МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Бузулукский гуманитарно-технологический институт (филиал)
федерального государственного бюджетного образовательного учреждения
высшего профессионального образования
«Оренбургский государственный университет»

Кафедра физики, информатики, математики

Степунина О.А.

«Дискретная математика»

Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

Направление подготовки
Педагогическое образование__
(код и наименование направления подготовки)

Профиль подготовки
Информатика
(наименование профиля подготовки)

Квалификация выпускника
бакалавр

Год набора 2015

УДК 510.6
ББК 22.12я73
С 79

Степунина О.А.
Дискретная математика: Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины / О.А. Степунина. – Бузулук: БГТИ (филиал) ОГУ, 2015 – 99 с.

Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины «Дискретная математика» предназначены для студентов, обучающихся в высших учебных заведениях по направлению подготовки 44.03.01 Педагогическое образование (профиль Информатика).

УДК 510.6
ББК 22.12я73
С 79

Содержание

Пояснительная записка

Дисциплина «Дискретная математика» относится к обязательным дисциплинам вариативной части блока 1 .

Данная дисциплина является теоретической базой для изучения дисциплины Технология разработки программного обеспечения. Знание отдельных вопросов и разделов данного курса также необходимы при изучении таких дисциплин, как Теория алгоритмов, Конечные автоматы и логические сети, Основы искусственного интеллекта, Интеллектуальные информационные системы и сети.

Поэтому главной целью данной дисциплины является овладение студентами теоретическими знаниями в области формализации средствами математического языка булевых алгебр, графов, комбинаторных операций.

1. Виды аудиторной и внеаудиторной самостоятельной работы студентов по дисциплине

Общая трудоемкость дисциплины составляет 4 зачетных единицы (144 академических часа).

Аудиторная работа предусматривает 4 часа лекционных занятий, 6 часов практических занятий.

Промежуточная аттестация проводится в форме зачета.

На самостоятельную работу отводится 97,5 часа. Самостоятельная работа предусматривает самостоятельное изучение вопросов по разделам, самоподготовку к практическим занятиям и зачету.

Контроль результатов самостоятельной работы проходит в письменной форме с представлением обучающимися отчетов о своей деятельности в виде контрольной работы.

Аттестация по дисциплине проходит в форме зачета.

2. Методические рекомендации студентам

2.1 Методические рекомендации по изучению теоретических основ дисциплины

Лекция одна из важных и основных форм обучения и разновидностей информации. Лекция закладывает основы научных знаний, подводит теоретическую базу под изучаемую науку, знакомит студентов с методологией исследования, служит отправным пунктом и указывает направления работы по всем остальным формам и методам учебных занятий. Лекция является экономным по времени способом сообщения значительного объема информации, не умоляя значения других источников учебной информации. Следует заметить, что у лектора есть возможность постоянно улучшать и обновлять содержание лекций. Это делает «живую лекцию» весьма полезной и незаменимой в учебном процессе.

Так, например, в отличие от учебника лекция:

- дает непосредственное общение с лектором;
- представляет разные точки зрения;
- концентрирует внимание обучающихся на наиболее сложных узловых вопросах учебного курса;
- не перезагружена большим объемом справочной и статистической информации, фактическим материалом;
- способствует установлению живой связи студентов с наукой.

Усвоение учебной информации на лекции принципиально важно для последующего усвоения материала. Поэтому для студента очень важно научиться культуре ведения лекционных записей. Конспект лекций полезен тогда, когда изначально ориентирован на одновременную со слушанием лекции мыслительную переработку материала, на выделение и фиксацию в тезисной, аргументированной форме главного содержания лекции.

РЕКОМЕНДАЦИИ ПО РАБОТЕ НА ЛЕКЦИОННЫХ ЗАНЯТИЯХ

1. Обратить внимание на то, как строится лекция. Она состоит, в основном из:
- вводной части, в которой актуализируется сущность вопроса, идет подготовка к восприятию основного учебного материала;
- основной части, где излагается суть рассматриваемой проблемы;
- заключения, где делаются выводы и даются рекомендации, практические советы.

2. Настроиться на лекцию. Настрой предполагает подготовку, которую рекомендует преподаватель. Например, самостоятельно найти ответ на вопрос домашнего задания, читая раздел рекомендуемого литературного источника и выявить суть рассматриваемых положений. Благодаря такой подготовке возникнут вопросы, которые можно будет выяснить на лекции. Кроме того, соответствующая подготовка к лекции облегчает усвоение нового материала, заранее ориентируя на узловые моменты изучаемой темы. Важна и самоподготовка к лекции через стимулирование чувства интереса, желания узнать новое.

3. Всегда записывайте название и номер лекции. Если лектор говорит план лекции и её каркас, то также стоит записать.

4. Каждый студент должен иметь тетрадь для записей лекций, ручку и набор фломастеров, с помощью которых он фиксирует основные положения лекции и делает схемы. В тетради для записей лекции рекомендуется выделить поля, где можно делать различные пометки в виде вопросов, дополнительного материала, формулировать содержание неизвестных понятий и т.п. Работая над текстом конспекта лекции после занятия, поля можно использовать для уточнения и иллюстрации лекционных записей.

5. Отключить до начала лекции мобильный телефон (или поставить его в бесшумный режим), чтобы случайный звонок не отвлекал преподавателя и других студентов.

6. Слушать лекцию внимательно и сосредоточенно. Не отвлекаться. Ваше внимание должно быть устойчивым. В противном случае есть риск не усвоить именно главные положения темы, оставить за кадром вопросы, которые осложнять учебу в дальнейшем.

7. Если Вы в чем-то не согласны (или не понимаете) с преподавателем, то совсем не обязательно тут же перебивать его и, тем более, высказывать свои представления, даже если они и кажутся Вам верными. Перебивание преподавателя на полуслове – это верный признак невоспитанности. А вопросы следует задавать либо после занятий (для этого их надо кратко записать, чтобы не забыть), либо выбрав момент, когда преподаватель сделал хотя бы небольшую паузу, и обязательно извинившись.

8. Помнить, что лекцию лучше конспектировать, независимо есть тема в учебнике или ее нет. Научитесь правильно составлять конспект лекции.

Конспектирование — сложный и своеобразный вид учебной деятельности. В нем сочетаются процессы восприятия устной речи, переработки услышанного, записи информации и массовой коммуникации. И эти процессы не являются механическими.

Первый этап работы на лекции – аудирование, т.е. прослушивание и восприятие речи. Известным специалистом по высшей нервной деятельности человека Н.П.Бехтеревой было установлено, что головной мозг в каждый отдельный момент может быть занят только одной вполне определенной деятельностью. *Вот почему наиболее полное восприятие лекционной речи возможно при максимальной сосредоточенности.* Разговоры и посторонние занятия во время лекции снижают ваше внимание и качество восприятия информации. *Переспрашивание у соседа отвлекает как ваше внимание от восприятия речи лектора, так и внимание соседа и мешает ему воспринимать информацию.*

Второй этап работы на лекции — анализ и переформулировка текста. Важно знать, что *осознание сказанного происходит в промежутках между произнесенными слова-*

ми, т.е. тогда, когда мозг не занят восприятием информации. Паузы, которые делает лектор, предназначаются для осмысления сообщенного, поэтому не пытайтесь в этот момент общаться с соседями.

Воспринятые сведения подвергаются в головном мозге анализу. Мозг сопоставляет услышанную информацию с той, которая хранится в личном банке памяти.

Затем внимание переключается на переработку текста. Ваш мозг старается отбросить ненужную для него информацию и сократить ее объем. Происходит переформулировка мысли заново и ее сворачивание, В этот момент осуществляется внутреннее проговаривание — вы формулируете собственную мысль вслед за лекторской. Если в вашем банке памяти нет информации, сопоставимой с той, которую вы слышите на лекции, то вам приходится заимствовать ее из речи лектора целиком без переработки.

Во время микропауз, возникающих между словами при внутреннем проговаривании, вы вновь воспринимаете произнесенные лектором слова и сохраняете их в кратковременной памяти.

Таким образом, процессы второго этапа наиболее сложные и важные, для их осуществления отведены незначительные промежутки времени, они должны произойти в определенной последовательности. Но обратите внимание, что с некоторого момента на них накладываются процессы первого этапа – прослушивание и прием новой информации, их надо осуществить тогда, когда мозг не работает – в промежутках между внутренней речью. Значит, на лекции два говорящих: вслух – лектор и «про себя» – конспектирующий. Их речи должны постоянно сопрягаться. При этом мозг слушающего находится в состоянии чрезвычайной нагрузки.

Третий этап работы на лекции – процесс записи переформулированного текста. В ходе мыслительной переработки ваш мозг выбирает способ записи преобразованной информации (план, опорные слова или фразы, подробная запись, граф-схема). Если в вашем арсенале памяти нет алгоритмов составления планов или создания граф-схем, то вы вынуждены записывать мысль полностью.

Однако это вовсе не означает, что вы фиксируете все слова целиком. Большинство из вас прибегает к сокращению слов. Причем каждый сокращает одни и те же слова по-своему. Тем не менее, существуют общепринятые приемы сокращения слов, которые основаны на правилах русского языка.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ЧУЖОГО КОНСПЕКТА – МАЛОЭФФЕКТИВНОЕ ЗАНЯТИЕ.

Теперь уже понятно, что конспект является результатом сложного аналитико-синтетического процесса – приема, переработки и записи лекторской речи. Мы по-разному записываем известную ранее информацию и совершенно новую для нас: наиболее новую информацию мы записываем подробнее, а уже известную – более кратко. В любом случае мы стремимся записать информацию таким образом, чтобы она составляла единое целое с информацией в нашем банке памяти. Однако не исключено, что новые сведения могут восприниматься и перерабатываться нами неверно из-за непонимания сказанного или недостатка времени. Делая запись в тетради, мы используем собственные приемы сокращений и принципы свертывания информации. Информация может быть свернута до опорных слов, плана, граф-схем или иным способом.

Одноклассник, заимствующий ваш конспект, воспринимает его как незнакомый письменный текст, так как банк памяти и уровень знаний у вас несколько отличаются. Воспользовавшись чужим конспектом, читающий не всегда может полноценно развернуть информацию, обнаружить лишние или недостающие сведения, восстановить целостность изложения и логическую канву лекции. Чужие сокращения трудно расшифровываются, а подчас расшифровываются неверно.

Вот почему конспект, составленный другим человеком, приносит мало пользы.

СОВЕТЫ ПО КОНСПЕКТИРОВАНИЮ ЛЕКЦИЙ

Заимствуйте слова и словосочетания, употребляемые лектором.

Не пытайтесь заменять профессиональные слова и словосочетания синонимами. Точное употребление терминов важно для передачи истинности мысли. Каждый термин, используемый в дисциплине «Основы математической обработки информации» имеет конкретное, точное значение и подмена его синонимом приводит к потере смысла, или непониманию его назначения в дисциплине.

В то же время, не старайтесь писать все дословно: записывать все высказывания просто не имеет смысла: важно уловить главную мысль и основные факты. Записывая основное, формулируйте мысли кратко и своими словами, подкрепляйте примерами или фактами, которые приводит лектор (иногда для этого достаточно несколько ключевых слов).

Чем больше вы учите наизусть, тем сильнее становится ваша память. Чем сильнее ваша память, тем больше вы будете улавливать на слух при прослушивании лекций и меньше нуждаться в громоздких записях.

Готовясь к лекции, заранее выписывайте опорные слова и словосочетания из учебника. Чтобы на лекции быстро записывать термины, слова и словосочетания, полезно осуществлять просмотровое чтение соответствующих параграфов учебника. Если вы выпишите слова и словосочетания, выделенные в тексте учебника курсивом или вразрядку, это облегчит и ускорит процесс конспектирования.

Сворачивайте ранее известную информацию. Если на лекции излагается известная вам информация, это не означает, что ее не нужно фиксировать. Чтобы сохранить логику изложения лекции, запишите ее в кратком виде (граф-схеме, опорном словосочетании или иначе). В этот момент наступает психическая и физиологическая разрядка в чрезвычайно напряженном ритме конспектирования.

Научившись сворачивать знакомую информацию, постепенно переносите этот навык для фиксации новой информации.

Формулировки законов, правил, гипотез, положения теорий, выводы формул записывайте на лекции полностью.

Пользуйтесь приемом составления граф-схемы. Они очень помогают зрительно освоить материал. Вместо текстовой записи фрагмент лекции может быть зафиксирован в виде граф-схемы.

Делайте соответствующие смысловые выделения значимых мыслей. Определите для себя соответствующие обозначения. Например: «!» - важно; «?» - проверить, уточнить и др.

Оставляйте широкие поля в тетради, которые можно использовать для уточняющих записей, комментариев, дополнений и др.; выделяйте разделы, подразделы темы и подтемы.

Учитесь составлять планы. Прибегать к записи лекции в форме плана разумно только в тех ситуациях, когда излагаемая информация хорошо вам знакома. Важно зафиксировать основное содержание в логической последовательности. Как правило, в виде плана конспектируют не всю лекцию, а лишь ее отдельные фрагменты. Для составления планов на лекции требуется умение качественно и быстро перерабатывать информацию, а также навык скорописи.

Учитесь самостоятельно формулировать фразы. Имейте в виду: самостоятельно сформулированная фраза запоминается лучше, чем фраза, записанная под диктовку. Вначале полезно упражняться в изменении печатного текста. Такие упражнения помогают быстро выявлять главное, подбирать синонимы, сохранять профессиональные словосочетания и термины, сокращать фразы. Умение перерабатывать текст формируется также при использовании приемов усваивающего чтения.

Развивайте скоропись. На первых лекциях при конспектировании, как правило, возникает проблема скоростной записи. Необходимо знать, что скорость письма зависит от тренированности мышц, участвующих в микродвижениях. Тренируя специальными упражнениями мускулатуру руки, необходимо также добиваться автоматизма правильного написания слов. Это означает, что вы не должны отвлекать свое внимание на раздумья, как правильно написать то или иное слово. Многократно прописывая специальные термины, а также слова, которые у вас вызывают замедление темпа конспектирования, вы достигнете автоматизма написания слов и разовьете скоропись.

Учитесь сокращать слова. Сокращение слов – один из эффективных способов увеличения скорости письма. Однако на первых лекциях многие из вас сокращают слова как попало или вместо сокращения не дописывают слова, что нельзя рассматривать как сокращенные. Раздумье над способом сокращения слова во время лекции лишь замедляет процесс конспектирования. Для преодоления психологических и лингвистических трудностей при сокращении слов надо иметь в виду следующее:

1. Наибольшее количество информации приходится на первые буквы слова. Поэтому наиболее часто встречающиеся термины на данной лекции, или основные термины модно обозначить одной заглавной буквой и добавлять только окончание (В-е – воспитание, К-вом – коллективом, П-кий – педагогический)

2. В сокращенном слове должны присутствовать буквы корня.

3. Сокращенная часть слова должна оканчиваться на согласную, после которой ставится точка.

4. Для слов, изменяющихся при склонении или спряжении, важны начало и конечная часть слова. Средняя часть существительных может быть выброшена (вос-е, пед-ка, конц-ция, кол-во, кач-во). Также может опускаться конечная часть прилагательных и причастий, если сохранено окончание существительного (соц. среда, пед. деят-ть, восп. система).

5. У относительных местоимений, стоящих после определяемого слова, окончание не может быть отброшено: пр-с, к-рый; проц., к-рому; проц., к-рым.

6. Сокращение должно быть достаточным для восстановления целого слова. Например, сокращение пред, недостаточно для восстановления, так как от слова осталась только приставка и оно может быть расшифровано и как предупреждает, и как предполагает, и как предшествует или предусматривает. Сокращение предст, уже имеет две буквы от корня и может быть восстановлено как представляет. Однако правильнее сократить представ.

7. Новые и редко употребляемые слова лучше фиксировать полностью, пока они не войдут в ваш активный словарь. Если производить сокращение неусвоенных слов, то через некоторое время они не смогут быть восстановлены, а их смысл забудется.

8. Предварительно познакомьтесь с общепринятыми сокращениями, которые можно найти в энциклопедиях и словарях (м.б. —может быть; т.о. — таким образом, к-рый — который; пед. – педагогика; напр. — например).

Используйте аббревиатуры. При записи лекции удобно использовать аббревиатуры – сокращения словосочетаний, составленные из начальных букв слов, или сокращения сложных слов, составленные из начальных букв корней. Многие аббревиатуры словосочетаний хорошо известны: УВП – учебно-воспитательный процесс, ЛОО – личностно ориентированное обучение, ММ – математические модели, ВМ – вероятностные модели, ДСВ – дискретные случайные величины, НСВ – непрерывные случайные величины. Такие аббревиатуры записываются заглавными буквами и пишутся без точек. Зная, из каких корней состоит сложное слово, можно самим вводить некоторые из них. Например, самовоспитание -сВ, самоанализ - сА. В этом случае вторую или обе буквы можно записывать строчными буквами, между которыми не ставят точки.

Если пополнять свою память знаниями происхождения иностранных слов, вы сможете быстро составлять аббревиатуры. Предварительно следует потренироваться. Вашим помощником может стать словарь иностранных слов.

Используйте при конспектировании общенаучные символы. Для увеличения скорости записи используйте сокращения, применяемые в разных областях знания: => - следует; // — параллельно, $\exists$— существует, $\in$ — принадлежит, N – нормальный закон распределения, V — объем, E — энергия, 1/2 -половина, $\forall$ - любой, всякий, каждый, ! - единственный.

Возьмите за правило работать над конспектами лекции следующим образом:

- повторить изученный материал по конспекту;
- непонятные предложения вынести на поля и уточнить их значение;

- делайте больше отступов: не надо писать все одной сплошной строкой, где ничего не разберёшь. Это будет удобно для повторения и в целом для ваших глаз;

- неоконченные фразы, недописанные слова и предложения устранить, пользуясь данными учебника или других рекомендованных источников;

- завершить техническое оформление лекции: подчеркните главные мысли, отметьте разделы и подразделы, выделите вопросы и подвопросы;

- старайтесь поменьше использовать на лекциях диктофоны, поскольку потом трудно будет «декодировать» неразборчивый голос преподавателя, все равно потом придется переписывать лекцию (а с голоса очень трудно готовиться к ответственным экзаменам). Диктофоны часто отвлекают преподавателя тем, что студент ничего не делает на лекции, а преподаватель чувствует себя неуютно и вместо того, чтобы свободно размышлять над проблемой, читает лекцию намного хуже, чем он мог бы это сделать.

- для пропущенной лекции оставьте несколько страниц в тетради и восстановите ее содержание во время самостоятельной работы. В противном случае вы нарушите целостность изучаемого цикла.

СОВЕТЫ ПО УСОВЕРШЕНСТВОВАНИЮ КОНСПЕКТА ЛЕКЦИИ

Дописывайте на полях то, что вспомнилось после лекции и является важным. Спустя 48 ч значительная часть воспринятой информации в памяти теряется. Поэтому поработайте с конспектом в первые 48 ч после чтения лекции. В этот интервал хорошо вспоминается услышанное на лекции. Повторный ввод новой информации в память способствует ее долговременному запоминанию. Во время работы с конспектом дописывайте на полях информацию, которая вам вспомнилась позже и которую вы считаете важным зафиксировать. Вы можете дополнить текст лекции схематичными рисунками и граф-схемами.

Вносите в конспект дополнительную информацию. Если для понимания содержания лекции вы считаете необходимым внести *недостающую информацию, записывайте ее на полях* или клейких листочках.

Фиксируйте на полях значения новых слов. Работая с конспектом лекции, *уточняйте смысл незнакомых: слов в словарях и энциклопедиях. Никогда не пропускайте слов, значения которых вам незнакомы,* тогда вы избежите трудностей при понимании и запоминании нового материала. Записывайте на полях лекционной тетради значения новых слов и специальных терминов, это позволит вам быстрее и эффективнее работать с конспектом.

СЛАГАЕМЫЕ УСПЕШНОЙ РАБОТЫ НА ЛЕКЦИИ

Некоторые качества, благодаря которым работа на лекциях становится эффективной, мы уже отметили: сосредоточенность, внимание, вдумчивость, умение перерабатывать и быстро записывать текст. Однако для достижения успеха этого мало. Конспектирование возможно в том случае, когда содержащаяся в лекции информация доступна для вас: *законспектировать то, что не понимаешь, трудно.*

Непреодолимую преграду для понимания содержания лекции могут создать пропущенные лекции и занятия, небрежное отношение к прослушанным ранее лекциям, низкий уровень знаний.

Обратим внимание на то, что владение *50% информации по теме лекции является одной из предпосылок к успешному восприятию новой информации.* Вот почему целесообразность подготовки к каждой новой лекции (*работа по конспекту предыдущей лекции и просмотровое чтение соответствующего материала по учебной книге*) не вызывает сомнений.

Кроме этого, *нужно стремиться к расширению словарного запаса и активному использованию слов на практике, повышению культуры речи.* Пополнить лексический запас можно, обращаясь к различным словарям (толковому, лингвистическому, иностранных слов и др.) и энциклопедическим изданиям. Повышению культуры речи будет способствовать вдумчивое чтение как художественной, так и научно-популярной литературы, журналов. *Целесообразно во время работы с конспектом лекции уточнять значения неизвестных или малопонятных слов в справочниках, энциклопедиях и словарях.* При невозможности найти самостоятельно значение непонятного слова следует обратиться за разъяснениями к преподавателю или библиотекарю.

Лекция как особая форма интеллектуальной работы представляет собой также процесс общения лектора и слушателей. Как уже отмечалось, на лекции несколько говорящих, но вслух произносит мысли только лектор. Он не может останавливаться и отвечать на реплики из аудитории и вопросы, не относящиеся к теме лекции. Речь лектора представляет собой, как правило, монолог и ведется в соответствии с интересами всех слушателей и с задачами лекции в целом. В этот момент педагог должен реагировать только на те замечания, которые относятся к темпу и внятности его речи.

Ваше уважительное отношение к лектору и к другим слушателям, предварительная подготовка, систематическая и осознанная работа на лекции предопределяют успех лекционного занятия как особого вида учебной деятельности.

ОБЩИЕ ПРАВИЛА РАБОТЫ В ТЕТРАДИ ДЛЯ ЛЕКЦИЙ

1. Подпишите тетрадь, указав название читаемого курса, свою фамилию, группу и год обучения.
2. Проведите поля на страницах тетради. Они понадобятся для внесения дополнительных записей.
3. На каждой лекции записывайте дату, номер и тему лекции.
4. Используйте эту тетрадь по назначению.

2.2 Методические рекомендации по работе с учебной литературой

Теоретический материал дисциплины предполагает изучение пяти разделов. Ниже приведено содержание разделов и рекомендации по использованию учебной литературы.

№ 1 Множества

Основные понятия: элементы множества, пустое множество, подмножество, универсальное множество, дополнение.

Операции над множествами. Декартово произведение. Геометрическое моделирование множеств. Диаграммы Эйлера-Венна. Алгебра множеств. Основные тождества алгебры множеств. Эквивалентность множеств. Счетные множества. Множества мощности континуума.

1 Веретенников Б. М. Дискретная математика: учебное пособие, Ч. 1 [Электронный ресурс] / Веретенников Б. М., Белоусова В. И. - Издательство Уральского университета, 2014. – режим доступа - http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=276013 **– 1.2**

2. Судоплатов, С.В. Дискретная математика : учебник [Электронный ресурс] / С.В. Судоплатов, Е.В. Овчинникова. - 4-е изд. - Новосибирск : НГТУ, 2012. – 278 с. - (Учебники НГТУ). – ISBN978-5-7782-1815-4 ; Режим доступа: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=135675 **- глава 1**

3.Ковалева Л. Ф. Дискретная математика в задачах. Учебное пособие [Электронный ресурс] / Ковалева Л. Ф. - Евразийский открытый институт, 2011. – режим доступа http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=93273

пп. 1.1 – 1.3

4. Триумфгородских, М.В. Дискретная математика и математическая логика для информатиков, экономистов и менеджеров : учебное пособие [Электронный ресурс]/ М.В. Триумфгородских. – Москва : Диалог-МИФИ, 2011. - 180 с. : табл., граф., ил. - Библиогр. в кн. - ISBN 978-5-86404-238-0 ; Режим доступа: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=136106 - **глава 1**

№ 2 Отношения и функции

Отношения. Основные понятия и определения. Бинарные отношения. Операции над отношениями. Свойства отношений. Функции. Основные понятия и определения

1. Веретенников Б. М. Дискретная математика: учебное пособие, Ч. 1 [Электронный ресурс] / Веретенников Б. М., Белоусова В. И. - Издательство Уральского университета, 2014. – режим доступа - http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=276013 **– 1.3**

2. Судоплатов, С.В. Дискретная математика : учебник [Электронный ресурс] / С.В. Судоплатов, Е.В. Овчинникова. - 4-е изд. - Новосибирск : НГТУ, 2012. – 278 с. - (Учебники НГТУ). – ISBN978-5-7782-1815-4 ; Режим доступа: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=135675 **- 1.2 – 1.7**

3.Ковалева Л. Ф. Дискретная математика в задачах. Учебное пособие [Электронный ресурс] / Ковалева Л. Ф. - Евразийский открытый институт, 2011. – режим доступа http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=93273 **пп. 2.4**

4. Триумфгородских, М.В. Дискретная математика и математическая логика для информатиков, экономистов и менеджеров : учебное пособие [Электронный ресурс]/ М.В. Триумфгородских. – Москва : Диалог-МИФИ, 2011. - 180 с. : табл., граф., ил. - Библиогр. в кн. - ISBN 978-5-86404-238-0 ; Режим доступа: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=136106 **- 1.5 - 1.9**

№ 3 Булевы функции

Определение булевой функции. Формулы логики булевых функций. Равносильные преобразования формул. Применение алгебры булевых функций к релейно-контактным схемам. Булева алгебра (алгебра логики). Принцип двойственности для булевых алгебр. Полные системы булевых функций. Нормальные формы. Разложение булевой функции по переменным. Минимизация формул булевых функций в классе дизъюнктивных нормальных форм. Двойственность. Принцип двойственности.

