frac{b-a}{n}(y_0+y_1+y_2+\ldots+y_{n-1}); \qquad (12.1)$$

$$\int_a^b y\,dx \approx \frac{b-a}{n}(y_1+y_2+y_3+\ldots+y_n). \qquad (12.2)$$

Формула трапеций:

$$\int_a^b y\,dx \approx \frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0+y_n}{2}+y_1+y_2+\ldots+y_{n-1}\right).$$

Формула параболических трапеций (формула Симпсона):

$$\int_a^b y\,dx \approx \frac{b-a}{6n}\left[y_0+y_{2n}+4(y_1+y_3+\ldots+y_{2n-1})+2(y_2+y_4+\ldots+y_{2n-2})\right].$$

33. Вычислить по формуле Симпсона $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$, **приняв** $n=2$.

○ Имеем

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}=\frac{1-0}{6\cdot 2}\left[y_0+y_4+4(y_1+y_3)+2y_2\right].$$

Так как $y=f(x)=1/(1+x^2)$, $y_0=f(0)=1$, $y_1=f(1/4)=16/17$, $y_2=f(1/2)=4/5$, $y_3=f(3/4)=16/25$, $y_4=f(1)=1/2$, то

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \approx \frac{1}{12}\left[1+\frac{1}{2}+4\left(\frac{16}{17}+\frac{16}{25}\right)+2\cdot\frac{4}{5}\right]=0{,}78539.$$

Точное значение интеграла есть $\pi/4=0{,}78540$; относительная погрешность $\varepsilon=0{,}00127\%$. ●

34. Вычислите приближенно определенные интегралы:

1) $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x}$ по формуле прямоугольников (12.1) $(n=10)$;

2) $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x}$ по формуле трапеций $(n=10)$;

3) $\int\limits_0^{\pi/2} x\sin x\,dx$ по формуле прямоугольников (12.2) $(n=12)$;

4) $\int\limits_{\pi/12}^{\pi/3} \frac{\sin x}{x}dx$ по формуле трапеций $(n=6)$;

5) $\int\limits_{\pi/12}^{\pi/3} \frac{\sin x}{x}dx$ по формуле Симпсона $(2n=6)$.

Список рекомендуемой литературы:

1. Богомолов Н.В. Практические занятия по математике. - М.: издательство Юрайт, 2016. - 495 с.

2. Богомолов Н.В. Математика – М: издательство Юрайт, 2016. - 396 с.

3. Матыцина Т.Н. Линейная алгебра: учебно-методическое пособие [Электронный ресурс] / Матыцина Т. Н., Коржевина Е. К. - КГУ им. Н. А. Некрасова, 2014. (Университетская библиотека)

Информационные ресурсы

1. http://mathem.hl/ru/
2. http://math.child.ru/
3. http://zadachi.mccme.ru/
4. http://mschool.kubsu.ru/
   http://sumik.open-edu.ru/SUMIK/e-SUMIK-Matematika.index.HTM