1. Веретенников Б. М. Дискретная математика: учебное пособие, Ч. 1 [Электронный ресурс] / Веретенников Б. М., Белоусова В. И. - Издательство Уральского университета, 2014. – режим доступа - http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=276013 **– 2.6-2.8**

2. Редькин, Н.П. Дискретная математика [Электронный ресурс]/ Н.П. Редькин. – Москва : Физматлит, 2009. – 263 с. – ISBN 978-5-9221-1093-8– Режим доступа http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=75709 **- глава 3**

3.Ковалева Л. Ф. Дискретная математика в задачах. Учебное пособие [Электронный ресурс] / Ковалева Л. Ф. - Евразийский открытый институт, 2011. – режим доступа http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=93273

пп. 1.1, 2.6, 2.7

№ 4 Основы комбинаторного анализа

Основные определения. Основные теоремы комбинаторики. Правило суммы и правило произведения. Перестановки, размещения, сочетания без повторений и с повторениями. Главная теорема комбинаторики. (Теорема о включениях и исключениях). Задачи о смещениях (беспорядках). Метод рекуррентных соотношений. Метод производящих функций. Метод включений и исключений

1. Веретенников Б. М. Дискретная математика: учебное пособие, Ч. 1 [Электронный ресурс] / Веретенников Б. М., Белоусова В. И. - Издательство Уральского университета, 2014. – режим доступа - http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=276013 . **– гл. 5**

2. Редькин, Н.П. Дискретная математика [Электронный ресурс]/ Н.П. Редькин. – Москва : Физматлит, 2009. – 263 с. – ISBN 978-5-9221-1093-8– Режим доступа http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=75709 **- глава 1**

3. Судоплатов, С.В. Дискретная математика : учебник [Электронный ресурс] / С.В. Судоплатов, Е.В. Овчинникова. - 4-е изд. - Новосибирск : НГТУ, 2012. – 278 с. - (Учебники НГТУ). – ISBN978-5-7782-1815-4 ; Режим доступа: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=135675 **- глава 5**

4.Ковалева Л. Ф. Дискретная математика в задачах. Учебное пособие [Электронный ресурс] / Ковалева Л. Ф. - Евразийский открытый институт, 2011. – режим доступа http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=93273

пп. 1.4

5. Триумфгородских, М.В. Дискретная математика и математическая логика для информатиков, экономистов и менеджеров : учебное пособие [Электронный ресурс]/ М.В. Триумфгородских. – Москва : Диалог-МИФИ, 2011. - 180 с. : табл., граф., ил. - Библиогр. в кн. - ISBN 978-5-86404-238-0 ; Режим доступа: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=136106 **- глава 2**

№ 5 Графы и сети

Основные характеристики графов. Матричные способы задания графов. Изоморфизм графов. Маршруты, циклы в неориентированном графе. Пути, контуры в ориентированном графе. Связность графа. Экстремальные пути в нагруженных ориентированных графах. Алгоритм Форда – Беллмана нахождения минимального пути. Алгоритм нахождения максимального пути. Деревья. Основные определения. Минимальные остовные деревья нагруженных графов

1. Веретенников Б. М. Дискретная математика: учебное пособие, Ч. 1 [Электронный ресурс] / Веретенников Б. М., Белоусова В. И. - Издательство Уральского университета, 2014. – режим доступа - http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=276013 **– гл. 6**

2. Редькин, Н.П. Дискретная математика [Электронный ресурс]/ Н.П. Редькин. – Москва : Физматлит, 2009. – 263 с. – ISBN 978-5-9221-1093-8– Режим доступа http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=75709 **глава 2**

3. Судоплатов, С.В. Дискретная математика : учебник [Электронный ресурс] / С.В. Судоплатов, Е.В. Овчинникова. - 4-е изд. - Новосибирск : НГТУ, 2012. – 278 с. - (Учебники НГТУ). – ISBN978-5-7782-1815-4 ; Режим доступа: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=135675 **- глава 4**

4.Ковалева Л. Ф. Дискретная математика в задачах. Учебное пособие [Электронный ресурс] / Ковалева Л. Ф. - Евразийский открытый институт, 2011. – режим доступа http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=93273

пп. 3.1 – 3.5

5. Триумфгородских, М.В. Дискретная математика и математическая логика для информатиков, экономистов и менеджеров : учебное пособие [Электронный ресурс]/ М.В. Триумфгородских. – Москва : Диалог-МИФИ, 2011. - 180 с. : табл., граф., ил. - Библиогр. в кн. - ISBN 978-5-86404-238-0 ; Режим доступа: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=136106 **- глава 5**

2.3 Теоретический материал для самостоятельной работы

2.3.1 Алгебра множеств

Основные понятия

Определение 1.1. *Множеством* называется совокупность каких-либо объектов, обладающим общим для всех характеристическим свойством. Это определение нельзя считать строгим, так как понятие множества является исходным понятием математики и не может быть определено через другие математические объекты. Один из основателей теории множеств Г. Кантор определял множество так: "Множество есть многое, мыслимое как целое".

Пример 1.1.

Следующие совокупности объектов являются множествами: множество деревьев в лесу, множество целых чисел, множество корней уравнения $e^x sinx = 0.5$.

Всякое множество состоит из *элементов*. Множества обозначают большими буквами, например A. B, C, а элементы – маленькими буквами, например, a, b, c.

Множество и его элементы обозначаются следующим образом:

$A = \{a_1, a_2, a_3\}$ – множество, состоящее из трех элементов;

$A = \{a_1, a_2, \ldots\}$ – множество, состоящее из бесконечного числа элементов.

Множество может состоять из элементов, которые сами являются множествами. Нужно различать элемент a и множество, состоящее из единственного элемента a.

Пример 1.2.

Множество $A = \{1, 2\}$ состоит из двух элементов 1, 2; но множество $\{A\}$ состоит из одного элемента A.

Если элемент a принадлежит множеству A, это записывается следующим образом:

$a \in A$. Если элемент a не принадлежит множеству A, то записывают так: $a \notin A$.

Пример 1.3.

Пусть A_1 – множество простых чисел, A_2 – множество целых чисел, $a = 4$. Тогда

$a \in A_2$, $a \notin A_1$.

Если все элементы множества A являются элементами множества B и наоборот, т. е. множества A и B совпадают, то говорят, что $A = B$.

Если каждый элемент множества A является элементом множества B, говорят, что множество A является *подмножеством* множества B, и записывают $A \subseteq B$ или $B \supseteq A$. Отметим, что по определению само множество A является своим подмножеством, т.е. $A \subseteq A$.

Если $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$, то по ранее введенному определению $A = B$.

Если $A \subseteq B$ и $A \neq B$, то A есть *собственное подмножество* B, $A \subset B$. Если A не является собственным подмножеством B, то записывают $A \not\subset B$.

Пример 1.4.

Пусть A – множество четных чисел, B – множество целых чисел, C – множество нечетных чисел. Тогда

$A \subset B$, $C \subset B$, $A \not\subset C$, $B \not\subset A$.

Не надо смешивать *отношение принадлежности* ($\in$) и *отношение включения* ($\subseteq$).

Пример 1.5.

Пусть $A = \{2\}$ – множество, состоящее из одного элемента, $B = \{\{2\}, \{4\}\}$ – множество, состоящее из двух элементов, каждое из которых является одноэлементным множеством. Тогда имеют место следующие соотношения:

$2 \in \{2\}$;

$\{2\} \subset \{\{2\}, \{4\}\}$;

$2 \notin \{\{2\}, \{4\}\}$.

Множество, не содержащее ни одного элемента, называется *пустым множеством* и обозначается $\varnothing$. Принято считать, что пустое множество является подмножеством любого множества, $\varnothing \subseteq A$, где A – любое множество. Таким образом, всякое множество содержит в качестве своих подмножеств пустое множество и само себя.

Пример 1.6.

Множество корней уравнения $sinx = 2$ является пустым.

Множество всех подмножеств данного множества A называется множеством-степенью и обозначается $P(A)$. Множество $P(A)$ состоит из 2^n элементов (доказать самостоятельно).

Пример 1.7.

Пусть множество $A = \{1, 2\}$ состоит из двух элементов 1, 2. Тогда множество $P(A)$ включает в себя пустое множество $\varnothing$, два одноэлементных множества $\{1\}$ и $\{2\}$ и само множество $A = \{1, 2\}$, т. е.

$P(A) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$.

Мы видим, что множество $P(A)$ состоит из четырех элементов ($4 = 2^2$).

Существуют следующие способы задания множеств.

1. Перечислением элементов множества. Например:

$A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ – конечное множество;

$B = \{1, 2, \ldots, n, \ldots\}$ – бесконечное множество.

2. Указанием свойств элементов множества. Для этого способа пользуются следующим форматом записи: $A = \{a |$ указание свойства элементов$\}$. Здесь a является элементом множества A, $a \in A$. Например:

$A = \{a \mid a$ – простое число$\}$ – множество простых чисел;

$B = \{b \mid b^2 - 1 = 0,\ b$ – действительное число$\}$ – множество, состоящее из двух элементов, $B = \{-1, 1\}$;

$Z = \{x \mid \dfrac{\sin x}{x} = 1\}$– множество, состоящее из одного числа, $x = 0$.

Операции над множествами

Рассмотрим основные операции над множествами.

Объединением множеств A и B называется множество $A \cup B$, все элементы которого являются элементами хотя бы одного из множеств A или B:

$A \cup B = \{x \mid x \in A$ или $x \in B\}$.

Из определения следует, что $A \subseteq A \cup B$ и $B \subseteq A \cup B$.

Аналогично определяется объединение нескольких множеств

Пример 1.8.

а) Пусть $A = \{4, 5, 6\}$, $B = \{2, 4, 6\}$.

Тогда $A \cup B = \{2, 4, 5, 6\}$.

б) Пусть A – множество чисел, которые делятся на 2, а B – множество чисел, которые делятся на 3:

$A = \{2, 4, 6, \ldots\}$, $B = \{3, 6, 9, \ldots\}$.

Тогда $A \cup B$ множество чисел, которые делятся на 2 или на 3:

$A \cup B = \{2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, \ldots\}$.

Пересечением множеств A и B называется множество $A \cap B$, все элементы которого являются элементами обоих множеств A и B:

$A \cap B = \{x \mid x \in A$ и $x \in B\}$.

Из определения следует, что $A \cap B \subseteq A$, $A \cap B \subseteq B$ и $A \cap B \subseteq A \cup B$.

Аналогично определяется пересечение нескольких множеств.

Пример 1.9.

Рассмотрим данные из примера 1.8.

а) Пусть $A = \{4, 5, 6\}$, $B = \{2, 4, 6\}$.

Тогда $A \cap B = \{4, 6\}$.

б) Пусть A – множество чисел, которые делятся на 2, а B – множество чисел, которые делятся на 3:

$A = \{2, 4, 6, \ldots\}$, $B = \{3, 6, 9, \ldots\}$.

Тогда $A \cap B$ множество чисел, которые делятся и на 2 и на 3:

$A \cup B = \{6, 12, 18, \ldots\}$.

Может оказаться, что множества не имеют ни одного общего элемента. Тогда говорят, что множества не пересекаются или что их пересечение – пустое множество.

Пример 1.10.

Пусть $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 3\}$, $C = \{3, 4\}$.

Тогда $A \cap B \cap C = \varnothing$.

Относительным дополнением множества B до множества A называется множество $A \setminus B$, все элементы которого являются элементами множества A, но не являются элементами множества B:

$A \setminus B = \{x \mid x \in A$ и $x \notin B\}$.

Пример 1.11.

Рассмотрим данные из примера 1.8.

а) $A = \{4, 5, 6\}$, $B = \{2, 4, 6\}$.

$A \setminus B = \{4, 5\}$, $B \setminus A = \{2\}$.

б) $A = \{2, 4, 6, \ldots\}$, $B = \{3, 6, 9, \ldots\}$.

Тогда $A \setminus B$ – множество чисел, которые делятся на 2, но не делятся на 3, а $B \setminus A$ – множество чисел, которые делятся на 3, но не делятся на 2:

$A \setminus B = \{2, 4, 8, 10, 14, \ldots\}$.

$B \setminus A = \{3, 9, 15, 21, 27, \ldots\}$.

Симметрической разностью множеств A и B называется множество $A + B$:

$A + B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

Пример 1.12.

Рассмотрим данные из примера 1.11.

а) $A = \{4, 5, 6\}$, $B = \{2, 4, 6\}$.

$A \setminus B = \{4, 5\}$, $B \setminus A = \{2\}$, $A + B = \{2, 4, 5\}$.

б) $A = \{2, 4, 6, \ldots\}$, $B = \{3, 6, 9, \ldots\}$, $A \setminus B = \{2, 4, 8, 10, 14, \ldots\}$.

$B \setminus A = \{3, 9, 15, 21, 27, \ldots\}$, $A + B = \{2, 3, 4, 8, 9, \ldots\}$.

Универсальным множеством называется такое множество U, что все рассматриваемые в данной задаче множества являются его подмножествами.

Абсолютным дополнением множества A называется множество $\overline{A}$ всех таких элементов $x \in U$, которые не принадлежат множеству A: $\overline{A} = U \setminus A$.

Пример 1.13.

Пусть A – множество положительных четных чисел.

Тогда U – множество всех натуральных чисел и $\overline{A}$ - множество положительных нечетных чисел.

Геометрическое моделирование множеств. Диаграммы Венна

Для наглядного представления множеств и отношений между ними используется диаграммы Венна (иногда их называют кругами Эйлера или диаграммами Эйлера – Венна).

Универсальное множество изображают в виде прямоугольника, а множества, входящие в универсальное множество, – в виде кругов внутри прямоугольника; элементу множества соответствует точка внутри круга (рис 1.1а)).

С помощью диаграмм Венна удобно иллюстрировать операции над множествами.

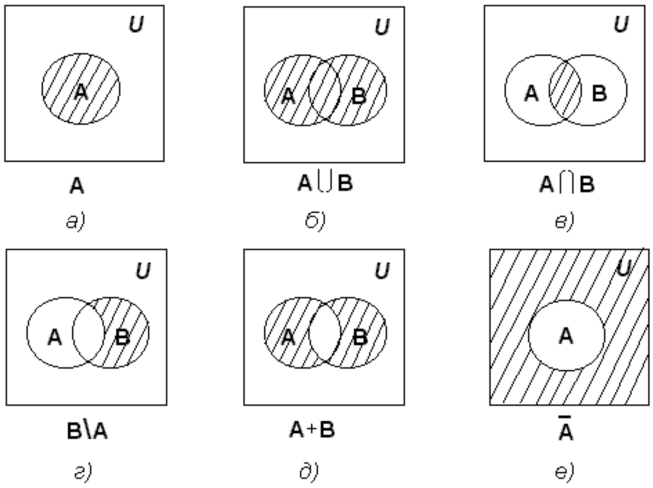


Рис.1.1

Алгебра множеств. Основные тождества алгебры множеств

Множества вместе с определенными на них операциями образуют *алгебру множеств*. Последовательность выполнения операций задается с помощью *формулы алгебры множеств*. Например, $\overline{A} \cap (B \cup C)$, $(A \setminus B) + C$ – формулы алгебры множеств.

Основные тождества алгебры множеств

Для любых множеств A, B, C справедливы следующие тождества:

1. *Коммутативность*.

а) $A \cup B = B \cup A$ (для объединения);

б) $A \cap B = B \cap A$ (для пересечения).

2. *Ассоциативность*.

а) $A \cup (B \cup C) = (A \cup C) \cup C$ (для объединения);

б) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ (для пересечения).

3. *Дистрибутивность*.

а) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (для объединения относительно пересечения);

б) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (для пересечения относительно объединения).

4. *Закон де Моргана*.

а) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ (дополнение к объединению есть пересечение дополнений);

б) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ (дополнение к пересечению есть объединение дополнений).

5. *Идемпотентность*.

а) $A \cup A = A$ (для объединения);

б) $A \cap A = A$ (для пересечения).

6. *Поглощение.*

а) $A \cup (A \cap B) = A$;

б) $A \cap (A \cup B) = A$.

7. *Расщепление* (*склеивание*).

а) $(A \cup B) \cap (A \cup \overline{B}) = A$;

б) $(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) = A$.

8. *Двойное дополнение*.

$\overline{\overline{A}} = A$.

9. *Закон исключенного третьего.*

$A \cup \overline{A} = U$.

10. *Операции с пустым и универсальным множествами.*

а) $A \cup U = U$;

б) $A \cup \varnothing = A$;

в) $A \cap U = A$;

г) $A \cap \varnothing = \varnothing$;

д) $\overline{\varnothing} = U$;

е) $\overline{U} = \varnothing$.

11. $A \setminus B = A \cap \overline{B}$.

Чтобы доказать некоторое тождество $A = B$, нужно доказать, что, во-первых, если $x \in A$, то $x \in B$ и, во-вторых, если $x \in B$, то $x \in A$. Докажем таким образом, например, свойство дистрибутивности для объединения (тождество 3а)):

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

1. Сначала предположим, что некоторый элемент x принадлежит левой части тождества, т.е. $x \in A \cup (B \cap C)$, и докажем, что x принадлежит правой части, т.е. $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Действительно, пусть $x \in A \cup (B \cap C)$. Тогда либо $x \in A$, либо $x \in B \cap C$. Рассмотрим каждую из этих возможностей.

Пусть $x \in A$. Тогда $x \in A \cup B$ и $x \in A \cup C$ (это верно для любых множеств B и C). Следовательно, $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

2. Предположим, что некоторый элемент x принадлежит правой части тождества, т.е. $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$, и докажем, что x принадлежит левой части, т.е. $x \in A \cup (B \cap C)$.

Действительно, пусть $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Тогда $x \in A \cup B$, и одновременно $x \in A \cup C$. Если $x \in A \cup B$, то либо $x \in A$, либо $x \in B$, если .$x \in A \cup C$, то либо $x \in A$, либо $x \in C$. Пусть $x \in A$, Тогда $x \in A \cup (B \cap C)$ и утверждение доказано. Если $x \notin A$, то одновременно должны выполняться условия $x \in B$ и $x \in C$, т.е. $x \in B \cap C$. Но тогда $x \in B \cap C$ и $x \in A \cup (B \cap C)$, что также доказывает наше утверждение.

Доказательство тождеств можно проиллюстрировать с помощью диаграмм Венна.

Основные тождества алгебры множеств можно использовать для доказательства других тождеств.

Пример 1.14.

Доказать тождество $(A \cup B) \setminus B = A \cap \overline{B}$.

Преобразуем левую часть тождества, используя тождество 11:

$(A \cup B) \setminus B = (A \cup B) \cap \overline{B}$.

Затем используем закон дистрибутивности (тождество 3б):

$(A \cup B) \cap \overline{B} = A \cap \overline{B} \cup B \cap \overline{B}$.

Используем закон исключенного третьего (тождество 9):

$B \cap \overline{B} = \varnothing$.

Получим

$A \cap \overline{B} \cup B \cap \overline{B} = A \cap \overline{B} \cup \varnothing$.

Используем свойство пустого множества (тождество 10б):

$A \cap \overline{B} \cup \varnothing = A \cap \overline{B}$.

Тождество доказано.

Пример 1.15.

Доказать тождество:

$A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$.

Множества, стоящие в левой и правой частях тождества, изобразим с помощью диаграмм Эйлера – Венна (рис. 1.2).

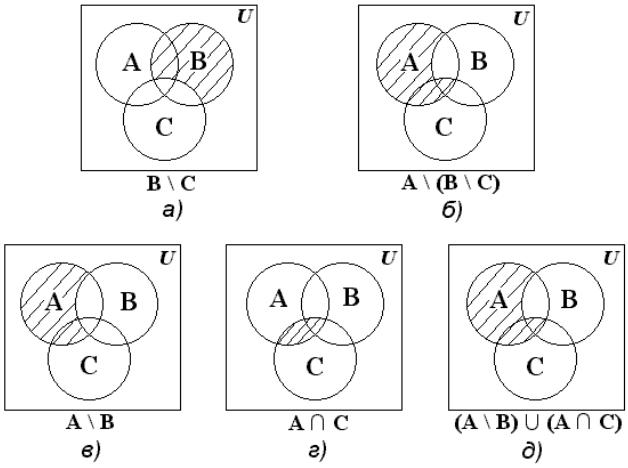


Рис. 1.2

Рис. 1.2*б*) и рис. 1.2*д*) иллюстрируют равенство множеств $A \setminus (B \setminus C)$ и $(A \setminus B) \cup (A \cap C)$.

Докажем тождество из нашего примера, воспользовавшись тождествами:

$A \setminus B = A \cap \overline{B}$, $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$, $\overline{\overline{A}} = A$, $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Получим:

$A \setminus (B \setminus C) = A \cap \overline{(B \setminus C)} = A \cap \overline{B \cap \overline{C}} = A \cap (\overline{B} \cup \overline{\overline{C}}) = A \cap (\overline{B} \cup C) = (A \cap \overline{B}) \cup (A \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$.

Основные тождества алгебры множеств можно также использовать для упрощения формул алгебры логики.

Пример 1.16.

Упростить выражение:

$(A \cup B) \cap (\overline{A} \cup B) \cap (A \cup \overline{B})$.

Используя закон коммутативности (тождество 1б), поменяем местами вторую и третью скобки:

$(A \cup B) \cap (\overline{A} \cup B) \cap (A \cup \overline{B}) = (A \cup B) \cap (A \cup \overline{B}) \cap (\overline{A} \cup B)$.

Применим закон расщепления (тождество 7а) для первой и второй скобок:

$(A \cup B) \cap (A \cup \overline{B}) \cap (\overline{A} \cup B) = A \cap (\overline{A} \cup B)$.

Воспользуемся законом дистрибутивности (тождество 3б):

$A \cap (\overline{A} \cup B) = A \cap \overline{A} \cup A \cap B$.

Используем закон исключенного третьего (тождество 9):

$A \cap \overline{A} = \varnothing$.

Получим

$A \cap \overline{A} \cup A \cap B = \varnothing \cup A \cap B$.

Используем свойство пустого множества (тождество 10б):

$\varnothing \cup A \cap B = A \cap B$.

Итак,

$(A \cup B) \cap (\overline{A} \cup B) \cap (A \cup \overline{B}) = A \cap B$.

Эквивалентность множеств

Определение 1.2. Если каждому элементу множества A сопоставлен единственный элемент множества B и при этом всякий элемент множества B оказывается сопоставленным одному и только одному элементу множества A, то говорят, что между множествами A и B существует *взаимно однозначное соответствие.* Множества A и B в этом случае называют *эквивалентными или равномощными.*

Эквивалентность множеств обозначается следующим образом: $A \sim B$.

Эквивалентность множеств обладает следующим свойством *транзитивности*.

Если $A \sim B$ и $B \sim C$, то $A \sim C$.

Докажем это свойство. Так как $A \sim B$, то для всякого элемента $a \in A$ существует единственный элемент $b \in B$. Но так как $B \sim C$, то для всякого элемента $b \in B$ существует единственный элемент $c \in C$. Сопоставим этот элемент элементу $a \in A$. Значит, для всякого элемента $a \in A$ существует единственный элемент $c \in C$ и для всякого элемента $c \in C$ существует единственный элемент $a \in A$. Следовательно, $A \sim C$.

Очевидно, что два конечных множества эквивалентны тогда и только тогда, когда количество элементов в них одинаково. Например, множества $A = \{4, 5, 6\}$ и $B = \{x, y, z\}$ эквивалентны, $A \sim B$. Взаимно однозначное соответствие может быть установлено между элементами 4 и x, 5 и y, 6 и z.

Мощностью конечного множества A (обозначается $|A|$) называется число элементов этого множества. Например, мощность множества $A = \{1, 2\}$ равна $|A| = 2$.

Пример 1.17.

Ранее (разд. 1.1) мы рассматривали множество всех подмножеств данного множества A, которое называется множеством-степенью и обозначается $P(A)$. Множество $P(A)$ состоит из 2^n элементов. Таким образом, $|P(A)| = 2^n$.

Рассмотрим задачу определения мощности объединения n конечных множеств.

Пусть $n = 2$ и A и B – два пересекающихся множества. Докажем с помощью диаграммы Эйлера – Венна следующее соотношение:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|. \qquad (1.1)$$

Из рис. 1.3 видим, что

$|A \cup B| = n_1+n_2+n_3$;

$|A| = n_1+n_2$;

$|B| = n_2+n_3$;

$|A \cap B| = n_2$.

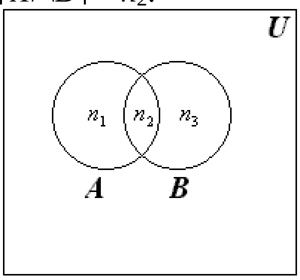


Рис. 1.3

Очевидно, что $n_1+n_2+n_3 = (n_1+n_2) + (n_2+n_3) - n_2$, что и доказывает формулу ().

Формула (1.1) справедлива и для случая, если множества A и B не пересекаются. В этом случае

$$|A \cup B| = |A| + |B|.$$

Пусть $n = 3$ и A, B и C – три пересекающихся множества. В этом случае справедливо следующее соотношение:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|. \qquad (1.2)$$

Из рис. 1.4 видим, что

$|A \cup B \cup C| = n_1+n_2+n_3+n_4+n_5+n_6+n_7$;

$|A| = n_1+n_2+n_4+n_5$;

$|B| = n_2+n_3+n_5+n_6$;

$|C| = n_4+n_5+n_6+n_7$;

$|A \cap B| = n_2+n_5$;

$|A \cap C| = n_4+n_5$;

$|B \cap C| = n_5+n_6$;

$|A \cap B \cap C| = n_5$.

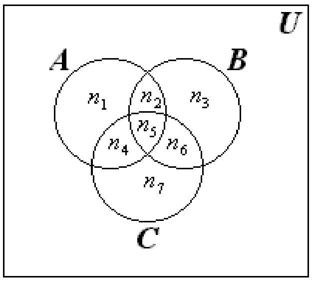


Рис. 1.4

Очевидно, что

$n_1+n_2+n_3+n_4+n_5+n_6+n_7 = (n_1+n_2+n_4+n_5) + (n_2+n_3+n_5+n_6) + (n_4+n_5+n_6+n_7) - (n_2+n_5) - (n_4+n_5) - (n_5+n_6) + n_5$,

что и доказывает формулу (1.2).

Формула (1.2) справедлива и для случая, если множества A, B и C попарно не пересекаются. В этом случае

$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C|$.

В общем случае мощность объединения n множеств определяется по формуле:

$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + \ldots + |A_n| - (|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + \ldots + |A_{n-1} \cap A_n|) + |A \cap B \cap C| + (|A_1 \cap A_2 \cap A_3| + \ldots + |A_{n-2} \cap A_{n-1} \cap A_n|) - \ldots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \ldots \cap A_n|$. (1.3)

Эта формула выводится индукцией по n, [3].

Если множества A_i попарно не пересекаются, т.е. $A_i \cap A_j = \varnothing$, $i \neq j$, то получим частный случай формулы (1.3):

$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + \ldots + |A_n|$.

В общем случае справедливо неравенство

$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| \leq |A_1| + |A_2| + \ldots + |A_n|$.

Понятие эквивалентности годится и для бесконечных множеств. Пусть, например, $A = \{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$, $B = \{-1, -2, \ldots, -n, \ldots\}$. Тогда $A \sim B$. Взаимно однозначное соответствие устанавливается по правилу: элементу $n \in A$ соответствует элемент $-n \in B$, т.е. $n \leftrightarrow -n$.

Пример 1.18.

$A = \{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$, $B = \{2, 4 \ldots, 2n, \ldots\}$. Тогда $A \sim B$. Взаимно однозначное соответствие устанавливается по правилу: $n \leftrightarrow 2n$.

Пример 1.19.

$A = \{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$ – множество натуральных чисел, $B = \{\ldots, -n, \ldots -2, -1, 0, 1, 2, \ldots, n, \ldots\}$ – множество всех целых чисел.

Перепишем множество B следующим образом:

$B = \{0, -1, 1, -2, 2, \ldots, -n, n, \ldots\}$, так, что 0 будет на первом месте, –1 на втором, 1 на третьем, –2 на четвертом и т.д. Нетрудно заметить, что отрицательные числа будут стоять на местах с четными номерами, а 0 и положительные числа – на местах с нечетными номерами. Поэтому взаимно однозначное соответствие между множествами A и B устанавливается по правилу: для всякого $n \geq 0$ элементу $a = 2n+1$ из множества A (т.е. нечетному элементу) соответствует элемент $b = n$ из множества B; элементу $a = 2n$ из множества A (т.е. четному элементу) соответствует элемент $b = -n$ из множества B. Таким образом, реализуется взаимно однозначное соответствие между множествами A и B: $1 \leftrightarrow 0$, $2 \leftrightarrow -1$, $3 \leftrightarrow 1$, $4 \leftrightarrow -2$ и т.д.

Примеры 1.18 и 1.19 показывают, что множество может быть эквивалентно своему подмножеству. Так, в примере 1.18 $B \subset A$, а в примере 1.19 $A \subset B$. И в том, и в другом случае $A \sim B$.

Установить эквивалентность множеств, т.е. установить взаимно однозначное соответствие между их элементами можно различными путями. На рис. 1.5 показано, что множества точек двух отрезков $[a, b]$ и $[c, d]$ эквивалентны.

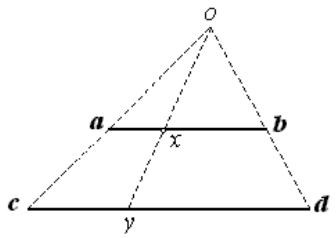


Рис.1.5

Таким же образом можно установить эквивалентность множеств точек двух интервалов. На рис.1.6 показано, что множества точек любого интервала (a, b) эквивалентно множеству точек всей прямой.

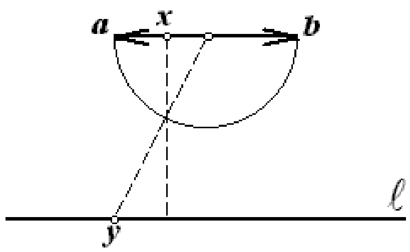


Рис. 1.6

Для установления эквивалентности двух множеств можно применять следующую теорему.

Теорема Бернштейна. Если множество A эквивалентно части множества B, а множество B эквивалентно части множества A, то множества A и B эквивалентны.

Применим теорему Бернштейна для доказательства того, что множество точек любого отрезка эквивалентно множеству точек любого интервала.

Пусть $A = [a, b]$ – произвольный отрезок, а $B = (c, d)$ – произвольный интервал.

Пусть $A_1 = [a_1, b_1]$ – любой внутренний интервал отрезка $[a, b]$, $A_1 \subset A$. Тогда $A_1 \sim B$.

Пусть $B_1 = (c_1, d_1)$ – любой внутренний отрезок интервала (c, d), $B_1 \subset B$. Тогда $B_1 \sim A$.

Таким образом, выполняются условия теоремы Бернштейна. Поэтому $A \sim B$.

Итак, все интервалы, отрезки и вся прямая эквивалентны между собой.

Счетные множества

Определение 1.3. Множество, эквивалентное множеству натуральных чисел $N = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$, называется *счетным*.

Можно сказать также, что множество счетно, если его элементы можно перенумеровать.

Пример 1.20.

Следующие множества являются счетными.:

1. $A_1 = \{-1, -2, \dots, -n, \dots\}$;
2. $A_2 = \{2, 2^2, \dots, 2^n, \dots\}$;
3. $A_3 = \{2, 4, \dots, 2n, \dots\}$;
4. $A_4 = \{\dots, -n, \dots, -1, 0, 1, \dots, n, \dots\}$;

Чтобы установить счетность некоторого множества, достаточно указать взаимно однозначное соответствие между элементами данного множества и множества натуральных чисел. Для примера 1.19 взаимно однозначное соответствие устанавливается по следующим правилам: для множества A_1: $-n \leftrightarrow n$; для множества A_2: $2^n \leftrightarrow n$; для множества A_3: $2n \leftrightarrow n$; счетность множества A_4 установлена в примере 1.19;

Установить счетность множеств можно также, используя следующие *теоремы о счетных множествах* (приводятся без доказательств).

Теорема 1. Всякое бесконечное подмножество счетного множества счетно.

Пример 1.21.

Множество $A = \{3, 6, \ldots, 3n, \ldots\}$ счетно, т.к. A – бесконечное подмножество множества натуральных чисел, $A \subset N$.

Теорема 2. Объединение конечной или счетной совокупности счетных множеств счетно.

Пример 1.22.

Множество $A = \{0, 1, \ldots, n, \ldots\}$ неотрицательных целых чисел счетно, множество $B = \{0, -1, \ldots, -n, \ldots\}$ неположительных целых чисел тоже счетно, поэтому множество всех целых чисел $C = A \cup B = \{\ldots, -n, \ldots -2, -1, 0, 1, 2, \ldots, n, \ldots\}$ тоже счетно.

Теорема 3. Множество всех рациональных чисел, т.е. чисел вида $\frac{p}{q}$, где p и q целые числа, счетно.

Теорема 4. Если $A = \{a_1, a_2, \ldots\}$ и $B = \{b_1, b_2, \ldots\}$ – счетные множества, то множество всех пар $C = \{(a_k, b_n), k = 1, 2, \ldots; n = 1, 2, \ldots\}$ счетно.

Пример 1.23.

Геометрический смысл пары (a_k, b_n) – точка на плоскости с рациональными координатами (a_k, b_n). Поэтому можно утверждать, что множество всех точек плоскости с рациональными координатами счетно.

Теорема 5. Множество всех многочленов $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$ любых степеней с рациональными коэффициентами $a_0, a_1, a_2, \ldots a_n$ счетно.

Теорема 6. Множество всех корней многочленов любых степеней с рациональными коэффициентами счетно.

Множества мощности континуума

Существуют бесконечные множества, элементы которых нельзя перенумеровать. Такие множества называются *несчетными*.

Теорема Кантора. Множество всех точек отрезка [0, 1] несчетно.

Доказательство.

Пусть множество точек отрезка [0, 1] счетно. Значит, эти точки можно перенумеровать, т. е. расположить в виде последовательности $x_1, x_2 \ldots x_n, \ldots$.

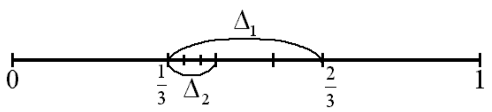


Рис. 1.7

Разобьем отрезок [0, 1] на три равные части. Где бы ни находилась точка x_1, она не может принадлежать всем отрезкам $\left[0, \frac{1}{3}\right]$, $\left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$, $\left[\frac{2}{3}, 1\right]$. Поэтому среди них есть отрезок Δ_1, не содержащий точку x_1 (рис. 1.7). Возьмем этот отрезок Δ_1 и разделим его на три равные части. Среди них всегда есть отрезок Δ_2, не содержащий точку x_2. Разделим этот отрезок на три равные части и т. д. Получим последовательность отрезков $\Delta_1 \supset \Delta_2 \supset \Delta_3 \supset \ldots \supset \Delta_n \supset \ldots$. В силу аксиомы Кантора сходится к некоторой точке x при $n \to \infty$. По построению эта точка x принадлежит каждому отрезку $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \ldots, \Delta_n, \ldots$, т. е. она не может совпадать ни с одной из точек $x_1, x_2, \ldots x_n, \ldots$, т. е. последовательность $x_1, x_2 \ldots x_n, \ldots$не исчерпывает всех точек отрезка [0, 1], что противоречит первоначальному предположению. Теорема доказана.

Множество, эквивалентное множеству всех точек отрезка [0, 1] называется *множеством мощности континуума*.

Так как множества точек интервалов, отрезков и всей прямой эквивалентны между собой, то все они имеют мощность континуума.

Чтобы доказать, что данное множество имеет мощность континуума, достаточно указать взаимно однозначное соответствие между данным множеством и множеством точек отрезка, интервала или всей прямой.

Пример 1.24.

Из рис. 1.8 следует, что множество точек параболы $y = x^2$ эквивалентно множеству точек прямой $-\infty < x < \infty$ и, следовательно, имеет мощность континуума.

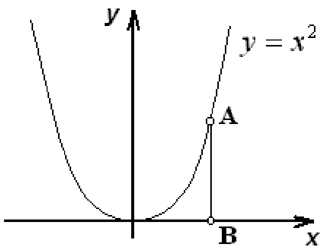


Рис.1.8

Установить мощность континуума можно также, используя следующие *теоремы о множествах мощности континуума* (приводятся без доказательств).

Теорема 1. Множество всех подмножеств счетного множества счетно.

Теорема 2. Множество иррациональных чисел имеет мощность континуума.

Теорема 3. Множество всех точек n-мерного пространства при любом n имеет мощность континуума.

Теорема 4. Множество всех комплексных чисел имеет мощность континуума.

Теорема 5. Множество всех непрерывных функций, определенных на отрезке $[a, b]$ имеет мощность континуума.

Итак, мощности бесконечных множеств могут различаться. Мощность континуума больше, чем мощность счетного множества. Ответ на вопрос, существуют ли множества более высокой мощности, чем мощность континуума, дает следующая теорема (приводится без доказательства).

Теорема о множествах высшей мощности. Множество всех подмножеств данного множества имеет более высокую мощность, чем данное множество.

Из этой теоремы следует, что множеств с максимально большой мощностью не существует.

2.3.2 Отношения. Функции

Отношения. Основные понятия и определения

Определение 1. *Упорядоченной парой* $<x, y>$ называется совокупность двух элементов x и y, расположенных в определенном порядке.

Две упорядоченные пары $<x, y>$ и $<u, \mathrm{v}>$ равны межу собой тогда и только тогда, когда $x = u$ и $y = \mathrm{v}$.

Пример 2.1.

$<a, b>$, $<1, 2>$, $<x, 4>$ – упорядоченные пары.

Аналогично можно рассматривать тройки, четверки, n-ки элементов $<x_1, x_2, \ldots x_n>$.

Определение 2.2. *Прямым* (или *декартовым*) *произведением* двух множеств A и B называется множество упорядоченных пар, таких, что первый элемент каждой пары принадлежит множеству A, а второй – множеству B:

$A \times B = \{<a, b>, \mid a \in A \text{ и } b \notin B\}$.

В общем случае прямым произведением n множеств $A_1, A_2, \dots A_n$ называется множество $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$, состоящее из упорядоченных наборов элементов $<a_1, a_2, \dots, a_n>$ длины n, таких, что i- ый a_i принадлежит множеству A_i, $a_i \in A_i$.

Пример 2.2.

Пусть $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 3\}$.

Тогда $A \times B = \{<1, 2>, <1, 3>, <2, 2>, <2, 3>\}$.

Пример 2.3.

Пусть $A = \{x \mid 0 \le x \le 1\}$ и $B = \{y \mid 2 \le y \le 3\}$

Тогда $A \times B = \{< x, y >, \mid 0 \le x \le 1 \text{ и } 2 \le y \le 3\}$.

Таким образом, множество $A \times B$ состоит из точек, лежащих внутри и на границе прямоугольника, образованного прямыми $x = 0$ (ось ординат), $x = 1$, $y = 2$ и $y = 3$.

Французский математик и философ Декарт впервые предложил координатное представление точек плоскости. Это исторически первый пример прямого произведения.

Определение 2.3. *Бинарным* (или *двуместным*) *отношением* ρ называется множество упорядоченных пар.

Если пара $<x, y>$ принадлежит ρ, то это записывается следующим образом: $<x, y> \in \rho$ или, что то же самое, $x\rho y$.

Пример2.4.

$\rho = \{<1, 1>, <1, 2>, <2, 3>\}$

Аналогично можно определить n-местное отношение как множество упорядоченных n-ок.

Так как бинарное отношение – множество, то способы задания бинарного отношения такие же, как и способы задания множества (см. разд. 1.1). Бинарное отношение может быть задано перечислением упорядоченных пар или указанием общего свойства упорядоченных пар.

Пример 2.5.

1. $\rho = \{<1, 2>, <2, 1>, <2, 3>\}$ – отношение задано перечислением упорядоченных пар;

2. $\rho = \{<x, y> \mid x + y = 7,\ x, y$ – действительные числа$\}$ – отношение задано указанием свойства $x + y = 7$.

Кроме того, бинарное отношение может быть задано *матрицей бинарного отношения*. Пусть $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ – конечное множество. Матрица бинарного отношения C есть квадратная матрица порядка n, элементы которой c_{ij} определяются следующим образом:

$$c_{ij} = \begin{cases} 1, \text{если } a_i \rho a_j, \\ 0 \quad \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Пример 2.6.

$A = \{1, 2, 3, 4\}$. Зададим бинарное отношение ρ тремя перечисленными способами.

1. $\rho = \{<1, 2>, <1, 3>, <1, 4>, <2, 3>, <2, 4>, <3, 4>\}$ – отношение задано перечислением всех упорядоченных пар.

2. $\rho = \{< a_i, a_j> \mid a_i < a_j;\ a_i, a_j \in A\}$ – отношение задано указанием свойства "меньше" на множестве A .

3. $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ – отношение задано матрицей бинарного отношения C.

Пример 2.7.

Рассмотрим некоторые бинарные отношения.

1. Отношения на множестве натуральных чисел.

а) отношение ≤ выполняется для пар <1, 2>, <5, 5>, но не выполняется для пары <4, 3>;

б) отношение "иметь общий делитель, отличный от единицы" выполняется для пар <3, 6>, <7, 42>, <21, 15>, но не выполняется для пары <3, 28>.

2. Отношения на множестве точек действительной плоскости.

а) отношение "находиться на одинаковом расстоянии от точки (0, 0)" выполняется для точек (3, 4) и $(-2, \sqrt{21})$, но не выполняется для точек (1, 2) и (5, 3);

б) отношение "быть симметричным относительно оси OY" выполняется для всех точек (x, y) и $(-x, -y)$.

3. Отношения на множестве людей.

а) отношение "жить в одном городе";

б) отношение "учиться в одной группе";

в) отношение "быть старше".

Определение 2.4. **Областью определения бинарного отношения ρ *называется множество* $\mathbf{D}_\rho$ = {x /*существует* y, *что* xρ y}.**

Определение 2.5. **Областью значений бинарного отношения ρ *называется множество* $\mathbf{R}_\rho$ = {y /*существует* x, *что* xρ y}.**

Определение 2.6. **Областью задания бинарного отношения ρ *называется множество* $\mathbf{M}_\rho = \mathbf{D}_\rho \cup \mathbf{R}_\rho$.**

Используя понятие прямого произведения, можно записать:

$\rho \in D_\rho \times R_\rho$

Если $D_\rho = R_\rho = A$, то говорят, что бинарное отношение ρ задано на множестве A.

Пример 2.8.

Пусть $\rho = \{<1, 3>, <3, 3>, <4, 2>\}$.

Тогда $D_\rho = \{1, 3, 4\}$, $R_\rho = \{3, 2\}$, $M_\rho = \{1, 2, 3, 4\}$.

Операции над отношениями

Так как отношения являются множествами, то все операции над множествами справедливы для отношений.

Пример 2.9.

$\rho_1 = \{<1, 2>, <2, 3>, <3, 4>\}$.

$\rho_2 = \{<1, 2>, <1, 3>, <2, 4>\}$.

$\rho_1 \cup \rho_2 = \{<1, 2>, <1, 3>, <2, 3>, <2, 4>, <3, 4>\}$.

$\rho_1 \cap \rho_2 = \{<1, 2>\}$.

$\rho_1 \setminus \rho_2 = \{<2, 3>, <3, 4>\}$.

Пример 2.10.

Пусть R – множество действительных чисел. Рассмотрим на этом множестве следующие отношения:

ρ_1 – " ≤ "; ρ_2 – " = "; ρ_3 – " < "; ρ_4 – " ≥ "; ρ_5 – " > ".

Тогда

$\rho_1 = \rho_2 \cup \rho_3$;

$\rho_2 = \rho_1 \cap \rho_4$;

$\rho_3 = \rho_1 \setminus \rho_2$;

$\rho_1 = \overline{\rho_5}$;

Определим еще две операции над отношениями.

Определение 2.7. Отношение называется *обратным* к отношению ρ (обозначается ρ^{-1}), если

$\rho^{-1} = \{<x, y> \mid <y, x> \in \rho\}$.

Пример 2.11.

$\rho = \{<1, 2>, <2, 3>, <3, 4>\}$.

$\rho^{-1} = \{<2, 1>, <3, 2>, <4, 3>\}$.

Пример 2.12.

$\rho = \{<x, y> \mid x - y = 2,\ x, y \in R\}$.

$\rho^{-1} = \{<x, y> \mid < y, x> \in \rho\} = \rho^{-1} = \{<x, y> \mid y - x = 2, x, y \in R\} = \{<x, y> \mid -x + y = 2,\ x, y \in R\}$.

Определение 2.8. *Композицией двух отношений* ρ *и* σ называется отношение

$\sigma \circ \rho = \{<x, z> \mid$ существует такое y, что $<x, y> \in \rho$ и $< y, z> \in \sigma\}$.

Пример 2.13.

$\rho = \{<x, y> \mid y = sinx\}$.

$\sigma = \{<x, y> \mid y = \sqrt{x}\}$.

$\sigma \circ \rho = \{<x, z> \mid$ существует такое y, что $<x, y> \in \rho$ и $< y, z> \in \sigma\} = \{<x, z> \mid$ существует такое y, что $y = sinx$ и $z = \sqrt{y}\} = \{<x, z> \mid z = \sqrt{sinx}\}$.

Определение композиции двух отношений соответствует определению сложной функции:

$y = f(x),\ z = g(y) \Rightarrow z = g(f(x))$.

Пример 2.14.

$\rho = \{<1, 1>, <1, 2>, <1, 3>, <3, 1>\}$.

$\sigma = \{<1, 2>, <1, 3>, <2, 2>, <3, 2>, <3, 3>\}$.

Процесс нахождения $\sigma \circ \rho$ в соответствии с определением композиции удобно изобразить таблицей, в которой реализуется перебор всех возможных значений x, y, z. для каждой пары $<x, y> \in \rho$ нужно рассмотреть все возможные пары $< y, z> \in \sigma$ (табл. 2.1).

Таблица 2.1

$<x, y> \in \rho$	$< y, z> \in \sigma$	$<x, z> \in \sigma \circ \rho$
<1, 1>	<1, 2>	<1, 2>
<1, 1>	<1, 3>	<1, 3>
<1, 2>	<2, 2>	<1, 2>
<1, 3>	<3, 2>	<1, 2>
<1, 3>	<3, 3>	<1, 3>
<3, 1>	<1, 2>	<3, 2>
<3, 1>	<1, 3>	<3, 3>

Заметим, что первая, третья и четвертая, а также вторая и пятая строки последнего столбца таблицы содержат одинаковые пары. Поэтому получим:

$\sigma \circ \rho = \{<1, 2>, <1, 3>, <3, 2>, <3, 3>\}$.

Свойства отношений

Определение 2.9. Отношение ρ называется *рефлексивным* на множестве X, если для любого $x \in X$ выполняется $x\rho x$.

Из определения следует, что всякий элемент $< x, x > \in \rho$.

Пример 2.15.

а) Пусть X – конечное множество, $X = \{1, 2, 3\}$ и $\rho = \{<1, 1>, <1, 2>, <2, 2>, <3, 1>, <3, 3>\}$. Отношение ρ рефлексивно. Если X – конечное множество, то главная диагональ матрицы рефлексивного отношения содержит только единицы. Для нашего примера

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

б) Пусть X – множество действительных чисел и ρ отношение равенства. Это отношение рефлексивно, т.к. каждое число равно самому себе.

в) Пусть X – множество людей и ρ отношение "жить в одном городе". Это отношение рефлексивно, т.к. каждый живет в одном городе сам с собой.

Определение 2.10. Отношение ρ называется *симметричным* на множестве X, если для любых $x, y \in X$ из $x\rho y$ следует $y\rho x$.

Очевидно, что ρ симметрично тогда и только тогда, когда $\rho = \rho^{-1}$.

Пример 2.16.

а) Пусть X – конечное множество, $X = \{1, 2, 3\}$ и $\rho = \{<1, 1>, <1, 2>, <1, 3>, <2, 1>, <3, 1>, <3, 3>\}$. Отношение ρ симметрично. Если X – конечное множество, то матрица симметричного отношения симметрична относительно главной диагонали. Для нашего примера

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

б) Пусть X – множество действительных чисел и ρ отношение равенства. Это отношение симметрично, т.к. если x равно y, то и y равно x.

в) Пусть X – множество студентов и ρ отношение "учиться в одной группе". Это отношение симметрично, т.к. если x учится в одной группе с y, то и y учится в одной группе с x.

Определение 2.11. Отношение ρ называется *транзитивным* на множестве X, если для любых $x, y, z \in X$ из $x\rho y$ и $y\rho z$ следует $x\rho z$.

Одновременное выполнение условий $x\rho y$, $y\rho z$, $x\rho z$ означает, что пара $<x, z>$ принадлежит композиции $\rho\circ\rho$. Поэтому для транзитивности ρ необходимо и достаточно, чтобы множество $\rho\circ\rho$ являлось подмножеством ρ, т. е. $\rho\circ\rho \subseteq \rho$.

Пример 2.17.

а) Пусть X – конечное множество, $X = \{1, 2, 3\}$ и $\rho = \{<1, 1>, <1, 2>, <2, 3>, <1, 3>\}$. Отношение ρ транзитивно, т. к. наряду с парами $<x, y>$ и $<y, z>$ имеется пара $<x, z>$. Например, наряду с парами $<1, 2>$, и $<2, 3>$ имеется пара $<1, 3>$.

б) Пусть X – множество действительных чисел и ρ отношение $\le$ (меньше или равно). Это отношение транзитивно, т.к. если $x \le y$ и $y \le z$, то $x \le z$.

в) Пусть X – множество людей и ρ отношение "быть старше". Это отношение транзитивно, т.к. если x старше y и y старше z, то x старше z.

Определение 2.12. Отношение ρ называется *отношением эквивалентности* на множестве X, если оно рефлексивно, симметрично и транзитивно на множестве X.

Пример 2.18.

а) Пусть X – конечное множество, $X = \{1, 2, 3\}$ и $\rho = \{<1, 1>, <2, 2>, <3, 3>\}$. Отношение ρ является отношением эквивалентности.

б) Пусть X – множество действительных чисел и ρ отношение равенства. Это отношение эквивалентности.

в) Пусть X – множество студентов и ρ отношение "учиться в одной группе". Это отношение эквивалентности.

Пусть ρ – отношение эквивалентности на множестве X.

Определение 2.13. Пусть ρ – отношение эквивалентности на множестве X и $x \in X$. *Классом эквивалентности*, порожденным элементом x, называется подмножество множества X, состоящее из тех элементов $y \in X$, для которых $x\rho y$. Класс эквивалентности, порожденный элементом x, обозначается через $[x]$.

Таким образом, $[x] = \{y \in X \mid x\rho y\}$.

Классы эквивалентности образуют *разбиение* множества X, т. е. систему непустых попарно непересекающихся его подмножеств, объединение которых совпадает со всем множеством X.

Пример 2.19.

а) Отношение равенства на множестве целых чисел порождает следующие классы эквивалентности: для любого элемента x из этого множества $[x] = \{x\}$, т.е. каждый класс эквивалентности состоит из одного элемента.

б) Класс эквивалентности, порожденный парой $<x, y>$ определяется соотношением:

$$[<x, y>] = \left\{ \langle u, v\rangle \mid \frac{x}{y} = \frac{u}{v} \right\}.$$

Каждый класс эквивалентности, порожденный парой $<x, y>$, определяет одно рациональное число.

в) Для отношения принадлежности к одной студенческой группе классом эквивалентности является множество студентов одной группы.

Определение 2.14. Отношение ρ называется *антисимметричным* на множестве X, если для любых $x, y \in X$ из $x\rho y$ и $y\rho x$ следует $x = y$.

Из определения антисимметричности следует, что всякий раз, когда пара $<x, y>$ принадлежит одновременно ρ и ρ^{-1}, должно выполняться равенство $x = y$. Другими словами, $\rho \cap \rho^{-1}$ состоит только из пар вида $< x, x >$.

Пример 2.20.

а) Пусть X – конечное множество, $X = \{1, 2, 3\}$ и $\rho = \{<1, 1>, <1, 2>, <1, 3>, <2, 2>, <2, 3>, <3, 3>\}$. Отношение ρ антисимметрично.

Отношение $\sigma = \{<1, 1>, <1, 2>, <1, 3>, <2, 1>, <2, 3>, <3, 3>\}$ неантисимметрично. Например, $<1, 2> \in \sigma$, и $<2, 1> \in \sigma$, но $1 \neq 2$.

б) Пусть X – множество действительных чисел и ρ отношение $\leq$ (меньше или равно). Это отношение антисимметрично, т.к. если $x \leq y$, и $y \leq x$, то $x = y$.

Определение 2.15. Отношение ρ называется *отношением частичного порядка* (или просто частичным порядком) на множестве X, если оно рефлексивно, антисимметрично и транзитивно на множестве X. Множество X в этом случае называют частично упорядоченным и указанное отношение часто обозначают символом $\leq$, если это не приводит к недоразумениям.

Отношение, обратное отношению частичного порядка будет, очевидно, отношением частичного порядка.

Пример 2.21.

а) Пусть X – конечное множество, $X = \{1, 2, 3\}$ и $\rho = \{<1, 1>, <1, 2>, <1, 3>, <2, 2>, <2, 3>, <3, 3>\}$. Отношение ρ есть отношение частичного порядка.

б) Отношение $A \subseteq B$ на множестве подмножеств некоторого множества U есть отношение частичного порядка.

в) Отношение делимости на множестве натуральных чисел есть отношение частичного порядка.

Функции. Основные понятия и определения

В математическом анализе принято следующее определение функции.

Переменная y называется функцией от переменной x, если по некоторому правилу или закону каждому значению x соответствует одно определенное значение $y = f(x)$. Область изменения переменной x называется областью определения функции, а область изменения переменной y – областью значений функции. Если одному значению x соответствует несколько (и даже бесконечно много значений y), то функция называется многозначной. Впрочем, в курсе анализа функций действительных переменных избегают многозначных функций и рассматривают однозначные функции.

Рассмотрим другое определение функции с точки зрения отношений.

Определение 2.16. *Функцией* называется любое бинарное отношение, которое не содержит двух пар с равными первыми компонентами и различными вторыми.

Такое свойство отношения называется *однозначностью* или *функциональностью*.

Пример 2.22.

а) {<1, 2>, <3, 4>, <4, 4>, <5, 6>} – функция.

б) $\{<x, y>: x, y \in R, y = x^2\}$ – функция.

в) {<1, 2>, <1, 4>, <4, 4>, <5, 6>} – отношение, но не функция.

Определение 2.17. Если f – функция, то D_f – *область определения*, а R_f – *область значений* функции f.

Пример 2.23.

Для примера 2.22 а) D_f – {1, 3, 4, 5}; R_f – {2, 4, 6}.

Для примера 2.22 б) $D_f = R_f = (-\infty, \infty)$.

Каждому элементу $x \in D_f$ функция ставит в соответствие *единственный* элемент $y \in R_f$. Это обозначается хорошо известной записью $y = f(x)$. Элемент x называется аргументом функции или прообразом элемента y при функции f, а элемент y значением функции f на x или образом элемента x при f.

Итак, из всех отношений функции выделяются тем, что каждый элемент из области определения имеет *единственный* образ.

Определение 2.18. Если $D_f = X$ и $R_f = Y$, то говорят, что функция f определена на X и принимает свои значения на Y, а f называют *отображением множества X на Y* ($X \to Y$).

Определение 2.19. Функции f и g равны, если их область определения – одно и то же множество D, и для любого $x \in D$ справедливо равенство $f(x) = g(x)$.

Это определение не противоречит определению равенства функций как равенства множеств (ведь мы определили функцию как отношение, т. е. множество): множества f и g равны, тогда и только тогда, когда они состоят из одних и тех же элементов.

Определение 2.20. Функция (отображение) f называется *сюръективной* или просто *сюръекцией*, если ля любого элемента $y \in Y$ существует элемент $x \in X$, такой, что $y = f(x)$.

Таким образом, каждая функция f является сюръективным отображением (сюръекцией) $D_f \to R_f$.

Если f – сюръекция, а X и Y – конечные множества, то $|X| \geq |Y|$.

Определение 2.21. Функция (отображение) f называется *инъективной* или просто *инъекцией* или *взаимно однозначной*, если из $f(a) = f(b)$ следует $a = b$.

Определение 2.22. Функция (отображение) f называется *биективной* или просто *биекцией*, если она одновременно инъективна и сюръективна.

Если f – биекция, а X и Y – конечные множества, то $|X| = |Y|$.

Определение 2.23. Если область значений функции D_f состоит из одного элемента, то f называется *функцией-константой*.

Пример 2.24.

а) $f(x) = x^2$ есть отображение множества действительных чисел на множество неотрицательных действительных чисел. Т.к. $f(-a) = f(a)$, и $a \neq -a$, то эта функция не является инъекцией.

б) Для каждого $x \in R = (-\infty, \infty)$ функция $f(x) = 5$ – функция-константа. Она отображает множество R на множество $\{5\}$. Эта функция сюръективна, но не инъективна.

в) $f(x) = 2x + 1$ является инъекцией и биекцией, т.к. из $2x_1 + 1 = 2x_2 + 1$ следует $x_1 = x_2$.

Определение 2.24. Функция, реализующая отображение $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n \to Y$ называется *n-местной* функцией.

Пример 2.25.

а) Сложение, вычитание, умножение и деление являются двуместными функциями на множестве R действительных чисел, т. е. функциями типа $R^2 \to R$.

б) $f(x, y) = \dfrac{x}{y}$ – двуместная функция, реализующая отображение $R \times (R \setminus \{0\}) \to R$. Эта функция не является инъекцией, т.к. $f(1, 2) = f(2, 4)$.

в) Таблица выигрышей лотереи задает двуместную функцию, устанавливающую соответствие между парами из N^2 (N – множество натуральных чисел) и множеством выигрышей.

Поскольку функции являются бинарными отношениями, то можно находить обратные функции и применять операцию композиции. Композиция любых двух функций есть функция, но не для каждой функции f отношение f^{-1} является функцией.

Пример 2.26.

а) $f = \{\langle 1, 2\rangle, \langle 2, 3\rangle, \langle 3, 4\rangle, \langle 4, 2\rangle\}$ – функция.

Отношение $f^{-1} = \{\langle 2, 1\rangle, \langle 3, 2\rangle, \langle 4, 3\rangle, \langle 2, 4\rangle\}$ не является функцией.

б) $g = \{\langle 1, a\rangle, \langle 2, b\rangle, \langle 3, c\rangle, \langle 4, D\rangle\}$ – функция.

$g^{-1} = \{\langle a, 1\rangle, \langle b, 2\rangle, \langle c, 3\rangle, \langle D, 4\rangle\}$ тоже функция.

в) Найдем композицию функций f из примера а) и g^{-1} из примера б). Имеем $g^{-1}f = \{\langle a, 2\rangle, \langle b, 3\rangle, \langle c, 4\rangle, \langle d, 2\rangle\}$.

$fg^{-1} = \varnothing$.

Заметим, что $(g^{-1}f)(a) = f(g^{-1}(a)) = f(1) = 2$; $(g^{-1}f)(c) = f(g^{-1}(c)) = f(3) = 4$.

Элементарной функцией в математическом анализе называется всякая функция f, являющаяся композицией конечного числа арифметических функций, а также следующих функций:

1) Дробно-рациональные функции, т.е. функции вида

$a_0 + a_1x + ... + a_nx^n$

$b_0 + b_1x + ... + b_mx^m$.

2) Степенная функция $f(x) = x^m$, где m – любое постоянное действительное число.

3) Показательная функция $f(x) = e^x$.

4) логарифмическая функция $f(x) = log_ax$, $a > 0$, $a \neq 1$.

5) Тригонометрические функции *sin, cos, tg, ctg, sec, csc*.

6) Гиперболические функции *sh, ch, th, cth*.

7) Обратные тригонометрические функции *arcsin*, *arccos* и т.д.

Например, функция $log^2(x^3 + sincos3x)$ является элементарной, т.к. она есть композиция функций $cosx$, $sinx$, x^3, $x_1 + x_2$, $logx$, x^2.

Выражение, описывающее композицию функций, называется формулой.

Для многоместной функции справедлив следующий важный результат, полученный А. Н. Колмогоровым и В. И. Арнольдом в 1957 г. и являющийся решением 13-ой проблемы Гильберта:

Теорема. Всякая непрерывная функция n переменных представима в виде композиции непрерывных функций двух переменных.

Способы задания функций

1. Наиболее простой способ задания функций – это таблицы (табл. 2.2):

Таблица 2.2

x	x_1	x_2	...	x_n
$f(x)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	...	$f(x_n)$

Пример 2.27.

Бросается игральная кость. Пусть k – число выпавших очков, а $p(k)$ – вероятность того, что при случайном бросании кости выпадет k очков, $k = 1, 2, ..., 6$.

В этом случае функция $p(k)$ может быть задана следующей таблицей (табл. 2.3):

Таблица 2.3

k	1	2	3	4	5	6
$p(k)$	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

Однако, таким образом могут быть заданы функции, определенные на конечных множествах.

Если функция, определенная на бесконечном множестве (отрезке, интервале), задана в конечном числе точек, например, в виде тригонометрических таблиц, таблиц специальных функций и т.п., то для вычисления значений функций в промежуточных точках пользуются правилами интерполяции.

2. Функция может быть задана в виде формулы, описывающей функцию как композицию других функций. Формула задает последовательность вычисления функции.

Пример 2.28.

$f(x) = sin(x + \sqrt{x})$ является композицией следующих функций:

$g(y) = \sqrt{y}$; $h(u, v) = u + v$; $w(z) = sinz$.

3. Функция может быть задана в виде *рекурсивной процедуры.* Рекурсивная процедура задает функцию, определенную на множестве натуральных чисел, т. е. $f(n)$, $n = 1, 2,...$ следующим образом: а) задается значение $f(1)$ (или $f(0)$); б) значение $f(n + 1)$ определяется через композицию $f(n)$ и других известных функций. Простейшим примером рекурсивной процедуры является вычисление $n!$: а) $0! = 1$; б) $(n + 1)! = n!(n + 1)$. Многие процедуры численных методов являются рекурсивными процедурами.

4. Возможны способы задания функции, не содержащие способа вычисления функции, а только описывающие ее. Например:

$$f_M(x) = \begin{cases} 1, \text{если } x \in M, \\ 0, \text{если } x \notin M. \end{cases}$$

Функция $f_M(x)$ – характеристическая функция множества M.

Итак, по смыслу нашего определения, задать функцию f – значит задать отображение $X \to Y$, т.е. определить множество $X \times Y$, поэтому вопрос сводится к заданию некоторого множества. Однако можно определить понятие функции, не используя языка теории множеств, а именно: функция считается заданной, если задана вычислительная процедура, которая по заданному значению аргумента находит соответствующее значение функции. Функция, определенная таким образом, называется *вычислимой.*

Пример 2.29.

Процедура определения *чисел Фибоначчи*, задается соотношением

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad (n \geq 2) \tag{2.1}$$

с начальными значениями $F_0 = 1$, $F_1 = 1$.

Формула (2.1) вместе с начальными значениями определяет следующий ряд чисел Фибоначчи:

n	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 ...
F_n	1 1 2 3 5 8 13 21 34 55 89 144 ...

Вычислительная процедура определения значения функции по заданному значению аргумента есть не что иное, как *алгоритм*.

2.3.3 Графы

Первая работа по теории графов принадлежащая Эйлеру, появилась в 1736 году. Вначале эта теория была связана с математическими головоломками и играми. Однако впоследствии теория графов стала использоваться в топологии, алгебре, теории чисел. В наше время теория графов находит применение в самых разнообразных областях науки, техники и практической деятельности. Она используется при проектировании электрических сетей, планировании транспортных перевозок, построении молекулярных схем. Применяется теория графов также в экономике, психологии, социологии, биологии.

Основные характеристики графов

Граф G - это математический объект, состоящий из множества *вершин* $X = \{x_1, x_2,..., x_n\}$ и множества *ребер* $A = \{a_1, a_2,..., a_n\}$. Таким образом, граф полностью определяется совокупностью множеств X, A: $G = (X, A)$.

Для многих задач несущественно, являются ли ребра отрезками прямых или криволинейными дугами; важно лишь то, какие вершины соединяет каждое ребро.

Если ребрам графа приданы направления от одной вершины к другой, то такой граф называется *ориентированным*. Ребра ориентированного графа называются *дугами*. Соответствующие вершины ориентированного графа называют *началом* и *концом*. Если направления ребер не указываются, то граф называется *неориентированным* (или просто графом).

Пример 3.1.

На рис. 3.1 изображен неориентированный граф $G =(X, A)$.

$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$,

$A = \{a_1= (x_1, x_2), a_2=(x_2, x_3), a_3=(x_1, x_3), a_4= (x_3, x_4)\}$.

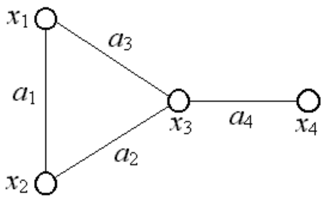


Рис. 3.1.

Пример 3.2.

На рис. 3.2. изображен ориентированный граф $G = (X, A)$.

$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$,

$A = \{a_1 = (x_1 , x_2), a_2 = (x_1 , x_3), a_3 = (x_3 , x_4), a_4 = (x_3 , x_2)\}$.

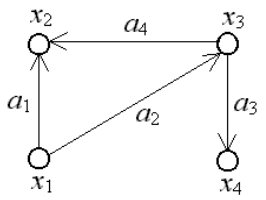


Рис. 3.2.

Граф, имеющий как ориентированные, так и неориентированные ребра, называется *смешанным*.

Различные ребра могут соединять одну и ту же пару вершин. Такие ребра называют *кратными*. Граф, содержащий кратные ребра, называется *мультиграфом*.

Неориентированное ребро графа эквивалентно двум противоположно направленным дугам, соединяющим те же самые вершины.

Ребро может соединять вершину саму с собой. Такое ребро называется *петлей*. Граф с кратными ребрами и петлями называется *псевдографом*.

Множество ребер графа может быть пустым. Множество вершин графа не может быть пустым.

Пример 3.3.

На рис. 3.3. изображен ориентированный граф $G = (X, A)$.

$X = \{x_1 , x_2 , x_3 , x_4 \}$,

$A = \varnothing$.

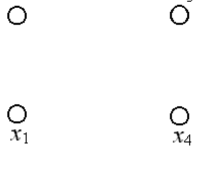


Рис. 3.3.

Как в случае ориентированного, так и в случае неориентированного ребра говорят, что вершины x и y *инцидентны* ребру a, если эти вершины соединены a.

Две вершины называются *смежными*, если они инцидентны одному и тому же ребру. Два ребра называются *смежными*, если они имеют общую вершину.

Степенью вершины графа называется число ребер, инцидентных этой вершине. Вершина, имеющая степень 0, называется *изолированной*, а степень 1 – *висячей*.

Для ориентированного графа множество вершин, в которые ведут дуги, исходящие из вершины x, обозначают $G(x)$, то есть $G(x) = \{ y: (x \ y) \in G\}$. Множество $G(x)$ называют *образом* вершины x. Соответственно $G^{-1}(y)$ – множество вершин, из которых исходят дуги, ведущие в вершину y, $G^{-1}(y) = \{x: (x , y) \in G\}$. Множество $G^{-1}(y)$ называют *прообразом* вершины y.

Пример 3.4.

В графе, изображенном на рис. 3.1, концами ребра a_1 являются вершины x_1, x_2; вершина x_2 инцидентна ребрам a_1, a_2; степень вершины x_3 равна 3; вершины x_1 и x_3 смежные; ребра a_1 и a_2 смежные; вершина x_4 висячая. В ориентированном графе, изображенном на рис. 3.2, началом дуги a_1 является вершина x_1, а ее концом - вершина x_2; вершина x_1 инцидентна дугам a_1 и a_2; $G(x_1) = \{x_2, x_3\}$, $G(x_2) =\varnothing$, $G^{-1}(x_3) = \{x_1\}$, $G^{-1}(x_1) = \varnothing$.

Подграфом неориентированного графа G называется граф, все вершины и ребра которого содержатся среди вершин и ребер графа G. Аналогично определяется подграф ориентированного графа. Подграф называется *собственным*, если он отличен от самого графа,

Граф $G = (X, A)$ - *полный*, если для любой пары вершин x_i и x_j существует ребро (x_i, x_j).

Граф $G = (X, A)$ - *симметрический*, если для любой дуги (x_i, x_j) существует противоположно ориентированная дуга (x_j, x_i).

Граф $G = (X, A)$ - *планарный*, если он может быть изображен на плоскости так, что не будет пересекающихся дуг.

Неориентированный граф $G = (X, A)$ – *двудольный*, если множество его вершин X можно разбить на два такие подмножества X_1 и X_2, что каждое ребро имеет один конец в X_1, а другой в X_2.

Матричные способы задания графов

Для алгебраического задания графов используются матрицы смежности и инцидентности.

Матрица смежности $A = (a_{ij})$ определяется одинаково для ориентированного и неориентированного графов. Это квадратная матрица порядка n, где n - число вершин, у которой

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{если } (x_i x_j) \in A, \\ 0, \text{если } (x_i, x_j) \notin A. \end{cases}$$

Пример 3.5.

Матрица смежности графа, изображенного на рис. 3.1, имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Пример 3.6.

Матрица смежности ориентированного графа, изображенного на рис. 3.2, имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Матрица смежности полностью задает граф.

Матрицей инцидентности $B = (b_{ij})$ ориентированного графа называется прямоугольная матрица $(n \times m)$, где n – число вершин, m – число ребер, у которой

$$b_i = \begin{cases} 1, \text{если вершина } x_i \text{ является началом дуги } a_j; \\ -1, \text{если вершина } x_i \text{ является концом дуги } a_j; \\ 0, \text{если вершина } x_i \text{ не инцидентна дуге } a_j; \end{cases}$$

Для неориентированного графа матрица инцидентности B задается следующим образом:

$$b_i = \begin{cases} 1, \text{если вершина } x_i \text{ инцидентна ребру } a_j; \\ 0, \text{если вершина } x_i \text{ не инцидентна ребру } a_j. \end{cases}$$

Пример 3.7.

Матрица инцидентности графа, изображенного на рис. 3.1, имеет вид:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Пример 3.8.

Матрица инцидентности ориентированного графа, изображенного на рис. 3.2, имеет вид:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Матрица инцидентности, также, как и матрица смежности, полностью задает граф.

Матрицы смежности и инцидентности удобны для задания графов на ЭВМ.

Основные свойства матриц смежности и инцидентности

1. Матрица смежности неориентированного графа является симметричной. Для ориентированного графа это, вообще говоря, неверно.

2. Сумма элементов i - ой строки или i -го столбца матрицы смежности неориентированного графа равна степени вершины x_i.

3. Сумма элементов i - ой строки матрицы смежности ориентированного графа равна числу дуг, исходящих из x_i.

4. Сумма элементов i - го столбца матрицы смежности ориентированного графа равна числу дуг, входящих в вершину x_i.

5. Сумма строк матрицы инцидентности ориентированного графа является нулевой строкой.

Итак, возможны следующие различные способы задания графа:

а) посредством графического изображения;

б) указанием множества вершин и множества ребер (дуг);

в) матрицей смежности;

г) матрицей инцидентности.

Изоморфизм графов

Графы $G_1 = (X_1, A_1)$ и $G_2 = (X_2, A_2)$ *изоморфны*, если существует взаимно однозначное соответствие между множествами вершин X_1 и X_2, такое, что любые две вершины одного графа соединены тогда и только тогда, когда соответствующие вершины соединены в другом графе.

Пример 3.9

Графы, изображенные на рис. 3.4 являются изоморфными.

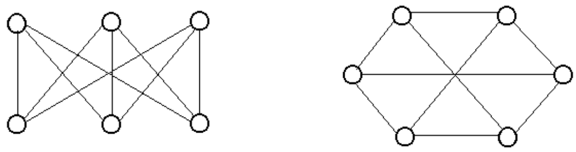


Рис. 3.4

Изоморфные графы отличаются только нумерацией вершин. Матрицы смежности двух изоморфных графов могут быть получены одна из другой перестановкой строк и столбцов. Чтобы узнать, являются ли два графа изоморфными, нужно произвести все возможные перестановки строк и столбцов матрицы смежности одного из графов. Если после какой-нибудь перестановки получится матрица смежности второго графа, то эти графы изоморфны. Чтобы убедиться, что графы неизоморфны, надо выполнить все $n!$ возможных перестановок строк и столбцов.

Маршруты, циклы в неориентированном графе

Пусть G - неориентированный граф. *Маршрутом* или *цепью* в G называется такая последовательность (конечная или бесконечная) ребер a_1, a_2,... a_n..., что каждые соседние два ребра a_i и a_{i+1} имеют общую инцидентную вершину. Одно и то же ребро может встречаться в маршруте несколько раз. В конечном маршруте $(a_1,a_2,...a_n)$ имеется первое ребро a_1 и последнее ребро a_n. Вершина x_1, инцидентная ребру a_1, но не инцидентная ребру a_2, называется началом маршрута, а вершина x_n, инцидентная ребру a_n, но не инцидентная ребру a_{n-1}, называется концом маршрута.

Длиной (или *мощностью*) маршрута называется число ребер, входящих в маршрут, причем каждое ребро считается столько раз, сколько оно входит в данный маршрут.

Пример 3.10.

В изображенном на рис. 3.5 графе рассмотрим два маршрута из вершины x_1 в вершину x_4: $M_1 = (a_1, a_2, a_4)$ и $M_2 = (a_1, a_2, a_5, a_6)$. Длина маршрута M_1 равна 3, а длина маршрута M_2 равна 4.

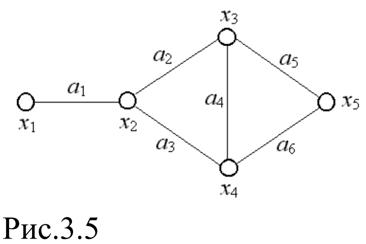


Рис.3.5

Замкнутый маршрут называется *циклом.*

Маршрут (цикл), в которой все ребра различны, называется *простой цепью* (циклом). Маршрут (цикл), в которой все вершины, (кроме первой и последней), различны, называется *элементарной цепью* (циклом).

Пример 3.11.

В приведенном на рис 3.6 графе выделим следующие маршруты:

(a_1,a_3,a_4) – простая элементарная цепь длины 3, т.к. все ребра и вершины попарно различны;

(a_2,a_4,a_3) – простой элементарный цикл, т.к. это замкнутый маршрут, у которого все ребра и вершины, кроме первой и последней, различны;

(a_1,a_2,a_4,a_3) – цепь, которая является простой, но не элементарной, т.к. все ребра различны, но вершина x_2 встречается дважды;

(a_1,a_2,a_2) –маршрут длины 3, не являющийся ни простой, ни элементарной цепью, т.к. ребро a_2 и вершина x_2 встречаются дважды.

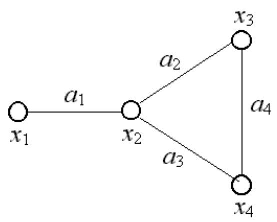


Рис.3.6

Пути, контуры в ориентированном графе

Понятия пути, контура в ориентированном графе аналогичны понятиям маршрута, цикла в неориентированном графе.

Путем ориентированного графа называется последовательность дуг, в которой конечная вершина всякой дуги, отличной от последней, является начальной вершиной следующей дуги.

Число дуг пути называется *длиной* пути.

Путь называется *контуром*, если его начальная вершина совпадает с конечной вершиной**.**

Путь (контур), в котором все дуги различны, называется *простым*.

Путь (контур), в котором все вершины, кроме первой и последней, различны, называется *элементарным.*

Следует усвоить, что понятиям ребра, маршрута, цепи, цикла в неориентированном графе соответствуют понятия дуги, пути, ориентированной цепи, контура в ориентированном графе. Для лучшего запоминания приведем эти термины в таблице.

Неориентирован-ный граф	Ориентированный граф
ребро маршрут цикл	дуга путь контур

Пример 3.12.

В приведенном на рис 3.7 графе выделим следующие пути:

(x_1,x_2,x_3,x_4) – простой элементарный путь, т.к. каждая вершина и каждая дуга используются не более одного раза;

(x_2,x_5,x_6,x_7,x_2) – простой элементарный контур, т.к. это замкнутый путь, в котором все дуги и вершины, кроме первой и последней, различны.

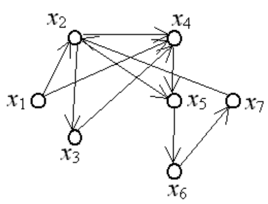


Рис. 3.7

Связность графа

Неориентированный граф называется *связным*, если каждая пара различных вершин может быть соединена по крайней мере одной цепью.

Ориентированный граф называется *сильно связным*, если для любых двух его вершин x_i и x_j существует хотя бы один путь, соединяющий x_i с x_j.

Ориентированный граф называется *односторонне связным*, если для любых двух его вершин по крайней мере одна достижима из другой.

Компонентой связности неориентированного графа называется его связный подграф, не являющийся собственным подграфом никакого другого связного подграфа данного графа (максимально связный подграф).

Компонентой сильной связности ориентированного графа называется его сильно связный подграф, не являющийся собственным подграфом никакого другого сильно связного подграфа данного графа (максимально сильно связный подграф).

Компонентой одностронней связности неориентированного графа называется его односторонне связный подграф, не являющийся собственным подграфом никакого другого односторонне связного подграфа данного графа (максимально односторонне связный подграф).

Пусть $G = (X, A)$ неориентированный граф с множеством вершин $X = \{x_1,...,x_n\}$. Квадратная матрица $S = (s_{ij})$ порядка n, у которой

$$s_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если вершины } x_i \text{ и } x_j \text{ принадлежат одной компоненте связности,} \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

называется *матрицей связности* графа G.

Для ориентированного графа квадратная матрица $T = (t_{ij})$ порядка n, у которой

$$t_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если существует путь из } x_i \text{ в } x_j, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

называется *матрицей односторонней связности (достижимости)*.

Квадратная матрица $S = (s_{ij})$ порядка n, у которой

$$s_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если существует путь из } x_i \text{ в } x_j \text{ и из } x_j \text{ в } x_i, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

называется *матрицей сильной связности*.

Пример 3.13.

У неориентированного графа, изображенного на рис. 3.8 две компоненты связности. Первая компонента связности включает вершины x_1, x_2, x_4, x_5, а вторая состоит из одной вершины x_3.

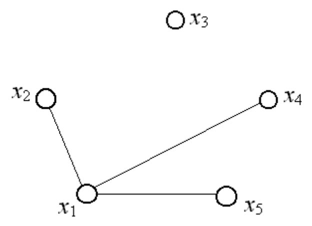


Рис.3.8

Матрица связности этого графа имеет вид:

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Мы видим, что 1-ая, 2-ая, 4-ая и 5-ая строки матрицы S одинаковы.

Пример 3.14.

У ориентированного графа, изображенного на рис. 3.9 две компоненты сильной связности. Первая компонента связности включает вершины x_1, x_2, x_3, x_5, а вторая состоит из одной вершины x_4. Действительно, для любой пары вершин из множества $\{x_1, x_2, x_3, x_5\}$ существует хотя бы один путь, соединяющий эти вершины. Например, путь $(x_1, x_2, x_5, x_3, x_1)$ соединяет все эти вершины. Из вершины x_4 нет пути ни в одну вершину графа.

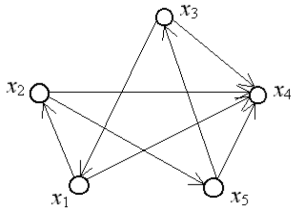


Рис. 3.9

Матрица сильной связности этого графа имеет вид:

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Мы видим, что 1-ая, 2-ая, 3-ая и 5-ая строки матрицы S одинаковы.

Экстремальные пути в нагруженных ориентированных графах

Ориентированный граф называется *нагруженным***,** если дугам этого графа поставлены в соответствие веса, так что дуге (x_i,x_j) сопоставлено некоторое число $c(x_i,x_j) = c_{ij}$, называемое *длиной* **(**или *весом***,** или *стоимостью* дуги**)**. *Длиной* (или *весом* или *стоимостью*) пути s, состоящего из некоторой последовательности дуг (x_i,x_j), называется число $l(s)$, равное сумме длин дуг, входящих в этот путь, т.е.

$$l(s) = \sum c_{ij},$$

причем суммирование ведется по всем дугам $(x_i, x_j) \in s$.

Матрица $C = (c_{ij})$ называется *матрицей длин дуг* или *матрицей весов*.

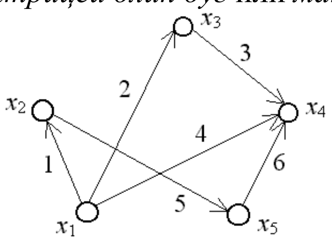


Рис. 3.10

Для графа, изображенного на рис. 3.10, матрица C имеет вид:

$$C = \begin{pmatrix} \infty & 1 & 2 & 4 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 5 \\ \infty & \infty & \infty & 3 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 6 & \infty \end{pmatrix}$$

Длина пути (x_1, x_2, x_5, x_4) равна $1 + 5 + 6 = 12$.

Для ненагруженного графа введем понятие *кратчайшего пути*. Это путь с минимальным общим числом дуг, причем каждая дуга считается столько раз, сколько она содержится в этом пути.

Для нахождения минимального пути между двумя произвольными вершинами для случая, когда все $c_{ij} \geq 0$ можно воспользоваться простым алгоритмом Дейкстры [2]. В общем случае задача решается с помощью алгоритмов Флойда, Форда, Беллмана и др. [2,3,5].

Алгоритмы нахождения минимального пути могут быть использованы для поиска кратчайших путей в ориентированном графе без контуров. Для этого нужно каждой дуге приписать вес, равный единице.

Алгоритм Форда – Беллмана нахождения минимального пути

Предполагается, что ориентированный граф не содержит контуров отрицательной длины.

Алгоритм 3.1 (Алгоритм Форда – Беллмана).

Основными вычисляемыми величинами этого алгоритма являются величины □$_j(k)$, где $i = 1, 2, \ldots , n$ (n – число вершин графа); $k = 1, 2, \ldots , n - 1$. Для фиксированных i и k величина □$_j(k)$ равна длине минимального пути, ведущего из заданной начальной вершины x_1 в вершину x_i и содержащего не более k дуг.

Шаг 1. Установка начальных условий.

Ввести число вершин графа n и матрицу весов $C = (c_{ij})$.

Шаг 2. Положить $k = 0$. Положить □$_i(0) = \infty$ для всех вершин, кроме x_1; положить □$_1(0) = 0$.

Шаг 3. В цикле по k, $k = 1,..., n - 1$, каждой вершине x_i на k-ом шаге приписать индекс □$_i(k)$ по следующему правилу:

$$□_i(k) = \min_{1 \leq j \leq n} \{□_j(k-1) + c_{ji}\} \qquad (3.1)$$

для всех вершин, кроме x_1, положить □$_1(k) = 0$.

В результате работы алгоритма формируется таблица индексов □$_i(k)$, $i = 1, 2, \ldots , n$, $k = 0, 1, 2, \ldots , n - 1$. При этом □$_i(k)$ определяет длину минимального пути из первой вершины в i-ую, содержащего не более k дуг.

Шаг 5. Восстановление минимального пути.

Для любой вершины x_s предшествующая ей вершина x_r определяется из соотношения:

$$□_r(n-2) + c_{rs} = □_s(n-1), \qquad x_r \in G^{-1}(x_s), \qquad (3.2)$$

где $G^{-1}(x_s)$ - прообраз вершины x_s.

Для найденной вершины x_r предшествующая ей вершина x_q определяется из соотношения:

$$□_q(n-3) + c_{qr} = □_r(n-2), \qquad x_q \in G^{-1}(x_r),$$

где $G^{-1}(x_r)$ - прообраз вершины x_r, и т. д.

Последовательно применяя это соотношение, начиная от последней вершины x_i, найдем минимальный путь.

Пример 3.15.

С помощью алгоритма *3.1* найдем минимальный путь из вершины x_1 в вершину x_3 в графе, изображенном на рис. 3.10.

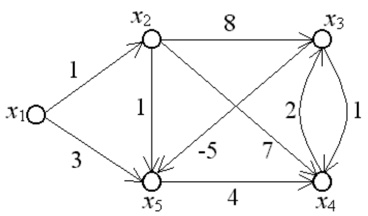


Рис. 3.10

Рассмотрим подробно работу алгоритма Форда – Беллмана для этого примера. Значения индексов □$_i(k)$ будем заносить в таблицу индексов (табл. 3.1).

Шаг 1. Введем число вершин графа n =5. Матрица весов этого графа имеет вид:

$$C = \begin{pmatrix} \infty & 1 & \infty & \infty & 3 \\ \infty & \infty & 8 & 7 & 1 \\ \infty & \infty & \infty & 1 & -5 \\ \infty & \infty & 2 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 4 & \infty \end{pmatrix}.$$

Шаг 2. Положим $k = 0$, $\square_1(0) = 0$, $\square_2(0) = \square_3(0) = \square_4(0) = \square_5(0) = \infty$. Эти значения занесем в первый столбец табл. 3.1.

Шаг 3.

<u>$k = 1$</u>.

$\square_1(1) = 0$.

Равенство (7.1) для $k = 1$ имеет вид:

$\square_i(1) = \min\limits_{1 \le j \le 5} \{\square_j(0) + c_{ji}\}$.

$\square_2(1) = min\{\square_1(0) + c_{12}; \square_2(0) + c_{22}; \square_3(0) + c_{32}; \square_4(0) + c_{42}; \square_5(0) + c_{52};\} = min\{0 + 1; \infty + \infty; \infty + \infty; \infty + \infty; \infty + \infty\} = 1$.

$\square_3(1) = min\{\square_1(0) + c_{13}; \square_2(0) + c_{23}; \square_3(0) + c_{33}; \square_4(0) + c_{43}; \square_5(0) + c_{53};\} = min\{0 + \infty ; \infty + 8; \infty + \infty; \infty + 2; \infty + \infty\} = \infty$.

$\square_4(1) = min\{\square_1(0) + c_{14}; \square_2(0) + c_{24}; \square_3(0) + c_{34}; \square_4(0) + c_{44}; \square_5(0) + c_{54};\} = min\{0 + \infty ; \infty + 7; \infty + 1; \infty + \infty; \infty + 4\} = \infty$.

$\square_5(1) = min\{\square_1(0) + c_{15}; \square_2(0) + c_{25}; \square_3(0) + c_{35}; \square_4(0) + c_{45}; \square_5(0) + c_{55};\} = min\{0 + 3; \infty + 1; \infty - 5; \infty + \infty; \infty + \infty\} = 3$.

Полученные значения $\square_i(1)$ занесем во второй столбец табл. 3.1. Убеждаемся, что второй столбец, начиная со второго элемента, совпадает с первой строкой матрицы весов, что легко объясняется смыслом величин $\square_i(1)$, которые равны длине минимального пути из первой вершины в i-ую, содержащего не более одной дуги.

<u>$k = 2.$</u>

$\square_1(2) = 0$.

Равенство (3.1) для $k = 2$ имеет вид:

$\square_i(2) = \min\limits_{1 \le j \le 5} \{\square_j(1) + c_{ji}\}$.

$\square_2(2) = min\{0 + 1; 1 + \infty; \infty + \infty; \infty + \infty; 3 + \infty\} = 1$.

$\square_3(2) = min\{0 + \infty ; 1 + 8; \infty + \infty; \infty + 2; 3 + \infty\} = 9$.

$\square_4(2) = min\{0 + \infty ; 1 + 7; \infty + 1; \infty + \infty; 3 + 4\} = 7$.

$\square_5(2) = min\{0 + 3; 1 + 1; \infty - 5; \infty + \infty; 3 + \infty\} = 2$.

Полученные значения $\square_i(2)$ занесем в третий столбец табл. 3.1. Величины $\square_i(2)$ равны длине минимального пути из первой вершины в i-ую, содержащего не более двух дуг.

<u>$k = 3.$</u>

$\square_1(3) = 0$.

Равенство (3.1) для $k = 3$ имеет вид:

$\square_i(3) = \min\limits_{1 \le j \le 5} \{\square_j(2) + c_{ji}\}$.

$\square_2(3) = min\{0 + 1; 1 + \infty; 9 + \infty; 7 + \infty; 2 + \infty\} = 1$.

$\square_3(3) = min\{0 + \infty ; 1 + 8; 9 + \infty; 7 + 2; 2 + \infty\} = 9$.

$\square_4(3) = min\{0 + \infty ; 1 + 7; 9 + 1; 7 + \infty; 2 + 4\} = 6$.

$\square_5(3) = min\{0 + 3; 1 + 1; 9 - 5; 7 + \infty; 2 + \infty\} = 2$.

Полученные значения $\square_i(3)$ занесем в четвертый столбец табл. 3.1. Величины $\square_i(3)$ равны длине минимального пути из первой вершины в i-ую, содержащего не более трех дуг.

<u>$k = 4.$</u>

$\square_1(4) = 0$.

Равенство (3.1) для $k = 4$ имеет вид:

$\square_i(4) = \min\limits_{1 \le j \le 5} \{\square_j(3) + c_{ji}\}$.

$\lambda_2(4) = min\{0 + 1;\ 1 + \infty; 9 + \infty; 6 + \infty; 2 + \infty\} = 1.$

$\lambda_3(4) = min\{0 + \infty ; 1 + 8; 9 + \infty; 6 + 2; 2 + \infty\} = 8 .$

$\lambda_4(4) = min\{0 + \infty ; 1 + 7; 9 + 1; 6 + \infty; 2 + 4\} = 6 .$

$\lambda_5(4) = min\{0 + 3;\ 1 + 1; 9 – 5; 6 + \infty; 2 + \infty\} = 2.$

Полученные значения $\lambda_i(4)$ занесем в пятый столбец табл. 3.1. Величины $\lambda_i(4)$ равны длине минимального пути из первой вершины в i-ую, содержащего не более четырех дуг.

Таблица 3.1

I (номер вершины)	$\lambda_i(0)$	$\lambda_i(1)$	$\lambda_i(2)$	$\lambda_i(3)$	$\lambda_i(4)$
1	0	0	0	0	0
2	∞	1	1	1	1
3	∞	∞	9	9	8
4	∞	∞	7	6	6
5	∞	3	2	2	2

Шаг 5. Восстановление минимального пути.

Для последней вершины x_3 предшествующая ей вершина x_r определяется из соотношения (3.2) полученного при s =3:

$\lambda_r(3) + c_{r3} = \lambda_3(4), \quad x_r \in G^{-1}(x_3),$ (3.3)

где $G^{-1}(x_3)$ - прообраз вершины x_3.

$G^{-1}(x_3) = \{x_2, x_4\}.$

Подставим в (3.3) последовательно r = 2 и r = 4, чтобы определить, для какого r это равенство выполняется:

$\lambda_2(3) + c_{23} = 1 + 8 \neq \lambda_3(4) = 8,$

$\lambda_4(3) + c_{43} = 6 + 2 = \lambda_3(4) = 8.$

Таким образом, вершиной, предшествующей вершине x_3, является вершина x_4.

Для вершины x_4 предшествующая ей вершина x_r определяется из соотношения (3.2) полученного при s =4:

$\lambda_r(2) + c_{r4} = \lambda_4(3), \quad x_r \in G^{-1}(x_4),$ (3.4)

где $G^{-1}(x_4)$ - прообраз вершины x_4.

$G^{-1}(x_4) = \{x_2, x_3, x_5\}.$

Подставим в (3.4) последовательно r = 2, r = 3 и r = 5, чтобы определить, для какого r это равенство выполняется:

$\lambda_2(2) + c_{24} = 1 + 7 \neq \lambda_4(3) = 6,$

$\lambda_3(2) + c_{34} = 1 + 1 \neq \lambda_4(3) = 6,$

$\lambda_5(2) + c_{54} = 2 + 4 = \lambda_4(3) = 6,$

Таким образом, вершиной, предшествующей вершине x_4, является вершина x_5.

Для вершины x_5 предшествующая ей вершина x_r определяется из соотношения (3.2) полученного при s =5:

$\lambda_r(1) + c_{r5} = \lambda_5(2), \quad x_r \in G^{-1}(x_5),$ (3.5)

где $G^{-1}(x_5)$ - прообраз вершины x_5.

$G^{-1}(x_5) = \{x_1, x_2\}.$

Подставим в (3.5) последовательно r = 1 и r = 2, чтобы определить, для какого r это равенство выполняется:

$\lambda_1(1) + c_{15} = 0 + 3 \neq \lambda_5(2) = 2,$

$\lambda_2(1) + c_{25} = 1 + 1 = \lambda_5(2) = 2,$

Таким образом, вершиной, предшествующей вершине x_5, является вершина x_2.

Для вершины x_2 предшествующая ей вершина x_r определяется из соотношения (3.2) полученного при s =2:

$\lambda_r(0) + c_{r2} = \lambda_2(1), \quad x_r \in G^{-1}(x_2),$ (3.6)

где $G^{-1}(x_2)$ - прообраз вершины x_2.

$G^{-1}(x_2) = \{x_1\}$.

Подставим в (3.6) $r = 1$, чтобы определить, выполняется ли это равенство:

$\square_1(0) + c_{12} = 0 + 1 = \square_2(1) = 1$.

Таким образом, вершиной, предшествующей вершине x_2, является вершина x_1.

Итак, найден минимальный путь – x_1, x_2, x_5, x_4, x_3, его длина равна 8.

Алгоритм нахождения максимального пути

При решении некоторых практических задач возникает необходимость поиска максимального пути (пути с наибольшей суммой длин дуг). Такая задача сводится к задаче нахождения минимального пути заменой знаков при длинах дуг (в матрице весов C) на противоположные. При этом необходимым является требование отсутствия в ориентированном графе контуров положительной длины.

Пример 3.16.

С помощью модифицированного алгоритма 3.1 найдем максимальный путь из вершины x_1 в вершину x_3 в графе, изображенном на рис. 3.11.

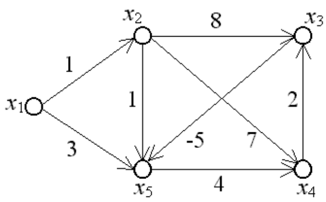


Рис. 3.11

Шаг 1. Введем число вершин графа $n = 5$. Матрица весов этого графа после замены знаков при длинах дуг на противоположные имеет вид:

$$C = \begin{pmatrix} \infty & -1 & \infty & \infty & -3 \\ \infty & \infty & -8 & -7 & -1 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 5 \\ \infty & \infty & -2 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & -4 & \infty \end{pmatrix}.$$

Шаг 2. Положим $k = 0$, $\square_1(0) = 0$, $\square_2(0) = \square_3(0) = \square_4(0) = \square_5(0) = \infty$. Эти значения занесем в первый столбец табл. 3.2.

Шаг 3.

$\underline{k = 1}$.

$\square_1(1) = 0$.

Равенство (3.1) для $k = 1$ имеет вид:

$\square_i(1) = \min\limits_{1 \le j \le 5} \{\square_j(0) + c_{ji}\}$.

$\square_2(1) = min\{\square_1(0) + c_{12}; \square_2(0) + c_{22}; \square_3(0) + c_{32}; \square_4(0) + c_{42}; \square_5(0) + c_{52};\} = min\{0 - 1; \infty + \infty; \infty + \infty; \infty + \infty; \infty + \infty\} = -1$.

$\square_3(1) = min\{\square_1(0) + c_{13}; \square_2(0) + c_{23}; \square_3(0) + c_{33}; \square_4(0) + c_{43}; \square_5(0) + c_{53};\} = min\{0 + \infty; \infty - 8; \infty + \infty; \infty - 2; \infty + \infty\} = \infty$.

$\square_4(1) = min\{\square_1(0) + c_{14}; \square_2(0) + c_{24}; \square_3(0) + c_{34}; \square_4(0) + c_{44}; \square_5(0) + c_{54};\} = min\{0 + \infty; \infty - 7; \infty + \infty; \infty + \infty; \infty - 4\} = \infty$.

$\square_5(1) = min\{\square_1(0) + c_{15}; \square_2(0) + c_{25}; \square_3(0) + c_{35}; \square_4(0) + c_{45}; \square_5(0) + c_{55};\} = min\{0 - 3; \infty - 1; \infty + 5; \infty + \infty; \infty + \infty\} = -3$.

Полученные значения $\square_i(1)$ занесем во второй столбец табл. 3.2. Убеждаемся, что второй столбец, начиная со второго элемента, совпадает с первой строкой матрицы весов, что легко объясняется смыслом величин $\square_i(1)$, которые равны длине минимального пути из первой вершины в i-ую, содержащего не более одной дуги.

$\underline{k = 2.}$

$\square_1(2) = 0$.

Равенство (3.1) для $k = 2$ имеет вид:

$\lambda_i(2) = \min\limits_{1 \le j \le 5} \{\lambda_j(1) + c_{ji}\}$.

$\lambda_2(2) = min\{0 - 1; -1 + \infty; \infty + \infty; \infty + \infty; -3 + \infty\} = -1$.

$\lambda_3(2) = min\{0 + \infty ; -1 - 8; \infty + \infty; \infty - 2; -3 + \infty\} = -9$.

$\lambda_4(2) = min\{0 + \infty ; -1 - 7; \infty + \infty; \infty + \infty; -3 - 4\} = -8$.

$\lambda_5(2) = min\{0 - 3; -1 - 1; \infty + 5; \infty + \infty; -3 + \infty\} = -3$.

Полученные значения $\lambda_i(2)$ занесем в третий столбец табл. 3.2. Величины $\lambda_i(2)$ равны длине минимального пути из первой вершины в i-ую, содержащего не более двух дуг.

<u>$k = 3$.</u>

$\lambda_1(3) = 0$.

Равенство (3.1) для $k = 3$ имеет вид:

$\lambda_i(3) = \min\limits_{1 \le j \le 5} \{\lambda_j(2) + c_{ji}\}$.

$\lambda_2(3) = min\{0 - 1; -1 + \infty; -9 + \infty; -8 + \infty; -3 + \infty\} = -1$.

$\lambda_3(3) = min\{0 + \infty ; -1 - 8; -9 + \infty; -8 - 2; -3 + \infty\} = -10$.

$\lambda_4(3) = min\{0 + \infty ; -1 - 7; -9 + \infty; -8 + \infty; -3 - 4\} = -8$.

$\lambda_5(3) = min\{0 - 3; -1 - 1; -9 + 5; -8 + \infty; -3 + \infty\} = -4$.

Полученные значения $\lambda_i(3)$ занесем в четвертый столбец табл. 3.2. Величины $\lambda_i(3)$ равны длине минимального пути из первой вершины в i-ую, содержащего не более трех дуг.

<u>$k = 4$.</u>

$\lambda_1(4) = 0$.

Равенство (3.1) для $k = 4$ имеет вид:

$\lambda_i(4) = \min\limits_{1 \le j \le 5} \{\lambda_j(3) + c_{ji}\}$.

$\lambda_2(4) = min\{0 - 1; -1 + \infty ; -10 + \infty; -8 + \infty; -4 + \infty\} = -1$.

$\lambda_3(4) = min\{0 + \infty ; -1 - 8; -10 + \infty; -8 - 2; -4 + \infty\} = -10$.

$\lambda_4(4) = min\{0 + \infty ; -1 - 7; -10 + \infty; -8 + \infty; -4 - 4\} = -8$.

$\lambda_5(4) = min\{0 - 3; -1 - 1; -10 + 5; -8 + \infty; -4 + \infty\} = -5$.

Полученные значения $\lambda_i(4)$ занесем в пятый столбец табл. 3.2. Величины $\lambda_i(4)$ равны длине минимального пути из первой вершины в i-ую, содержащего не более четырех дуг.

Таблица 3.2

i(номер вершины)	$\lambda_i(0)$	$\lambda_i(1)$	$\lambda_i(2)$	$\lambda_i(3)$	$\lambda_i(4)$
1	0	0	0	0	0
2	∞	-1	-1	-1	1
3	∞	∞	-9	-10	-10
4	∞	∞	-8	-8	-8
5	∞	-3	-3	-4	-5

Заменив в табл. 3.2 отрицательные числа положительными, получим таблицу индексов максимальных путей (табл. 3.3). При этом $\lambda_i(k)$ определяет длину максимального пути из первой вершины в i-ую, содержащего не более k дуг.

Таблица 3.3

i(номер вершины)	$\lambda_i(0)$	$\lambda_i(1)$	$\lambda_i(2)$	$\lambda_i(3)$	$\lambda_i(4)$
1	0	0	0	0	0
2	∞	1	1	1	1
3	∞	∞	9	10	10
4	∞	∞	8	8	8
5	∞	3	3	4	5

Шаг 5. Восстановление максимального пути производится по тому же правилу, что и для минимального пути.

Длина максимального пути равна 10. Этот путь состоит из трех дуг, т. к. $\square_i(3) = \square_i(4) = 10$. Поэтому в соотношении (3.2) будет выполнено, начиная с $n - 1$.

Учитывая это замечание, для последней вершины x_3 предшествующую ей вершину x_r определим из соотношения (3.2) полученного при $s = 3$:

$\square_r(2) + c_{r3} = \square_3(3),$ (3.7)

$x_r \in G^{-1}(x_3)$, где $G^{-1}(x_3)$ - прообраз вершины x_3.

$G^{-1}(x_3) = \{x_2, x_4\}$.

Подставим в (3.7) последовательно $r = 2$ и $r = 4$, чтобы определить, для какого r это равенство выполняется:

$\square_2(2) + c_{23} = 1 + 8 \neq \square_3(4) = 10,$

$\square_4(2) + c_{43} = 8 + 2 = \square_3(4) = 10.$

Таким образом, вершиной, предшествующей вершине x_3, является вершина x_4.

Для вершины x_4 предшествующая ей вершина x_r определяется из соотношения (3.2) полученного при $s = 4$:

$\square_r(1) + c_{r4} = \square_4(2),$ $x_r \in G^{-1}(x_4),$ (3.8)

где $G^{-1}(x_4)$ - прообраз вершины x_4.

$G^{-1}(x_4) = \{x_2, x_5\}$.

Подставим в (3.8) последовательно $r = 2$, $r = 3$ и $r = 5$, чтобы определить, для какого r это равенство выполняется:

$\square_2(1) + c_{24} = 1 + 7 = \square_4(3) = 8,$

$\square_5(1) + c_{54} = 3 + 4 \neq \square_4(3) = 8,$

Таким образом, вершиной, предшествующей вершине x_4, является вершина x_2.

Для вершины x_2 предшествующая ей вершина x_r определяется из соотношения (3.2) полученного при $s = 2$:

$\square_r(0) + c_{r2} = \square_2(1),$ $x_r \in G^{-1}(x_2),$ (3.9)

где $G^{-1}(x_2)$ - прообраз вершины x_2.

$G^{-1}(x_2) = \{x_1\}$.

Подставим в (3.9) $r = 1$, чтобы определить, выполняется ли это равенство:

$\square_1(1) + c_{12} = 0 + 1 = \square_2(1) = 1.$

Таким образом, вершиной, предшествующей вершине x_2, является вершина x_1.

Итак, найден максимальный путь – x_1, x_2, x_4, x_3, его длина равна 10.

Деревья.. Основные определения

Неориентированным деревом (или просто *деревом*) называется связный граф без циклов. Этому определению эквивалентны, как легко показать, следующие определения:

а) дерево есть связный граф, содержащий n вершин и n - 1 ребер;

б) дерево есть граф, любые две вершины которого можно соединить простой цепью.

Пример 3.17.

Графы, изображенные на рис. 3.12, являются деревьями.

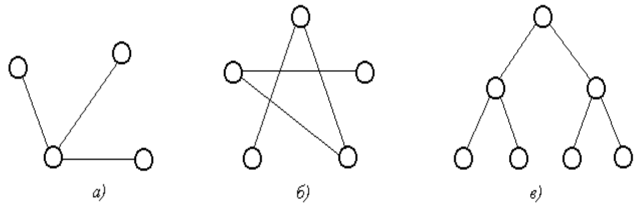


Рис. 3.12

Если граф несвязный и не имеет циклов, то каждая его связная компонента будет деревом. Такой граф называется лесом. Можно интерпретировать рис. 6.1 как лес, состоящий из трех деревьев.

Остовным деревом связного графа G называется любой его подграф, содержащий все вершины графа G и являющийся деревом.

Пример 3.18.

Для графа, изображенного на рис. 3.13а), графы на рис. 3.13б) и 3.13в) являются остовными деревьями.

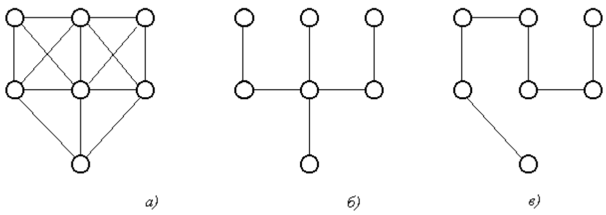


Рис. 3.13

Пусть граф G имеет n вершин и m ребер Так как всякое дерево с n вершинами по определению (см. раздел 6.1) имеет $n - 1$ ребер, то любое остовное дерево графа G получается из этого графа в результате удаления $m - (n - 1) = m - n + 1$ ребер. Число $\gamma = m - n + 1$ называется *цикломатическим числом* графа.

Минимальные остовные деревья нагруженных графов

Граф $G = (X, A)$ называется *нагруженным*, если для каждого ребра (x_i,x_j) определена его длина (или вес) c_{ij}.

Пусть G - связный нагруженный граф. Задача построения *минимального остовного дерева* заключается в том, чтобы из множества остовных деревьев найти дерево, у которого сумма длин ребер минимальна.

Приведем типичные случаи, когда возникает необходимость построения минимального остовного дерева графа.

а) Нужно соединить n городов железнодорожными линиями (автомобильными дорогами, линиями электропередач, сетью трубопроводов и т.д.) так, чтобы суммарная длина линий или стоимость была бы минимальной.

б)Требуется построить схему электрической сети, в которой клеммы должны быть соединены с помощью проводов наименьшей общей длины.

Задачу построения минимального остовного дерева можно решить с помощью следующего алгоритма.

Алгоритм 3.2 (Алгоритм Краскала).

Шаг 1. Установка начальных значений.

Вводится матрица длин ребер C графа G.

Шаг 2. Выбрать в графе G ребро минимальной длины. Построить граф G_2, состоящий из данного ребра и инцидентных ему вершин. Положить $i = 2$.

Шаг 3. Если $i = n$, где n - число ребер графа, то закончить работу (задача решена), в противном случае перейти к шагу 4.

Шаг 4. Построить граф G_{i+1}, добавляя к графу G_i новое ребро минимальной длины, выбранное среди всех ребер графа G, каждое из которых инцидентно какой-нибудь вершине графа G_i и одновременно инцидентно какой-нибудь вершине графа G, не содержащейся в G_i. Вместе с этим ребром включаем в G_{i+1} и инцидентную ему вершину, не содержащуюся в G_i. Присваиваем $i := i + 1$ и переходим к шагу 3.

Пример 3.19.

Найдем минимальное остовное дерево для графа, изображенного на рис. 3.14.

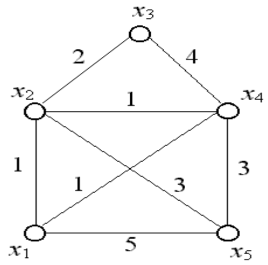


Рис. 3.14

Шаг 1. Установка начальных значений.

Введем матрицу длин ребер C:

$$C = \begin{pmatrix} \infty & 1 & \infty & 1 & 5 \\ 1 & \infty & 2 & 1 & 3 \\ \infty & 2 & \infty & 4 & \infty \\ 1 & 1 & 4 & \infty & 3 \\ 5 & 3 & \infty & 3 & \infty \end{pmatrix}.$$

Шаг 2. Выберем ребро минимальной длины. Минимальная длина ребра равна единице. Таких ребер три: (x_1, x_2), (x_1, x_4), (x_2, x_4). В этом случае можно взять любое. Возьмем (x_1, x_2). Построим граф G_2, состоящий из данного ребра и инцидентных ему вершин x_1 и x_2. Положим $i = 2$.

Шаг 3. Так как $n = 5$, то $i \neq n$, поэтому переходим к шагу 4.

Шаг 4. Строим граф G_3, добавляя к графу G_2 новое ребро минимальной длины, выбранное среди всех ребер графа G, каждое из которых инцидентно одной из вершин x_1, x_2 и одновременно инцидентно какой-нибудь вершине графа G, не содержащейся в G_2 т. е. одной из вершин x_3, x_4, x_5. Таким образом, нужно выбрать ребро минимальной длины из ребер (x_1, x_4), (x_1, x_5), (x_2, x_3), (x_2, x_4), (x_2, x_5). Таких ребер длины единица два: (x_1, x_4) и (x_2, x_4). Можно выбрать любое. Возьмем (x_1, x_4). Вместе с этим ребром включаем в G_3 вершину x_4, не содержащуюся в G_2. Полагаем $i = 3$ и переходим к шагу 3.

Шаг 3. Так как $i \neq n$, поэтому переходим к шагу 4.

Шаг 4. Строим граф G_4, добавляя к графу G_3 новое ребро минимальной длины из ребер (x_1, x_5), (x_2, x_3), (x_2, x_5), (x_4, x_5). Такое ребро длины два одно: (x_2, x_3). Вместе с этим ребром включаем в G_4 вершину x_3, не содержащуюся в G_3. Полагаем $i = 4$ и переходим к шагу 3.

Шаг 3. Так как $i \neq n$, поэтому переходим к шагу 4.

Шаг 4. Строим граф G_5, добавляя к графу G_3 новое ребро минимальной длины из ребер (x_1, x_5), (x_2, x_5), (x_4, x_5). Таких ребер длины три два: (x_2, x_5) и (x_4, x_5). Возьмем (x_2, x_5). Вместе с этим ребром включаем в G_5 вершину x_5, не содержащуюся в G_4. Полагаем $i = 5$ и переходим к шагу 3.

Шаг 3. Так как $i = n$, то граф G_5 – искомое минимальное остовное дерево. Суммарная длина ребер равна $1 + 1 + 2 + 3 = 7$.

Процесс построения минимального остовного дерева изображен на рис. 3.15.

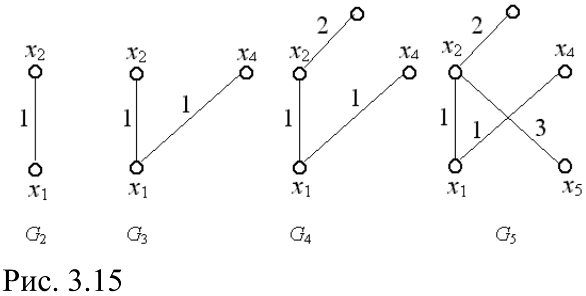


Рис. 3.15

2.3.4 Булевы функции

Определение булевой функции

Определение 1. *Булевой функцией* $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ называется произвольная функция n переменных, аргументы которой $x_1, x_2, \dots, x_n$ и сама функция f принимают значения 0 или 1, т. е. $x_i \in \{0, 1\}$, $i = 1, 2, \dots, n$; $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \{0, 1\}$.

Одной из важнейших интерпретаций теории булевых функций является теория *переключательных функций*. Первоначально математический аппарат теории булевых функций был применен для анализа и синтеза релейно-контактных схем с операциями последовательного и параллельного соединения контактов. Подробнее это приложение теории булевых функций будет рассмотрено в разделе 4.9.

Любая булева функция может быть представлена таблицей, в левой части которой перечислены все наборы переменных (их 2^n), а в правой части – значения функции. Пример такого задания представлен в таблице 4.1.

Таблица 4.1

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Для формирования столбца значений переменных удобен *лексико-графический порядок*, в соответствии с которым каждый последующий набор значений получается из предыдущего прибавлением 1 в двоичной системе счисления, например, 100 = 011+ 1.

Всего существует 2^{2^n} различных булевых функций n переменных.

Функций одной переменной – 4. Из них выделим функцию “отрицание x”(обозначается □x). Эта функция представлена в таблице 4.2.

Таблица 4.2

x	$\neg x$
0	1
1	0

Булевых функций двух переменных – 16 (2^{2^n} при $n = 2$). Те из них, которые имеют специальные названия, представлены в таблице 4.3.

Таблица 4.3

x_1	x_2	$x_1 \vee x_2$	$x_1 \& x_2$	$x_1 \supset x_2$	$x_1 \sim x_2$	$x_1 \oplus x_2$	$x_1 \downarrow x_2$	$x_1 \mid x_2$
0	0	0	0	1	1	0	1	1
0	1	1	0	1	0	1	0	1
1	0	1	0	0	0	1	0	1
1	1	1	1	1	1	0	0	0

В таблице 4.3 представлены следующие функции двух переменных:

$x_1 \vee x_2$ – *дизъюнкция*;

$x_1 \& x_2$ – *конъюнкция*;

x_1□x_2 – *импликация*;

$x_1 \sim x_2$ – *эквивалентность*;

x_1□ x_2 – *сложение по модулю 2;*

$x_1 \downarrow x_2$ – *стрелка Пирса*;

$x_1 \mid x_2$ – *штрих Шеффера*.

Остальные функции специальных названий не имеют и могут быть выражены через перечисленные выше функции.

Формулы логики булевых функций

Определение 2. *Формула логики булевых функций* определяется индуктивно следующим образом:

1. Любая переменная, а также константы 0 и 1 есть формула.
2. Если A и B – формулы, то $\neg A, A \vee B, A \& B, A \supset B, A \sim B$ есть формулы.
3. Ничто, кроме указанного в пунктах 1–2, не есть формула.

Пример 4.1.

Выражение $(\neg x \vee y) \& ((y \supset z) \sim x)$ является формулой.

Выражение $\neg x \& y \supset z \neg \sim x$ не является формулой.

Часть формулы, которая сама является формулой, называется *подформулой.*

Пример 4.2.

$x \& (y \supset z)$ – формула; $y \supset z$ – ее подформула.

Определение 3. Функция f есть *суперпозиция* функций $f_1, f_2, \dots, f_n$ если f получается с помощью подстановок этих формул друг в друга и переименованием переменных.

Пример 4.3.

$f_1 = x_1 \& x_2$ (конъюнкция); $f_2 = \neg x$ (отрицание).

Возможны две суперпозиции:

1) $f = f_1(f_2) = (\square x_1) \& (\square x_2)$ – конъюнкция отрицаний;

2) $f = f_2(f_1) = \square (x_1 \& x_2)$ – отрицание конъюнкции.

Порядок подстановки задается формулой.

Всякая формула задает способ вычисления функции, если известны значения переменных.

Пример 4.4.

Построим таблицу значений функции $f(x_1, x_2, x_3) = \neg(x_2 \supset \neg x_3) \sim (\neg x_1 \vee x_2)$.

Таблица 4.4 представляет последовательное вычисление этой функции.

Таблица 4.4

x_1 x_2 x_3	$\neg x_3$	$x_2 \supset \neg x_3$	$\neg(x_2 \supset \neg x_3)$	$\neg x_1$	$\neg x_1 \vee x_2$	$f(x_1, x_2, x_3)$
0 0 0	1	1	0	1	1	0
0 0 1	0	1	0	1	1	0
0 1 0	1	1	0	1	1	0
0 1 1	0	0	1	1	1	1
1 0 0	1	1	0	0	0	1
1 0 1	0	1	0	0	0	1
1 1 0	1	1	0	0	1	0
1 1 1	0	0	1	0	1	1

Таким образом, формула каждому набору аргументов ставит в соответствие значение функции. Следовательно, формула так же, как и таблица, может служить способом задания функции. В дальнейшем формулу будем отождествлять с функцией, которую она реализует. Последовательность вычислений функции задается скобками. Принято соглашение об опускании скобок в соответствии со следующей приоритетностью операций: $\neg$, &, $\vee$, $\supset$ и $\sim$.

Равносильные преобразования формул

В отличие от табличного задания представление функции формулой не единственно. Например, две различные формулы

$\neg x_1 \vee \neg x_2$ и $\neg(x_1 \& x_2)$

реализуют одну функцию – штрих Шеффера.

Две формулы, реализующие одну и ту же функцию, называются *равносильными*.

Равносильность формул A и B будем обозначать следующтм образом: A □ B.

Для того, чтобы установить равносильность формул, можно составить таблицы значений функции для каждой формулы и сравнить их. Для равносильных формул эти таблицы совпадают. Другой способ установления равносильности формул заключается в использовании некоторых установленных равносильностей булевых формул.

Основные равносильности булевых формул.

Для любых формул A, B, C справедливы следующие равносильности:

1. *Коммутативность*.

а) $A\&B \equiv B\&A$ (для конъюнкции);

б) $A \vee B \equiv B \vee A$ (для дизъюнкции).

2. *Ассоциативность*.

а) $A\&(B\&C) \equiv (A\&C)\&C$ (для конъюнкции);

б) $A \vee (B \vee C) \equiv (A \vee B) \vee C$ (для дизъюнкции).

3. *Дистрибутивность*.

а) $A\&(B \vee C) \equiv A\&B \vee A\&C$ (для конъюнкции относительно дизъюнкции);

б) $A \vee (B\&C) \equiv (A \vee B)\&(A \vee C)$ (для дизъюнкции относительно конъюнкции).

4. *Закон де Моргана*.

а) $\neg(A\&B) \equiv \neg A \vee \neg B$ (отрицание конъюнкции есть дизъюнкция отрицаний);

б) $\neg(A \vee B) \equiv \neg A\&\neg B$ (отрицание дизъюнкции есть конъюнкция отрицаний).

5. *Идемпотентность*.

а) $A\&A \equiv A$ (для конъюнкции);

б) $A \vee A \equiv A$ (для дизъюнкции).

6. *Поглощение.*

а) $A\&(A \vee B) \equiv A$ (1– ый закон поглощения);

б) $A \vee A\&B \equiv A$ (2– ой закон поглощения).

7. *Расщепление* (склеивание).

а) $A\&B \vee A\&(\neg B) \equiv A$ (1–ый закон расщепления);

б) $(A \vee B)$ & $(A \vee \neg B) \equiv A$ (2–ой закон расщепления).

8. *Двойное отрицание*.

$\neg(\neg A) \equiv A$.

9. *Свойства констант*.

а) $A\&1 \equiv A$; б) $A\&0 \equiv 0$; в) $A \vee 1 \equiv 1$; г) $A \vee 0 \equiv A$; д) $\neg 0 \equiv 1$; е) $\neg 1 \equiv 0$.

10. *Закон противоречия*.

$A\&\neg A \equiv 0$.

11. *Закон “исключенного третьего”.*

$A \vee \neg A \equiv 1$.

Каждая из перечисленных равносильностей может быть доказана с помощью таблиц значений функций, составленных для выражений, стоящих слева и справа от символа “□”. Докажем, например, равносильность 4а. Для этого составим таблицу 4.5.

Таблица 4.5

A	B	$A\&B$	$\neg(A\&B)$	$\neg A$	$\neg B$	$\neg A \vee \neg B$
0	0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1
1	0	0	1	0	1	1
1	1	1	0	0	0	0

Из таблицы 4.5 видно, что $\neg(A\&B) \equiv \neg A \vee \neg B$, что и требовалось доказать.

Следующие важные равносильности показывают, что все логические операции могут быть выражены через операции конъюнкции, дизъюнкции и отрицания:

12. $A \supset B \equiv \neg A \vee B \equiv \neg(A\&\neg B)$.

13. $A \sim B \equiv (A \supset B)\&(B \supset A) \equiv (A\&B) \vee (\neg A\&\neg B) \equiv (A \vee \neg B)\&(\neg A \vee B)$.

14. $A \oplus B \equiv (A \vee \neg B) \vee (\neg A\&B)$.

15. $A \downarrow B \equiv \neg(A \vee B) \equiv \neg A\&\neg B$.

16. $A | B \equiv \neg(A\&B) \equiv \neg A \vee \neg B$.

Используя равносильности 3а и 3б и метод математической индукции, нетрудно получить также следующие равносильности (обобщенные законы дистрибутивности):

17. $(A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_n)\&(B_1 \vee B_2 \vee \ldots \vee B_m) \equiv$
$A_1\&B_1 \vee A_1\&B_2 \vee \ldots \vee A_1\&B_m \vee \ldots \vee A_n\&B_1 \vee A_n\&B_2 \vee \ldots \vee A_n\&B_m$.

18. $(A_1\&A_2\&\ldots\&A_n) \vee (B_1\&B_2\&\ldots\&B_m) \equiv$
$(A_1 \vee B_1)\&(A_1 \vee B_2)\&\ldots\&(A_1 \vee B_m)\&\ldots\&(A_n \vee B_1)\&(A_n \vee B_2)\&\ldots\&(A_n \vee B_m)$.

Используя равносильности 4а и 4б и метод математической индукции, можно получить также следующие равносильности (обобщенные законы де Моргана):

19. $\neg(A_1\&A_2\&\ldots\&A_n) \equiv \neg A_1 \vee \neg A_2 \vee \ldots \vee \neg A_n$.

20. $\neg(A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_n) \equiv \neg A_1\&\neg A_2\&\ldots\&\neg A_n$

В равносильностях 1 – 20 в качестве A, B, A_i, B_i могут быть подставлены любые формулы и, в частности, переменные. Приведем правило, с помощью которого можно переходить от одних равносильностей к другим.

Правило равносильных преобразований

Пусть для формул A и B справедливо утверждение $A \equiv B$. Пусть C_A – формула, содержащая A в качестве своей подформулы. Пусть C_B получается из C_A заменой A на B. Тогда $C_A \equiv C_B$.

Пример 4.5.

Пусть $A = x \supset y$, $B = \neg x \vee y$.

Равносильность 12 позволяет утверждать, что A □B.

Пусть $C_A = (x \supset y)\ \&\ z$, т.е. A есть подформула C_A. Тогда $C_B = (\neg x \vee y)\ \&\ z$ и $C_A \equiv C_B$, т.е. $(x \supset y)\ \&\ z \equiv (\neg x \vee y)\ \&\ z$.

Двойственность. Принцип двойственности.

Символы &, V называются *двойственными*.

Формула A^* называется *двойственной* формуле A, если она получена из A одновременной заменой всех символов &, V на двойственные.

Например,

$A = x \vee (y\&\neg z)$;

$A^* = x\ \&\ (y \vee \neg z)$.

Теорема 4.1. (Принцип двойственности).

Если $A \equiv B$, то $A^* \equiv B^*$.

Принцип двойственности можно использовать для нахождения новых равносильностей. Например, для 1-го закона поглощения (равносильность 6а) имеем:

$A\&(A \vee B) \equiv A$.

Следуя принципу двойственности, получим новую равносильность:

$A \vee A\&B \equiv A$ (2- ой закон поглощения).

Булева алгебра (алгебра логики). Полные системы булевых функций

Как известно, *алгеброй* называют систему, включающую в себя некоторое непустое множество объектов с заданными на нем функциями (операциями), результатами применения которых к объектам данного множества являются объекты того же множества.

Булевой алгеброй или *алгеброй логики* называется двухэлементное множество $B = \{0, 1\}$ вместе с операциями конъюнкции, дизъюнкции и отрицания.

Система булевых функций $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ называется полной, если любая булева функция может быть выражена в виде суперпозиции этих функций. Из равносильностей 12 – 16 (раздел 4.3) следует, что все логические операции могут быть выражены через операции конъюнкции, дизъюнкции и отрицания. Поэтому система функций $\{\neg, \&, \vee\}$ является полной. Также полными являются следующие системы функций:

а) $\{\neg, \vee\}$; б) $\{\neg, \&\}$; в) $\{\neg, \supset\}$.

Полнота систем $\{\neg, \vee\}$ и $\{\neg, \&\}$ следует из полноты системы $\{\neg, \&, \vee\}$, а также законов де Моргана и двойного отрицания, следствием которых является возможность выразить конъюнкцию через дизъюнкцию и наоборот: $A\&B \equiv \neg(\neg A \vee \neg B)$; $A \vee B \equiv \neg(\neg A \& \neg B)$.

Поэтому система $\{\neg, \&, \vee\}$ может быть сокращена на одну функцию:

Полнота системы $\{\neg, \supset\}$ следует из полноты системы $\{\neg, \vee\}$ и равносильности 12 (раздел 4.3), позволяющую выразить импликацию через отрицание и дизъюнкцию: $A \supset B \equiv \neg A \vee B$.

Нормальные формы

Определение 4.4. *Элементарной конъюнкцией* называется конъюнкция (возможно одночленная), составленная из переменных или отрицаний переменных.

Пример 4.6.

$x, y, x\&y, \neg x_1\&x_2\&(\neg x_3)$ – элементарные конъюнкции.

$x \vee y$, $x_1\&\neg x_2 \vee \neg x_1\&x_2$ – не элементарные конъюнкции.

Определение 4.5. *Дизъюнктивной нормальной формой (ДНФ)* называется формула, имеющая вид дизъюнкции элементарных конъюнкций (в вырожденном случае это может быть одна конъюнкция).

Пример 4.7.

x, $x\&y$, $x \vee \neg x\&(\neg y)$, $\neg x_1\&x_2\&(\neg x_3) \vee x_1\&(\neg x_2)\&x_3 \vee x_1\&x_2\&(\neg x_3)$ – ДНФ.

$(x \vee y)\&\neg x$ – не ДНФ.

Определение 4.6. *Совершенной дизъюнктивной нормальной формой (СДНФ)* называется такая дизъюнктивная нормальная форма, каждый конъюнктивный член которой содержит *все* переменные, либо их отрицания.

Пример 4.8.

$x\&y$, $x\&\neg y \vee \neg x\&y$ – СДНФ функции двух переменных.

$x \vee \neg x\&y$, $x \vee y$ – не СДНФ.

Определение 4.7. *Элементарной дизъюнкцией* называется дизъюнкция (возможно одночленная), составленная из переменных или отрицаний переменных.

Пример 4.9.

$x, y, x \vee y, \neg x_1 \vee x_2 \vee (\neg x_3)$ – элементарные дизъюнкции.

$x\&y$, $(x_1 \vee \neg x_2)\ \&\ (\neg x_1 \vee x_2)$ – не элементарные дизъюнкции.

Определение 4.8. *Конъюнктивной нормальной формой (КНФ)* называется формула, имеющая вид конъюнкции элементарных дизъюнкций (в вырожденном случае это может быть одна дизъюнкция).

Пример 4.10.

x, $x\&y$, $x\ \&\ \neg x\&(\neg y)$, $(\neg x_1 \vee x_2)\&(\neg x_3)\&(x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3)$ – КНФ.

$x\&y \vee \neg x$ – не КНФ.

Определение 4.9. *Совершенной конъюнктивной нормальной формой (СКНФ)* называется такая конъюнктивная нормальная форма, каждый дизъюнктивный член которой содержит *все* переменные, либо их отрицания.

Пример 4.11.

$x \vee y$, $(x \vee \neg y) \,\&(\neg x \vee y)$ – СКНФ функции двух переменных.

$x \,\&(\neg x \vee y)$, $x \& y$ – не СКНФ.

Теорема 4.2. Для каждой формулы булевой функции A имеется равносильная ей дизъюнктивная нормальная форма (ДНФ) и конъюнктивная нормальная форма (КНФ).

Доказательство теоремы состоит просто в указании алгоритмов нахождения для любой формулы A равносильных ей ДНФ и КНФ. Процесс нахождения этих форм называется *приведением* формулы A соответственно к ДНФ и КНФ. Для каждой формулы A имеется, вообще говоря, бесконечное множество ДНФ и КНФ, но для решения задач, в которых эти формы нужны, требуется, как правило, найти по крайней мере одну из них.

Алгоритм 4.1 (Алгоритм приведения формул булевых функций к ДНФ (КНФ)).

Шаг 1. Все подформулы A вида $B \supset C$ (т.е. содержащие импликацию) заменяем на $\neg B \vee C$ или на $\neg(B \& \neg C)$ (в соответствии с равносильностью 12 раздела 4.3).

Шаг 2. Все подформулы A вида $B \sim C$ (т.е. содержащие эквивалентность) заменяем на $(A \& B) \vee (\neg A \& \neg B)$ или на $(A \vee \neg B) \& (\neg A \vee B)$ (в соответствии с равносильностью 13).

Шаг 3. Все отрицания, стоящие над сложными подформулами, опускаем по законам де Моргана (в соответствии с равносильностями 4, 19, 20).

Шаг 4. Устраняем все двойные отрицания над формулами (в соответствии с равносильностью 8).

Шаг 5. Осуществляем раскрытие всех скобок по закону дистрибутивности конъюнкции относительно дизъюнкции для ДНФ (в соответствии с равносильностями 3а и 17) или по закону дистрибутивности дизъюнкции относительно конъюнкции для КНФ (в соответствии с равносильностями 3б и 18).

Шаг 6. для получения более простой формулы целесообразно использовать равносильности 5, 6, 7, 9, 10, 11.

Очевидно, что в результате всех указанных операций формула имеет вид ДНФ или КНФ. Указанные операции, вообще говоря, могут осуществляться в любом порядке, однако целесообразно придерживаться изложенного выше, за исключением снятия двойных отрицаний (шаг 4), от которых следует избавляться по мере их появления.

Пример 4.12.

Приведем к ДНФ и КНФ рассмотренную ранее в примере 4.4 формулу $f(x_1, x_2, x_3) = \neg(x_2 \supset \neg x_3) \sim (\neg x_1 \vee x_2)$.

1. Устранив импликацию, получим:

$\neg(\neg x_2 \vee \neg x_3) \sim (\neg x_1 \vee x_2)$.

2. Применив закон де Моргана к первой скобке и сняв двойные отрицания, получим:

$(x_2 \& x_3) \sim (\neg x_1 \vee x_2)$.

3. Устранив эквивалентность, получим:

$(x_2 \& x_3) \,\&\, (\neg x_1 \vee x_2) \vee \neg(x_2 \& x_3) \,\&\, \neg(\neg x_1 \vee x_2)$.

4. Применив закон де Моргана ко второму члену дизъюнкции, получим

$(x_2 \& x_3) \,\&\, (\neg x_1 \vee x_2) \vee (\neg x_2 \vee \neg x_3) \,\&\, (x_1 \& \neg x_2)$.

5. Применив закон дистрибутивности 3а, получим

$(x_2 \& x_3 \& \neg x_1 \vee x_2 \& x_3 \& x_2) \vee (\neg x_2 \& x_1 \& \neg x_2 \vee \neg x_3 \& x_1 \& \neg x_2)$.

6. Применив законы идемпотентности 5а и 5б, и располагая переменные по возрастанию индексов, получим:

$\neg x_1 \& x_2 \& x_3 \vee x_2 \& x_3 \vee x_1 \& \neg x_2 \vee x_1 \& \neg x_2 \& \neg x_3$.

7. Применив 2–ой закон поглощения (6б), вместо $\neg x_1\&x_2\&x_3$.V $x_2\&x_3$ запишем $x_2\&x_3$, а вместо $x_1\&\neg x_2 \vee x_1\&\neg x_2\&\neg x_3$ запишем $x_1\&\neg x_2$ и в результате получим ДНФ нашей формулы:

$f(x_1, x_2, x_3) \equiv x_2\&x_3 \vee x_1\&\neg x_2$

При приведении к КНФ применим закон дистрибутивности 3б и получим:

$x_2\&x_3 \vee x_1\&\neg x_2 \equiv (x_2 \vee x_1) \& (x_2 \vee \neg x_2) \& (x_3 \vee x_1) \& (x_3 \vee \neg x_2)$.

Учитывая, что. $x_2 \vee \neg x_2 \equiv 1$ (равносильность 11), и применив свойство 9а, получим окончательно КНФ для $f(x_1, x_2, x_3)$

$f(x_1, x_2, x_3) \equiv (x_1 \vee x_2) \& (x_1 \vee x_3) \& (\neg x_2 \vee x_3)$.

Приведение некоторой формулы к ДНФ и КНФ не является однозначным. Количество равносильных ДНФ и КНФ, вообще говоря, бесконечно. Однако, совершенные дизъюнктивные и конъюнктивные нормальные формы (СДНФ и СКНФ) или не существуют или единственны.

Теорема 4.3. Каждая формула *А*, не равная тождественно нулю, может быть приведена к СДНФ, которая является единственной с точностью до перестановки дизъюнктивных членов.

Теорема 4.4. Каждая формула *А*, не равная тождественно единице, может быть приведена к СКНФ, которая является единственной с точностью до перестановки конъюнктивных членов.

Доказательство этих теорем состоит в указании алгоритма приведения формулы А к СДНФ и СКНФ.

Алгоритм 4.2. (Алгоритм приведения формулы булевой функции к СДНФ)

Шаг 1. Используя алгоритм построения ДНФ, находим формулу В, являющуюся ДНФ формулы А.

Шаг 2. Вычеркиваем в *В* все элементарные конъюнкции, в которые одновременно входят какая-нибудь переменная и ее отрицание. Это обосновывается равносильностями:

$A\&\neg A \equiv 0, \quad B\&0 \equiv 0, \quad C \vee 0 \equiv C.$

Шаг 3. Если в элементарной конъюнкции формулы *В* некоторая переменная или ее отрицание встречается несколько раз, то оставляем только одно ее вхождение. Это обосновывается законом идемпотентности для конъюнкции: $A\&A \equiv A$.

Шаг 4. Если в элементарную конъюнкцию С формулы В не входит ни переменная *х*, ни ее отрицание $\neg x$, то на основании 1- го закона расщепления (равносильность 7а) заменяем С на $(C\&x) \vee (C\&\neg x)$.

Шаг 5. В каждой элементарной конъюнкции формулы *В* переставляем конъюнктивные члены так, чтобы для каждого *i* (i = 1, ..., n) на *i*-ом месте была либо переменная x_i, либо ее отрицание $\neg x_i$.

Шаг 6. Устраняем возможные повторения конъюнктивных членов согласно закону идемпотентности для дизъюнкции: $C \vee C \equiv C$.

Пример 4.13.

Найдем СДНФ формулы из примера 4.4:

$f(x_1, x_2, x_3) = \neg(x_2 \supset \neg x_3) \sim (\neg x_1 \vee x_2)$.

1. Найденная ранее в примере 4.12 ДНФ формулы $f(x_1, x_2, x_3)$ имеет вид:

$x_2\&x_3 \vee x_1\&\neg x_2$.

2. Шаги 2 и 3 алгоритма не требуются (они уже выполнены), поэтому переходим к шагу 4 и применяем 1-ый закон расщепления. В результате вместо каждого из двух конъюнктивных членов получим две элементарных конъюнкции (всего их будет четыре):

$f(x_1, x_2, x_3) \equiv x_2\&x_3\&x_1 \vee x_2\&x_3\&\neg x_1 \vee x_1\&\neg x_2\&x_3 \vee x_1\&\neg x_2\&\neg x_3)$.

3. После применения шага 5 получим:

$f(x_1, x_2, x_3) \equiv x_1\&x_2\&x_3 \vee \neg x_1\&x_2\&x_3 \vee x_1\&\neg x_2\&x_3 \vee x_1\&\neg x_2\&\neg x_3$.

4. Шаг 6 не требуется. Найденное выражение формулы $f(x_1, x_2, x_3)$ является СДНФ этой формулы.

Алгоритм нахождения СКНФ полностью повторяет алгоритм нахождения СДНФ, если произвести двойственную замену & на V и V на &.

Пример 4.14.

Найдем СКНФ формулы из примера 4.4:

$f(x_1, x_2, x_3) = \neg(x_2 \supset \neg x_3) \sim (\neg x_1 \vee x_2)$.

1. Найденная в примере 4.12 КНФ формулы $f(x_1, x_2, x_3)$ имеет вид:

$f(x_1, x_2, x_3) \equiv (x_1 \vee x_2) \& (x_1 \vee x_3) \& (\neg x_2 \vee x_3)$.

2. Шаги 2 и 3 алгоритма не требуются, поэтому переходим к шагу 4 и применяем 2-ой закон расщепления (равносильность 7б). В соответствии с этим законом:

$x_1 \vee x_2 \equiv (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \& (x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3)$.

$x_1 \vee x_3 \equiv (x_1 \vee x_3 \vee x_2)\&(x_1 \vee x_3 \vee \neg x_2)$.

$\neg x_2 \vee x_3 \equiv (\neg x_2 \vee x_3 \vee x_1) \& (\neg x_2 \vee x_3 \vee \neg x_1)$.

Поэтому имеем:

$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3)\&(x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3)\&(x_1 \vee x_3 \vee x_2)\&(x_1 \vee x_3 \vee \neg x_2)\&(\neg x_2 \vee x_3 \vee x_1)\&(\neg x_2 \vee x_3 \vee \neg x_1)$.

3. Применив шаг 5, получим:

$f(x_1, x_2, x_3) \equiv (x_1 \vee x_2 \vee x_3)\&(x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3)\&(x_1 \vee x_2 \vee x_3)\&(x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3)\&(x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3)\&(\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3)$.

4. Замечаем, что 1-ый и 3-ий, а также 4-ый и 5-ый дизъюнктивные члены полученного выражения совпадают, применяем шаг 6 и получим окончательно СКНФ формулы $f(x_1, x_2, x_3)$:

$f(x_1, x_2, x_3) \equiv (x_1 \vee x_2 \vee x_3)\&(x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3)\&(x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3)\&(\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3)$.

Разложение булевой функции по переменным

Пусть s принимает значения 0 или 1, т.е. $s \in \{0, 1\}$.

Введем обозначение:

$x^s = \neg x$, если $s = 0$, $x^s = x$, если $s = 1$.

Т.е. $x^0 = \neg x$, $x^1 = x$.

Очевидно, что $x^s = 1$, если $x = s$ и $x^s = 0$, если $x \neq s$.

Теорема 4.5 (о разложении булевой функции по переменным).

Каждая булева функция $f(x_1, x_2, \dots , x_n)$ может быть представлена в виде:

$f(x_1, x_2, \dots , x_n) = f(x_1, x_2, \dots , x_m, x_{m+1}, \dots , x_n) =$

$\vee\, x_1^{s1}\&x_2^{s2}\&\dots\&x_m^{sm}\& f(s_1, s_2, \dots s_m, x_{m+1}, \dots , x_n)$, (4.1)

$m \leq n$, где дизъюнкция берется по всем наборам $(s_1, s_2, \dots , s_m)$ (их 2^m).

Например, для $m = 2$, $n = 4$ разложение (4.1) включает в себя четыре ($2^m = 2^2 = 4$) конъюнкции и имеет вид:

$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^0 \& x_2^0 \& f(0, 0, x_3, x_4) \vee x_1^0 \& x_2^1 \& f(0, 1, x_3, x_4) \vee x_1^1 \& x_2^0 \& f(1, 0, x_3, x_4) \vee x_1^1 \& x_2^1 \& f(1, 1, x_3, x_4) = \neg x_1\&\neg x_2\&f(0, 0, x_3, x_4) \vee \neg x_1\&x_2\&f(0, 1, x_3, x_4) \vee x_1\&\neg x_2\&f(1, 0, x_3, x_4) \vee x_1\&x_2\&f(1, 1, x_3, x_4)$.

Доказательство теоремы 4.5.

Теорема будет доказана, если показать, что равенство (4.1) выполняется для произвольного набора переменных $(y_1, y_2, \dots , y_m, y_{m+1}, \dots , y_n)$.

Подставим этот произвольный набор переменных в левую и правую части равенства (4.1).

В левой части получим $f(y_1, y_2, \dots , y_n)$.

Т. к. $y^s = 1$ только, когда $y = s$, то среди 2^m конъюнкций $y_1^{s1}\&y_2^{s2}\&...\&y_m^{sm}$ в правой части (4.1) только одна обратится в 1 – та, в которой $y_1 = s_1,..., y_m = s_m$. Все остальные конъюнкции равны 0. Поэтому в правой части (4.1) получим:

$y_1^{y1}\&y_2^{y2}\&...\&y_m^{ym}\&f(y_1, y_2, ... , y_m, y_{m+1}, ... , y_n) = f(y_1, y_2, ... , y_n)$.

Теорема 4.5 доказана.

Теорема 4.6 (о представлении булевой функции формулой в СДНФ),

Всякая булева функция $f(x_1, x_2, ... , x_n)$, не равная тождественно 0, может быть представлена формулой в СДНФ, которая определяется однозначно с точностью до перестановки дизъюнктивных членов.

Доказательство.

При $m = n$ получим важное следствие теоремы 4.5:

$f(x_1, x_2, ... , x_n) = \mathrm{V}\ x_1^{s1}\&x_2^{s2}\&...\&x_n^{sn}$, (4.2)

$f(s_1, s_2, ... , s_n) = 1$

где дизъюнкция берется по всем наборам $(s_1, s_2, ... , s_n)$, на которых $f = 1$.

Очевидно, что разложение (4.2) есть не что иное, как СДНФ формулы f, которая содержит столько конъюнкций, сколько единиц в таблице значений f. Следовательно, СДНФ для всякой булевой функции единственна с точностью до перестановки ее дизъюнктивных членов.

Очевидно также, что для булевой функции $f(x_1, x_2, ... , x_n)$, тождественно равной 0, разложение (2) не существует.

В силу изложенного для получения формулы булевой функции $f(x_1, x_2, ... , x_n)$ в СДНФ можно воспользоваться следующим алгоритмом.

Алгоритм 4.3. (Алгоритм представления булевой функции, заданной таблицей, формулой в СДНФ).

Шаг 1. Выбираем в таблице все наборы переменных $s_1, s_2, ... , s_n$, для которых значение f равно 1, т. е. $f\ (s_1, s_2, ... , s_n) = 1$.

Шаг 2. Для каждого такого набора (строки таблицы) составляем конъюнкцию $x_1^{s1}\&x_2^{s2}\&...\&x_n^{sn}$, где $x_i^{si} = x_i$, если $s_i = 1$ и $x_i^{si} = \neg x_i$, если $s_i = 0$, $i = 1, 2, ... ,n$.

Шаг 3. Составляем дизъюнкцию всех полученных конъюнкций. В результате получится формула данной функции в СДНФ.

Пример 4.15.

Найдем формулу в СДНФ для функции $f(x_1, x_2, x_3)$, заданной таблицей 4.4.

1. Выберем в таблице строки, где $f(x_1, x_2, x_3) =1$. Это 4-ая, 5-ая. 6-ая и 8-ая строки.

2. Для каждой выбранной строки составляем конъюнкции по правилу, указанному в шаге 2. Получим соответственно для четырех выбранных строк:

$x_1^0\&x_2^1\&x_3^1 = \neg x_1\&x_2\&x_3$.

$x_1^1\&x_2^0\&x_3^0 = x_1\&\neg x_2\&\neg x_3$.

$x_1^1\&x_2^0\&x_3^1 = x_1\&\neg x_2\&x_3$.

$x_1^1\&x_2^1\&x_3^1 = x_1\&x_2\&x_3$.

3. Составляем дизъюнкцию всех полученных конъюнкций и находим СДНФ:

$f(x_1, x_2, x_3) = \neg x_1\&x_2\&x_3 \mathrm{V}\ x_1\&\neg x_2\&\neg x_3 \mathrm{V}\ x_1\&\neg x_2\&x_3 \mathrm{V}\ x_1\&x_2\&x_3$.

Убеждаемся, что это выражение совпадает с полученным ранее в примере 4.13 представлением нашей формулы в СДНФ.

Замечание. Если булева функция задана формулой в СДНФ, то, применяя алгоритм 4.3 в обратной последовательности, легко можем получить таблицу значений этой функции.

Теорема 4.7 (о представлении булевой функции формулой в СКНФ),

Всякая булева функция $f(x_1, x_2, ... , x_n)$, не равная тождественно 1, может быть представлена формулой в СКНФ, которая определяется однозначно с точностью до перестановки дизъюнктивных членов.

Доказательство.

Рассмотрим функцию $\neg f(x_1, x_2, \ldots , x_n)$. В соответствии с теоремой 4.6, если она не равна тождественно 0, существует ее формула в СДНФ. Обозначим эту формулу F_1. Очевидно, условие, что функция $\neg f(x_1, x_2, \ldots , x_n)$ не равна тождественно 0, равносильно условию, что функция $f(x_1, x_2, \ldots , x_n)$ не равна тождественно 1. Кроме того, по закону де Моргана формула $F_2 \equiv \neg F_1$ находится в СКНФ (отрицание конъюнкции есть дизъюнкция отрицаний). По закону двойного отрицания

$F_2 \equiv \neg F_1 \equiv \neg\neg f(x_1, x_2, \ldots , x_n) \equiv f(x_1, x_2, \ldots , x_n)$,

что и доказывает теорему.

Для получения формулы булевой функции $f(x_1, x_2, \ldots , x_n)$ в СКНФ следует воспользоваться следующим алгоритмом.

Алгоритм 4.4. (Алгоритм представления булевой функции, заданной таблицей, формулой в СКНФ)

Шаг 1. Выбираем в таблице все наборы переменных $s_1, s_2, \ldots , s_n$, для которых значение $f(s_1, s_2, \ldots , s_n) = 0$.

Шаг 2. Для каждого такого набора (строки таблицы) составляем дизъюнкцию

$x_1^{\neg s1} \vee x_2^{\neg s2} \vee \ldots \vee x_n^{\neg sn}$, где $x_i^{\neg si} = x_i$, если $s_i = 0$ и $x_i^{\neg si} = \neg x_i$, если $s_i = 1$, $i = 1, 2, \ldots , n$.

Шаг 3. Составляем конъюнкцию всех полученных дизъюнкций. В результате получится СКНФ.

Пример 4.16.

Найдем формулу в СКНФ для функции $f(x_1, x_2, x_3)$, заданной таблицей 4.4.

1. Выберем в таблице строки, где $f(x_1, x_2, x_3) = 0$. Это 1-ая, 2-ая и 3-я и 7-ая строки.

2. Для каждой выбранной строки составляем дизъюнкции по правилу, указанному в шаге 2. Получим соответственно для трех выбранных строк:

$x_1^1 \vee x_2^1 \vee x_3^1 = x_1 \vee x_2 \vee x_3$.

$x_1^1 \vee x_2^1 \vee x_3^0 = x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3$.

$x_1^1 \vee x_2^0 \vee x_3^1 = x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3$.

$x_1^0 \vee x_2^0 \vee x_3^1 = \neg x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3$.

3. Составляем конъюнкцию всех полученных дизъюнкций и находим СКНФ:

$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \& (x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3) \& (x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3) \& (\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3)$.

Это выражение совпадает с полученным ранее в примере 4.14 представлением нашей формулы в СКНФ.

Замечание. Т. к. всего строк в таблице функции 2^n, то, если число дизъюнктивных членов в СДНФ равно p, а число конъюнктивных членов в СКНФ равно q, то $p+q=2^n$.

Так, для функции, рассмотренной в примерах 4.15 и 4.16, $n = 3$, $p = 4$, $q = 4$, $p + q = 8 = 2^3$.

Минимизация формул булевых функций в классе дизъюнктивных нормальных форм

Как было установлено выше, произвольная булева функция может быть представлена формулой в ДНФ и КНФ, причем такое представление неоднозначно. Равносильными преобразованиями можно получить формулу, содержащую меньшее число вхождений переменных. Например, две различные формулы: $f_1(x_1, x_2) = x_1 \vee x_1 \& x_2 \vee \neg x_2$ и $f_2(x_1, x_2) = x_1 \vee \neg x_2$ равносильны, так как в силу 2-го закона поглощения (равносильность 6б из раздела 4.3) $x_1 \vee x_1 \& x_2 \equiv x_1$.

Но в формуле $f_1(x_1, x_2)$ содержится четыре вхождений переменных, а в формуле $f_2(x_1, x_2)$ – два.

Определение 4.10. ДНФ называется *минимальной,* если она содержит наименьшее общее число вхождений переменных среди всех равносильных ей ДНФ.

Определение 4.11. *Импликантом* булевой функции $f(x_1, x_2, \ldots , x_n)$ называется элементарная конъюнкция С, не равная тождественно 0, такая что $C \vee f \equiv f$. Отметим, что любая конъюнкция любой ДНФ в силу закона идемпотентности (равносильность 5б) является импликантом этой функции.

Определение 4.12. Импликант C функции f называется *простым импликантом*, если после отбрасывания любой переменной из C получается элементарная конъюнкция, не являющаяся импликантом функции f.

Пример 4.17.

Для функции $x\&y\vee x\&z\vee x\&y\&z \equiv x\&(y\vee z)$ конъюнкции $x\&y$ и $x\&z$ – простые импликанты, а $x\&y\&z$ – импликант, но не простой.

Определение 4.13. Дизъюнкция всех простых импликантов булевой функции f называется *сокращенной ДНФ функции f.*

Для нахождения сокращенной ДНФ используется следующий алгоритм, в основе которого лежит метод Квайна.

Алгоритм 4.5. (Алгоритм Квайна построения сокращенной ДНФ).

Шаг 1. Находим для данной булевой функции f ее формулу F, находящуюся в СДНФ.

Шаг 2. Находим все простые импликанты функции f. Для этого все элементарные конъюнкции формулы F попарно сравниваем между собой. Если две элементарные конъюнкции таковы, что они имеют вид $C\&x_i$ и $C\&\neg x_i$, то выписываем конъюнкцию C. Это является следствием 1-го закона расщепления (склеивания) (равносильность 7а). Конъюнкция C содержит n - 1 вхождение переменных. Элементарные конъюнкции, для которых произошло склеивание, помечаем. После построения всех конъюнкций, включающих n - 1 вхождение переменных, вновь сравниваем их попарно, производим, если возможно, склеивание, выписываем полученные конъюнкции из n - 2 членов, помечаем склеивающиеся конъюнкции из n - 1 членов и т. д. Процесс заканчивается, когда дальнейшее склеивание невозможно. Все непомеченные элементарные конъюнкции являются простыми импликантами. Их дизъюнкция даст нам формулу F_1, равносильную F, находящуюся в ДНФ и состоящую из простых импликантов, т.е. сокращенную ДНФ.

Пример 4.18.

Найдем сокращенную ДНФ функции из примера 4.4:

$f(x_1, x_2, x_3) = \neg(x_2 \supset \neg x_3) \sim(\neg x_1\vee x_2)$.

1. Шаг 1 был выполнен ранее (см. примеры 4.13, 4.15). СДНФ формулы $f(x_1, x_2, x_3)$ является формула

$F(x_1, x_2, x_3) = \neg x_1\&x_2\&x_3\vee x_1\&\neg x_2\&\neg x_3 \vee x_1\&\neg x_2\&x_3 \vee x_1\&x_2\&x_3$.

2. Попарно сравниваем все 4 трехчленные конъюнкции (всех сравнений $C_4^2 = 6$) и применяем, где это возможно, закон склеивания:

$\neg x_1\&x_2\&x_3\vee x_1\&x_2\&x_3 = x_2\&x_3$.

$x_1\&\neg x_2\&\neg x_3 \vee x_1\&\neg x_2\&x_3 = x_1\&\neg x_2$.

$x_1\&\neg x_2\&x_3 \vee x_1\&x_2\&x_3 = x_1\&x_3$.

Итак, на первом этапе получили 3 двучленные конъюнкции:

$x_2\&x_3$, $x_1\&\neg x_2$, $x_1\&x_3$.

Все трехчленные конъюнкции оказались помеченными.

Попарно сравниваем все 3 двучленные конъюнкции (всех сравнений 3) и замечаем, что склеивание невозможно.

В результате получим сокращенную ДНФ формулы f:

$F_1(x_1, x_2, x_3) = x_2\&x_3 \vee x_1\&\neg x_2 \vee x_1\&x_3$.

На практике для построения сокращенной ДНФ удобнее пользоваться модифицированным методом Квайна – Мак-Класки. Этот метод состоит в автоматизации процесса склеивания. Разберем этот метод на конкретном примере.

Алгоритм 4.6. (Алгоритм Квайна - Мак-Класки построения сокращенной ДНФ).

Шаг 1. Составим таблицу значений булевой функции (если функция задана формулой в СДНФ, то в силу замечания к алгоритму 4.3 это всегда можно сделать)

Для нашего примера такая таблица уже составлена – это таблица 4.4.

Очевидно, в силу алгоритма 4. 3 (см. также пример 4.15), эта функция имеет следующую формулу в СДНФ:

$f(x_1, x_2, x_3) = \neg x_1\&x_2\&x_3 \vee x_1\&\neg x_2\&\neg x_3 \vee x_1\&\neg x_2\&x_3 \vee x_1\&x_2\&x_3$.

Шаг 2. Выпишем наборы переменных, на которых функция принимает значение 1, причем эти наборы упорядочим по группам так, что в каждую группу входят наборы с одинаковым числом единиц. Пусть A_i – группа наборов переменных, таких, что каждый набор содержит i единиц, и функция на этом наборе переменных принимает значение, равное единице.

Группы A_0 (где все переменные нули, а значение функции равно 1) нет.

Группа A_1 (где одна переменная единица, остальные нули, и значение функции равно 1):

1 0 0

Группа A_2:

0 1 1

1 0 1

Группа A_3:

1 1 1

Шаг 3. Производим попарное сравнение наборов переменных, входящих в соседние группы. Если при этом сравнении обнаружатся два набора, которые отличаются только в одном разряде, то вместо них записывается один набор, в котором вместо несовпадающих разрядов ставится " – " (прочерк). После всех возможных сравнений из предшествующего списка вычеркиваются все наборы, которые участвовали в образовании хотя бы одного набора с прочерком. Формируются два массива наборов: наборы с прочерками (массив P) и невычеркнутые (массив R).

Эти действия соответствуют склеиванию конъюнкций и уменьшению числа вхождений переменных.

Для нашего примера при сравнении групп A_1 и A_2:

вместо (1 0 0) и (1 0 1) получим (1 0 –);

При сравнении групп A_2 и A_3:

вместо (0 1 1) и (1 1 1) получим (– 1 1);

вместо (1 0 1) и (1 1 1) получим (1 – 1);

После этого этапа массив R пуст, т. к. все наборы участвовали в образовании наборов с прочерками, а массив $P = P(1)$ включает следующие наборы:

(1 0 –);

(– 1 1);

(1 – 1).

Далее рассмотрим наборы с прочерками. Они вновь попарно сравниваются между собой. При этом имеет смысл сравнивать лишь наборы, в которых прочерк стоит в совпадающих разрядах. Если сравниваемые наборы отличаются друг от друга только в одном разряде, то выписываем набор с двумя прочерками (старым и новым). После всех попарных сравнений из множества наборов с одним прочерком вычеркиваются все наборы, имеющие один прочерк и участвовавшие в образовании набора с двумя прочерками. Наборы с одним прочерком, не участвовавшие в образовании наборов с двумя прочерками, помещаются в массив R.

Для нашего примера попарное сравнение наборов с одним прочерком не приводит к образованию наборов с двумя прочерками.

Далее рассмотрим наборы с двумя прочерками и т. д. Процесс прекращается, если на очередном шаге все рассматриваемые наборы попадают в R. Нетрудно убедиться, что каждому набору из R соответствует простой импликант, причем единице соответствует переменная, взятая без отрицания, нулю – переменная, взятая с отрицанием, а прочерку – отсутствие соответствующей переменной. Сокращенная ДНФ есть дизъюнкция этих простых импликантов.

Для нашего примера процедура сравнения заканчивается после формирования наборов с одним прочерком. Массив R после этого включает наборы:

(1 0 –);

(– 1 1);

(1 – 1).

Сокращенная ДНФ имеет вид:

$f(x_1, x_2, x_3) = x_2 \& x_3 \vee x_1 \& \neg x_2 \vee x_1 \& x_3$.

Далее процесс нахождения минимальной ДНФ сводится к отбрасыванию некоторых простых импликантов.

Определение 4.14. Простой импликант называется *существенным (ядровым) импликантом,* если его удаление из сокращенной ДНФ функции приводит к ДНФ, которая не равносильна исходной ДНФ.

Построение минимальной ДНФ сводится к отбрасыванию несущественных импликантов из сокращенной ДНФ.

Определение 4.15. Будем говорить, что элементарная конъюнкция *A покрывает* элементарную конъюнкцию B, если она является частью этой конъюнкции, т.е. целиком входит в нее.

Пример 4.19.

Элементарная конъюнкция $x_1 \& \neg x_2$ покрывает элементарные конъюнкции $x_1 \& \neg x_2 \& x_3$ и $x_1 \& \neg x_2 \& \neg x_3$, но не покрывает элементарные конъюнкции $x_1 \& x_2 \& x_3$ и $\neg x_1 \& \neg x_2 \& \neg x_3$.

Нахождение минимальной ДНФ состоит в выборе таких простых импликантов из сокращенной ДНФ, которые в совокупности покрывают все элементарные конъюнкции СДНФ и содержат минимальное число вхождений переменных. Такая ДНФ равносильна СДНФ, т. к. в силу определения 4.15 ее значения на некотором наборе переменных совпадают со значениями СДНФ.

Рассмотрим следующий алгоритм нахождения минимальной ДНФ.

Алгоритм 4.7. (Алгоритм построения минимальной ДНФ с помощью таблицы покрытий).

Шаг 1. Составление таблицы покрытий.

Для данной функции

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \bigvee_{i=1}^{k} A_i \equiv \bigvee_{j=1}^{m} B_j, \; m \le k,$$

где A_i –элементарные конъюнкции, входящие в СДНФ, $i = 1, 2, \dots, k$, $k \le n$, а B_j – простые импликанты сокращенной ДНФ, $j = 1, 2, \dots, m$, $m \le k$, построим таблицу покрытий, число строк которой равно числу полученных простых импликантов, а число столбцов – числу элементарных конъюнкций в СДНФ. Если в некоторую элементарную конъюнкцию входит какой-либо простой импликант, то на пересечении соответствующего столбца и строки ставится метка (например, “ * “).

Шаг 2. Выделение столбцов, содержащих одну метку.

Если в каких-нибудь столбцах составленной таблицы имеется только одна метка, то строки, в которых стоят эти метки, определяют простые импликанты, которые не могут быть исключены из сокращенной ДНФ, т. к. без них не может быть получено покрытие всех элементарных конъюнкций СДНФ. Они являются существенными и обязательно входит в минимальную ДНФ. Поэтому из таблицы покрытий исключаются строки, соответствующие существенным импликантам, и столбцы элементарных конъюнкций СДНФ, покрывемые этими существенными импликантами.

Шаг 3. Вычеркивание лишних столбцов.

Если в таблице есть столбцы, в которых имеются метки в одинаковых строках, то оставляем только один из них (все равно, какой), так как покрытие элементарных конъюнкций, соответствующих выброшенным столбцам, осуществляется за счет простого импликанта, соответствующего оставшемуся столбцу.

Шаг 4. Вычеркивание лишних существенных импликантов.

Если после выбрасывания некоторых столбцов в результате шага 3, в таблице появляются строки, в которых нет ни одной метки, то простые импликанты, соответствующие этим строкам, исключаются из дальнейшего рассмотрения, т. к. они не покрывают оставшиеся в рассмотрении элементарные конъюнкции СДНФ.

Шаг 5. Выбор минимального покрытия существенными импликантами.

Выбирается такая совокупность строк (т. е. существенных импликантов), чтобы они покрывали все оставшиеся столбцы (элементарные конъюнкции СДНФ). При нескольких возможных вариантах предпочтение отдается варианту покрытия с минимальным общим числом вхождения переменных.

Пример 4.20.

Продолжим предыдущий пример.

1. Составляем таблицу покрытий. Для формулы, булевой функции с СДНФ:

$f(x_1, x_2, x_3) = \neg x_1\&x_2\&x_3 \vee x_1\&\neg x_2\&\neg x_3 \vee x_1\&\neg x_2\&x_3 \vee x_1\&x_2\&x_3$

мы получили равносильную ей сокращенную ДНФ:

$F_1(x_1, x_2, x_3) = x_2\&x_3 \vee x_1\&\neg x_2 \vee x_1\&x_3$.

Каждой элементарной конъюнкции $x_1^{s1}\&x_2^{s2}\&...\&x_n^{sn}$, ($x_i^{si} = x_i$, если $s_i = 0$ и $x_i^{si} = \neg x_i$, если $s_i = 1$, $i = 1, 2, ... ,n$), входящей в СДНФ, можно сопоставить набор переменных из нулей и единиц. Этот наборы идентифицируют столбцы. Каждому простому импликанту из сокращенной ДНФ также можно сопоставить набор из нулей, единиц и прочерков, где 0 означает, что переменная берется с отрицанием, 1 – переменная берется без отрицания, “ – ” – переменная отсутствует. Для нашего примера получим следующую таблицу (таблица 4.6) из 4 столбцов, соответствующих 4 элементарным конъюнкциям СДНФ $F(x_1, x_2, x_3, x_4)$ и 3 строк, соответствующих 3 простым импликантам сокращенной ДНФ $F_1(x_1, x_2, x_3, x_4)$.

Таблица 4.6

	011	100	101	111
–11	*			*
10–		*	*	
1–1			*	*

2. Выделяем столбцы, содержащие одну метку – это 1-ый и 2-ой столбцы. Импликант $x_2\&x_3$ (ему соответствует 1-ая строка) является существенным. Он покрывает две элементарные конъюнкции СДНФ: $\neg x_1\&x_2\&x_3$ и $x_1\&x_2\&x_3$ (им соответствуют 1-ый и 4-ый столбцы). Импликант $x_1\&\neg x_3$ (ему соответствует 2-ая строка) тоже является существенным. Он покрывает две элементарные конъюнкции СДНФ: $x_1\&\neg x_2\&\neg x_3$ и $x_1\&\neg x_2\&x_3$ (им соответствуют 2-ой и 3-ий столбцы).

Все указанные строки (1-ую и 2-ую) и столбцы (1-ый, 2-ой, 3-ий и 4-ый) вычеркиваем из таблицы покрытий. После этого все элементы таблицы окажутся вычеркнутыми. Следовательно, два существенных импликанта $x_2\&x_3$ и $x_1\&\neg x_3$ покрывают все элементарные конъюнкции СДНФ.

Итак, минимальная ДНФ для нашей функции имеет вид:

$F_2(x_1, x_2, x_3) = x_2\&x_3 \vee x_1\&\neg x_2$.

Рассмотрим еще один пример нахождения минимальной ДНФ булевой функции.

Пример 4.21.

Пусть булева функция задана таблицей

Таблица 4.7

x_1	x_2	x_3	x_4	$f(x_1, x_2, x_3, x_4)$
0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	0	1
0	1	0	1	1
0	1	1	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	0	1	1
1	0	1	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	0	1
1	1	0	1	1
1	1	1	0	0
1	1	1	1	0

Применим вначале алгоритм Квайна - Мак-Класки для нахождения сокращенной ДНФ.

Очевидно, в силу алгоритма 4.3, данная функция имеет следующую формулу в СДНФ:

$F(x_1, x_2, x_3, x_4) = \neg x_1\&\neg x_2\&x_3\&x_4 \vee \neg x_1\&x_2\&\neg x_3\&x_4 \vee \neg x_1\&x_2\&\neg x_3\&\neg x_4 \vee$
$\neg x_1\&x_2\&x_3\&x_4 \vee x_1\&\neg x_2\&\neg x_3\&x_4 \vee x_1\&\neg x_2\&x_3\&x_4 \vee x_1\&x_2\&\neg x_3\&\neg x_4 \vee x_1\&x_2\&\neg x_3\&x_4$.

Выпишем наборы переменных, на которых функция принимает значение 1, причем эти наборы упорядочим по группам так, что в каждую группу входят наборы с одинаковым числом единиц.

Группы A_0 нет.

Группа A_1:

0 1 0 0

Группа A_2:

0 0 1 1

0 1 0 1

1 0 1 0

1 1 0 0

Группа A_3:

0 1 1 1

1 0 1 1

1 1 0 1

Группы A_4 нет.

Производим попарное сравнение наборов переменных, входящих в соседние группы.

При сравнении групп A_1 и A_2:

вместо (0 1 0 0) и (0 1 0 1) получим (0 1 0 –);

вместо (0 1 0 0) и (1 1 0 0) получим (– 1 0 0);

При сравнении групп A_2 и A_3:

вместо (0 0 1 1) и (0 1 1 1) получим (0 – 1 1);

вместо (0 0 1 1) и (1 0 1 1) получим (– 0 1 1);

вместо (0 1 0 1) и (0 1 1 1) получим (0 1 – 1);

вместо (0 1 0 1) и (1 1 0 1) получим (– 1 0 1);

вместо (1 0 0 1) и (1 0 1 1) получим (1 0 – 1);

вместо (1 0 0 1) и (1 1 0 1) получим (1 – 0 1);

вместо (1 1 0 0) и (1 1 0 1) получим (1 1 0 –).

После этого этапа массив R пуст, т. к. все наборы участвовали в образовании наборов с прочерками, а массив $P = P(1)$ включает следующие наборы:

(0 1 0 –);
(– 1 0 0);
(0 – 1 1);
(– 0 1 1);
(0 1 – 1);
(– 1 0 1);
(1 0 – 1);
(1 – 0 1);
(1 1 0 –).

Теперь попарно сравниваются между собой наборы с прочерками. Наборы с одним прочерком, не участвовавшие в образовании наборов с двумя прочерками, помещаются в массив R.

Для нашего примера

вместо (0 1 0 –) и (1 1 0 –) получим (– 1 0 –);
вместо (– 1 0 0) и (– 1 0 1) получим (– 1 0 –)

После этого этапа в массив R попадают наборы, не участвовавшие в образовании наборов с двумя прочерками:

(0 – 1 1);
(– 0 1 1)
(0 1 – 1);
(1 0 – 1);
(1 – 0 1);

Массив $P(2)$ состоит из набора с двумя прочерками:

(– 1 0 –).

Набор с двумя прочерками один и процедура сравнения заканчивается. Поэтому все наборы из $P(2)$ попадают в массив R, который после этого включает наборы:

(0 – 1 1);
(– 0 1 1)
(0 1 – 1);
(1 0 – 1);
(1 – 0 1);
(– 1 0 –).

Сокращенная ДНФ имеет вид:

$F_1(x_1, x_2, x_3, x_4) = \neg x_1\&x_3\&x_4 \lor \neg x_2\&x_3\&x_4 \lor \neg x_1\&x_2\&x_4 \lor x_1\&\neg x_2\&x_4 \lor x_1\&\neg x_3\&x_4$ $x_2\&\neg x_3$.

Найдем теперь минимальную ДНФ с помощью таблицы покрытий (алгоритм 4.7).

Составляем таблицу покрытий.

Для нашего примера получим следующую таблицу (таблица 4.8) из 8 столбцов, соответствующих 8 элементарным конъюнкциям СДНФ $F(x_1, x_2, x_3, x_4)$ и 6 строк, соответствующих 6 простым импликантам сокращенной ДНФ $F_1(x_1, x_2, x_3, x_4)$.

Таблица 4.8

	0011	0100	0101	0111	1001	1011	1100	1101
0-11	*			*				
-011	*					*		
01-1			*	*				
10-1					*	*		
1-01					*			*

-10-		*	*				*	*

Выделяем столбцы, содержащие одну метку – это 2-ой и 7-ой столбцы. Оба этих столбца определяют один и тот же импликант $x_2\&\neg x_3$ (ему соответствует 6-ая строка), который является существенным. Он покрывает следующие четыре элементарные конъюнкции СДНФ: $\neg x_1\&x_2\&\neg x_3\&x_4$, $\neg x_1\&x_2\&\neg x_3\&\neg x_4$, $x_1\&x_2\&\neg x_3\&\neg x_4$, $x_1\&x_2\&\neg x_3\&x_4$ (им соответствуют 2-ой, 3 - ий, 7 - ой и 8 - ой столбцы). Все указанные строки и столбцы вычеркиваем из таблицы покрытий. После этого таблица примет вид:

Таблица 4.9

	0011	0111	1001	1011
0-11	*	*		
-011	*			*
01-1		*		
10-1			*	*
1-01			*	

В полученной таблице нет одинаковых столбцов. В полученной таблице нет пустых строк. Выбираем такую совокупность существенных импликантов, которая покрывает все столбцы и содержит наименьшее количество букв. Для нашей таблицы это импликанты $\neg x_1\&x_3\&x_4$ и $x_1\&\neg x_2\&x_4$ (1 - ая и 4 - ая строки таблицы 4. 9), т. к. они покрывают все оставшиеся столбцы.

Итак, минимальная ДНФ для нашей функции имеет вид:

$F_2(x_1, x_2, x_3, x_4) = \neg x_1\&x_3\&x_4 \lor x_1\&\neg x_2\&x_4 \lor x_2\&\neg x_3$.

Применение алгебры булевых функций к релейно-контактным схемам

Рассмотрим электрические релейно-контакные схемы, главный элемент которых – электромагнитное реле.

Пусть $x_1, x_2, \dots, x_n$ – набор контактов в схеме. Контакты могут быть размыкающими и замыкающими. Контакт называется *замыкающим*, если он замыкается при подаче напряжения. Контакт называется *размыкающим*, если он размыкается при подаче напряжения. Один и тот же контакт в схеме может быть как замыкающим, так и размыкающим.

Каждой последовательно- параллельной схеме сопоставим функцию проводимости:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{cases} 1, & \text{если схема проводит ток,} \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Функция проводимости схемы, состоящей из одного элемента x, для замыкающего контакта есть $f(x) = x$, а для размыкающего контакта $f(x) = \neg x$.

Функция проводимости схемы, состоящей из двух последовательно соединенных контактов x и y (рис. 4. 1) есть $f(x, y) = x\&y$.

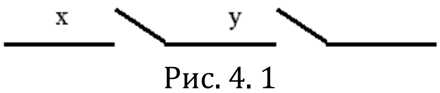


Рис. 4. 1

Функция проводимости схемы, состоящей из двух параллельно соединенных контактов x и y (рис. 4. 2) есть $f(x, y) = x \lor y$.

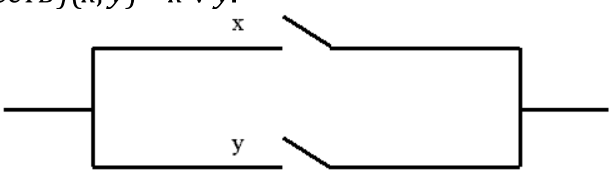


Рис. 4. 2

Каждой последовательно-параллельной схеме можно поставить в соответствие формулу логики булевых функций, реализующую функцию проводимости этой схемы. Две схемы считаются эквивалентными, если они имеют одинаковую функцию проводимости. Применяя равносильные преобразования, можно упрощать релейно-контактные схемы, заменяя их эквивалентными, с меньшим числом контактов.

Пример 4.22.

Найдем функцию проводимости схемы, изображенной на рис. 4. 3.

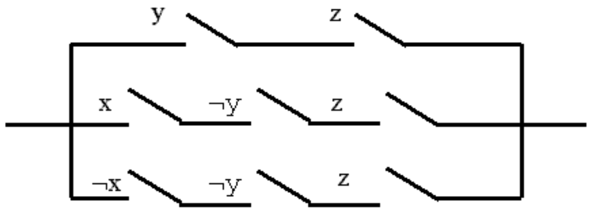


Рис. 4.3

$f(x, y, z) = (y\&z) \vee (x\&\neg y\&z) \vee (\neg x\&\neg y\&z) \equiv (y\&z) \vee (\neg y\&z) \equiv z.$

Эквивалентная схема изображена на рис. 4.4.

Рис 4.4

2.3.5 Основные определения комбинаторного анализа

Бытует мнение, что комбинаторные задачи элементарны. Конечно, это не так. Число комбинаторных задач и их разнообразие быстро растет. К их решению прямо или косвенно приводят многие практические задачи. При этом оказывается, что несмотря на заманчивую простоту постановки, комбинаторные задачи в большинстве очень трудны; многие из них не поддаются решению до сих пор. К числу современных задач, решаемых комбинаторными методами, относятся:

1. *Задачи на размещения* – задачи о расположении, например, на плоскости предметов, обладающих свойствами дальнодействия.
2. *Задачи о покрытиях и заполнениях* – например, задачи о заполнении заданных пространственных фигур меньшими телами заданных форм и размеров.
3. *Задачи о маршрутах* – задачи оптимального плана, например, задачи отыскания кратчайшего пути и т.п.
4. *Комбинаторные задачи теории графов* – задачи сетевого планирования, например, задачи транспортных и электрических сетей, задачи об окрашивании графов, задачи о перечислении вершин и т.п.
5. *Перечислительные задачи,* в которых идет речь о числе предметов, составляемых из данного набора элементов при соблюдении определенных правил.

В задачах комбинаторного анализа исследуются дискретные множества, т.е. множества, составленные из отдельных обособленных элементов. В большинстве случаев эти множества конечные, но не исключается и рассмотрение множеств, состоящих из бесконечного числа элементов. Особенность комбинаторных задач заключается в том, что в них преимущественное внимание уделяется двум видам операций: отбору подмножеств и упорядочению элементов. Эти две операции и являются основными комбинаторными.

С операцией отбора подмножеств связано понятие выборки, с которым можно связать как осуществление операции отбора, так и ее результат - само выбранное подмножество.

Подмножество из r элементов, выбранное из множества S_n, состоящего из n элементов,называется (n, r) – *выборкой*, а r – *объемом* этой выборки. Если (n, r) – выборки рассматриваются с учетом порядка элементов в них, то он называются (n, r) – *перестановками.*

Если же порядок элементов в выбранных подмножествах не важен, то соответствующие выборки называются (n, r) – *сочетаниями.*

В выборках могут допускаться и не допускаться повторения элементов. Упорядоченная (n, r) – выборка, в которой элементы могут повторяться, называется *перестановкой с повторениями* из n элементов по r или (n, r) – перестановкой с повторениями. Если элементы упорядоченной (n, r) – выборки попарно различны, то такая выборка называется (n, r) – *перестановкой без повторений*. Число (n, r) – перестановок обозначается символом $P_{n,r}$, или $P(n, r)$, а число перестановок с повторениями - $\widehat{P}_{n,r}$, или $\widehat{P}(n,r)$. P – первая буква слова permutation (англ. перестановка). До сих пор во многих учебниках (n, r) – перестановки называются *размещениями* и обозначаются символом A_n^r, собственно же перестановками называются упорядоченные (n,n) – выборки. А – первая буква слова arrangement (англ. размещение, приведение в порядок). Неупорядоченная (n, r) – выборка, в которой элементы могут повторяться, называется *сочетанием с повторениями* из n элементов по r. Число сочетаний без повторений обозначается символами C (n, r), C_n^r, $\binom{n}{r}$, с повторениями $\widehat{C}(n,r)$, или $\widehat{C}_n^r$. C – первая буква слова combination (англ. Сочетание). Наиболее употребительным является обозначение C_n^r. Символ $\binom{n}{r}$ называется *символом Аппеля*.[1]

Пример 1. Пусть A={a, b, c}, r=2. Указать все упорядоченные и неупорядоченные выборки с повторениями и без повторений из трех элементов по два.

1. *aa, ab, ac, ba, bb, bc, cb, ca, cc* – девять перестановок с повторениями, $\widetilde{P}_{3,2} = 9$
2. *ab, ac, ba, bb, bc, cb, ca* – шесть перестановок без повторений, $P_{3,2}$ =6.
3. *ab, ac, bc* – три сочетания без повторений, $C_3^2 = 3$.
4. *aa, ab, ac, bb, bc, cc* – шесть сочетаний с повторениями, $\widehat{C}_3^2 = 6$.

Правило суммы и правило произведения

Основной комбинаторной задачей является подсчет числа (n, r) – выборок при различных условиях. Опыт выполнения комбинаторных операций отбора подмножеств приводит к следующим двум логическим правилам.

1. *Правило суммы*. Если из множества S подмножество A (которое может состоять и из одного элемента) можно выбрать n способами, а подмножество B, отличное от A, m способами и при этом выборы A и B таковы, что взаимно исключают друг друга и не могут быть получены одновременно, то выбор из множества S множества $A \cup B$ можно получить $n+m$ способами.

Комментарии. Если $A \cap B = \emptyset$, то A и B называются *непересекающимися множествами*, в частности, если $A_i \cap A_j = \emptyset$ при всех i,j=1,2,...,r, $i \neq j$, то $S = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_r$ называется разбиением множества S на непересекающиеся подмножества или просто *разбиением*. Правило суммы можно сформулировать в терминах теории множеств: если даны n-множество A и m-множество B, то при $A \cap B = \emptyset$ объединение $A \cup B$ будет ($n+m$)-множеством. Если дано разбиение $S = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_r$, где $A_i \cap A_j = \emptyset$, i,j=1,2,...,r, $i \neq j$, и если A_i есть n_i-множество (i=1,2,...,r), то множество S есть $\sum_{i=1}^{r} n_i$ -множество.

---

[1] Поль Эмиль Аппель (1855-1930) – французский математик.

2. *Правило произведения*. Если из множества S подмножество A может быть выбрано n способами, а после каждого такого выбора подмножество B можно выбрать m способами, то выбор A и B в указанном порядке можно осуществить $m \cdot n$ способами.

Комментарии. В терминах теории множеств это правило соответствует понятию декартова произведения множеств: если A является n-множеством, а B m-множеством, то $A \times B$ окажется $n \cdot m$-множеством. Пусть A_i суть n_i-множества, $i=1,2,\dots,r$. Построим множества: $M_1=A_1$. $M_2=A_1\times A_2=M_1\times A_2$, $M_3= M_2\times A_3,\dots M_r= M_{r-1}\times A_r$. Тогда M_r будет $(n_1\cdot n_2\cdot\dots n_r\cdot)$-множеством.

При решении практических задач правило произведения часто используется при подсчете числа вариантов при проведении (n, r) – выборок. В этом случае его формулировка может выглядеть так.

Пусть требуется выполнить одно за другим r действий. Если первое действие можно выполнить n_1 способами, второе действие – n_2 способами и так до r-го действия, которое можно выполнить n_r способами, то все r действий вместе могут быть выполнены $n_1\cdot n_2\cdot\dots n_r$ способами.

Пример. Сколько существует целых чисел между 0 и 1000, содержащих ровно одну цифру 6? Пусть S будет подмножеством целых чисел между 0 и 1000, содержащих ровно одну цифру 6. Пусть S_1 – подмножество множества S, которое содержит число, состоящее из одной цифры, и эта цифра равна 6. Пусть S_2 – подмножество множества S, содержащее двузначные числа ровно с одной цифрой равной 6. Пусть S_3 – подмножество множества S, содержащее трехначные числа ровно с одной цифрой равной 6. Множество S_1 содержит только один элемент – число 6. В S_2 каждый элемент, содержащий 6, имеет ее либо первой . либо второй цифрой. Если 6 – вторая цифра, то существуют 8 различных чисел, поскольку первое число, поскольку первое число не может быть 0 или 6. Если 6 – первая цифра, , то таких чисел 9, поскольку вторая не может быть 6. Таким образом, S_2 содержит 8+9=17 элементов. Элемент из S_3 содержит 6 как первую, вторую или третью цифру. Если 6 – первая цифра, то существуют 9 вариантов выбора второй цифры и 9 вариантов выбора третьей цифры, тогда согласно правилу умножения, S_3 содержит 9*9=81 чисел с 6 как первой цифрой. Если 6 – вторая цифра, то имеются 9 вариантов выбора третьей цифры и 8 вариантов выбора первой цифры, поскольку первая цифра не может быть 0. Следовательно, S_3 содержит 9*8=72 чисел. У которых 6 вторая цифра. Аналогично, S_3 содержит 72 числа, у которых 6 – третья цифра. Следовательно, всего S_3 содержит 1+17+225=243 элементов.

Пример. ***Битовая строка*** – это строка, состоящая из элементов, каждый из которых имеет значение 1 или 0. Сколько существует битовых строк, имеющих длину 5? Сколько существует битовых строк длины k? Поскольку каждый символ строки может иметь значение 1 или 0, то существует два варианта выбора для каждой позиции. Следовательно, существует $2\times2\times2\times2\times2=2^5$ битовых строк длины 5. По аналогичным соображениям, имеется 2^k битовых строк длины k.

Формулы для расчета перестановок и сочетаний без повторений и с повторениями

Переставляя объекты некоторого набора, мы обычно располагаем их в различном порядке. В этом смысле перестановка – это переупорядочение набора объектов, или функция, которая задает такое переупорядочение. Исследуем, сколько существует способов переупорядочения набора объектов. Все необходимое для этого уже имеется. Для подсчета перестановок достаточно воспользоваться правилом умножения. Рассмотрим количество возможных способов формирования числа, переставляя цифры 1, 2, 3, 4, 5. Варианты возможных перестановок – это, например, числа 12345, 15342, 32415 и 32145. Для нахождения количества возможных размещений или перестановок заметим, что первую цифру можно выбрать пятью способами, вторую четырьмя способами, третью – тремя способами, четвертую двумя, и только один вариант остается для выбора пятой цифры. Поэтому существует 5! Возможных перестановок. Точно также, если необходимо переупорядочить n объектов, то для этого существует $n!$ способов. В перестановках важен порядок. Числа 51342 и 32415, образованные перестановкой цифр 1,2,3,4,5, не совпадают. Кроме того, поскольку перестановки рассматриваются как переупорядочения, то каждый объект можно использовать только один раз. Если бы повтор цифр допускался, то при формировании числа для каждой цифры существовало бы пять вариантов выбора, поэтому существовало бы 5^5 возможных чисел.

Если рассматривать перестановки, когда объектов больше, чем мест для размещения, то сформулированное понятие перестановки, получает обобщение, так как в этом случае нельзя рассматривать перестановку как переупорядочение. Предположим, например. Что в организации 20 человек и из них требуется выбрать президента, вице-президента, секретаря и казначея. Имеются 20 вариантов выбора президента, 19 вариантов выбора вице-президента,18 способов выбора секретаря и 17 – казначея. Таким образом, получаем 20×19×18×17 способов выбора должностных лиц. Порядок при этом все еще остается существенным. Есть разница, является ли Мэри Браун президентом, вице-президентом, секретарем и казначеем. Каждое из размещений на должностях четырех выбранных лиц представляет собой различную организацию руководства. По-прежнему любого человека можно избрать только один раз.

При этом

$$20\times19\times18\times17=\frac{20!}{16!}=\frac{20!}{(20-4)!},$$

поскольку все множители в числителе, не превышающие 16, сокращаются с множителями знаменателя, входящими в 16!.

Предположим, имеется n человек. Требуется выбрать r из них и расположить в определенном порядке. Существует n способов выбрать первого человека, n-1 способов выбора второго, n-2 способов выбора третьего, $n-i+1$ способов выбора i-го и $n-r+1$способов выбора r-го человека. Следовательно, существует

$$(n)\,(n-1)(n-2)(n-3)\cdots(n-i+1)\cdots(n-r+1)$$

способов выбрать r человек из n. Но

$$(n)(n-1)(n-2)(n-3)\cdots(n-i+1)\cdots(n-r+1)=\frac{n!}{(n-r)!}$$

Здесь принято 0!=1

Теорема 1. Число упорядоченных r –элементных подмножеств множества S_n, состоящего из n элементов, равно $A_n^r=\dfrac{n!}{(n-r)!}$

В частном случае, когда $n=r$, получаем $A_n^n=P_{n,n}=P_n=\dfrac{n!}{0!}=n!$

Подсчитаем число всех возможных (n, r) – перестановок с повторениями. В этом случае после выбора любого элемента (n, r) – перестановки остаются все те же n возможностей для выбора следующего элемента. Следовательно, по правилу произведения число (n, r) – перестановок с повторениями равно:

$$A_n^r=\underbrace{n\cdot n\cdot\ldots\cdot n}_{r\ раз}=n^r.$$

Подсчитаем теперь число (n, r) – сочетаний. Пусть имеется ряд неупорядоченных (n, r) – выборок без повторения элементов. Обозначим количество элементов множества, состоящего из всех возможных (n, r) – сочетаний, через C_n^r. Сравним числа C_n^r и A_n^r. A_n^r - число упорядоченных выборок из n элементов по r; C_n^r - число неупорядоченных выборок из n элементов по r. Каждую неупорядоченную выборку объема r можно упорядочить r! способами, то есть

$r!\,C_n^r=A_n^r$. Тогда

$$C_n^r = \frac{A_n^r}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}.$$

Полученный результат формулируется в виде теоремы.

Теорема 2. Число неупорядоченных r –элементных подмножеств множества S_n, состоящего из n элементов, равно $C_n^r = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$

Рассмотрим более сложную задачу о числе ($r_1, r_2,\ldots r_k$)-разбиений n –множества S_n, т.е. разбиений вида $S = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k$, $A_i \cap A_j = \varnothing$, $i \neq j$,

$i, j=1,2,\ldots,k$, причем A_i есть подмножество множества S_n.

Число способов, которыми можно представить множество S_n из n элементов в виде суммы k неупорядоченных множеств $A_1, A_2,\ldots A_k$, число элементов которых составляет соответственно $r_1, r_2,\ldots r_k$, равно $\dfrac{n!}{r_1!r_2!\ldots r_k!}$.

Подсчитаем число (n, r) – сочетаний с повторениями из множества S_n. Пусть элементы множества S_n занумерованы числами $1,2,\ldots n$. Так как множество S_n счетно или конечно, то эта операция всегда возможна. Тогда вместо (n, r) – сочетаний множества S_n можно рассматривать (n, r) – сочетания из эквивалентного ему множества $S'=\{1,2,\ldots, n\}$ в силу взаимно-однозначного соответствия.

Всякая (n, r) – выборка из S' может быть записана в виде $\{ n_1, n_2, n_r \}$, где

$n_1 \leq n_2 \leq \ldots \leq n_r$, причем равенство возможно в силу того, что рассматриваются выборки с повторениями. r-выборке поставим в соответствие r-множество

$\{ n_1, n_2+1, n_2+2,\ldots n_r +r-1\}$, в котором все элементы различны. Соответствие между $\{ n_1, n_2,\ldots n_r \}$ и $\{ n_1, n_2+1, n_2+2,\ldots n_r +r-1\}$ опять взаимно-однозначное, причем r-множества $\{ n_1, n_2+1, n_2+2,\ldots n_r +r-1\}$ являются r – сочетаниями без повторений из $n +r$-1-множества $S'U\{1,2,\ldots, r-1\}$. Число ($n +r$-1, r)– сочетаний без повторения равно C_{n-r+1}^r, Тогда

$$\widehat{C}_n^r = C_{n+r-1}^r = \frac{(n-r+1)!}{r!(n-1)!} = \frac{n(n+1)\ldots(n+r-1)}{r!}$$

Бином Ньютона и полиномиальная теорема.

Бином Ньютона.

Исторически название бином Ньютона[2] несправедливо, ибо формулу $(a+b)^n$ знали еще среднеазиатские математики, начиная с Амара Хайяма[3] (около 1100 г.), в Европе до Ньютона ее знал Паскаль[4]. Заслуга Ньютона, что он обобщил эту формулу для нецелого показателя n. Итак,

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k} = C_n^0 a^0 b^n + C_n^1 a^1 b^{n-1} + \ldots + C_n^2 a^2 b^{n-2} + \ldots + C_n^n a^n b^0$$

Биномиальное разложение служит основой для многих комбинаторных формул, например:

[2] Исаак Ньютон (1643-1727) – английский физик, астроном и математик.

[3] Гийас ад-Дин Абу-л-Фатх Омар ибн Ибрахим Хайям (около 1048-после 1122) – иранский математик, астроном и поэт.

[4] Блез Паскаль (1623-1662) – французский математик.

1. $a=b=1$. Получим $\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$. Это число равно числу всех возможных неупорядоченных подмножеств множества S_n, состоящего из n элементов. Действительно, т.к. C_n^k - число k-элементных подмножеств ((n, k)-сочетаний) множества S_n, то сумма в левой части есть число всех подмножеств.

2. $a=1$, $b=-1$. Отсюда $\sum_{k=0}^{n} C_n^k (-1)^k = 0$. Из этого равенства следует, что суммы биномиальных коэффициентов, стоящих на четных и на нечетных местах, равны между собой и каждая равна 2^{n-1}.

Полиномиальная теорема - обобщение формулы бинома на случай k слагаемых:

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_k)^n = \sum_{\begin{cases} r_1 \geq 0, r_2 \geq 0, \ldots, r_k \geq 0 \\ r_1 + r_2 + \ldots + r_k = n \end{cases}} \frac{n!}{r_1! \cdot r_2! \cdot \ldots \cdot r_k!} a_1^{r_1} a_2^{r_2} \ldots a_k^{r_k},$$

где суммирование проводится по всем решениям уравнения $r_1 + r_2 + \ldots + r_k = n$ в целых неотрицательных числах, т.е. выражение $(a_1 + a_2 + \ldots + a_k)^n$ равно сумме всех возможных слагаемых вида $\frac{n!}{r_1! r_2! \ldots r_k!} a_1^{r_1} a_2^{r_2} \cdots a_k^{r_k}$; $r_1 + r_2 + \ldots + r_k = n$.

Пример. Вычислить $(x+y+z)^3$

Раскрывая скобки последовательно, производя умножение многочлена на многочлен и приводя подобные члены, получаем

$$(x+y+z)^3 = x^3 + y^3 + z^3 + 3x^2y + 3x^2z + 3y^2x + 3y^2z + 3z^2x + 3z^2y + 6xyz$$

Всего в выражении 10 членов. Этот же результат легко найти по полиномиальной формуле при $n=3$, $k=3$. Система условий суммирования здесь имеет вид $\begin{cases} r_1 \geq 0, r_2 \geq 0, r_3 \geq 0 \\ r_1 + r_2 + r_3 = 3 \end{cases}$.

Различных числовых коэффициентов тоже три: $\frac{3!}{3! \cdot 0! \cdot 0!} = 1$, $\frac{3!}{2! \cdot 1! \cdot 0!} = 3$, $\frac{3!}{1! \cdot 1! \cdot 1!} = 6$. Для более удобного написания конечного результата лучше составить все возможные комбинации индексов r_1, r_2, r_3 и поместить их в таблицу.

r_1	r_2	r_3
3	0	0
0	3	0
0	0	3
2	1	0
2	0	1
1	2	0
0	2	1
1	0	2
0	1	2
1	1	1

Тогда

$(x+y+z)^3 = 1 \cdot (x^3 + y^3 + z^3) + 3 \cdot (x^2y + x^2z + y^2x + y^2z + z^2x + z^2y) + 6 \cdot xyz$. То же самое, что было получено раньше.

ПЕРЕСТАНОВКИ И СОЧЕТАНИЯ С ПОВТОРЕНИЕМ

Пусть S – множество, содержащее n неразличимых объектов. Тогда количество различных **перестановок, образованных выбором k элементов с повторением**, равно n^k.

Пример 1. Лототрон содержит 500 шаров с номерами. Из него выбирают шар, номер которого записывают. Шар возвращают в лототрон и процедура повторяется. Так продолжается до тех пор, пока не наберется комбинация из пяти номеров. Подсчитаем количество возможных комбинаций чисел. Для каждого из пяти чисел имеется 500 способов выбора. Следовательно, число различных комбинаций составляет 500^5.

Пример 2. Сколько существует индивидуальных номеров карточек социального страхования?

Поскольку номер следует выбирать из неотрицательных целых чисел. меньших десяти, то выбираются девять цифр. Причем каждая выбирается из десяти цифр с повторением. Поэтому имеются 10^9 различных номеров карточек социального страхования.

Количество различных **сочетаний из *k* объектов по *n* с повторением** равно $C_{n+k-1}^{k} = C_{n+k-1}^{k-1} = \dfrac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$

Пример 3. Если в булочной продается 10 различных видов пончиков, то сколькими способами можно выбрать дюжину пончиков? Поскольку 12 пончиков выбираются из 10 различных типов с повторением, то имеются

$$C_{10+12-1}^{12} = C_{10+12-1}^{12-1} = \frac{(10+12-1)!}{12!(10-1)!} = \frac{21!}{12!9!}$$

различных способов выбрать дюжину пончиков.

Количество различных **сочетаний из *k* объектов по *n* с повторением, когда необходимо выбрать хотя бы по одному объекту каждого типа,** равно $C_{n-1}^{n-k} = C_{n-1}^{k-1} = \dfrac{(n-1)!}{n!(k-1)!}$

Пример 4. Если в булочной продается 10 различных видов пончиков, то сколькими способами можно выбрать две дюжины пончиков, если необходимо выбрать хотя бы по одному пончику каждого вида? Если бы не было последнего ограничения, то для выбора двух дюжин пончиков из 10различных видов существовало бы $C_{24+10-1}^{24} = C_{33}^{24}$ различных способов. Однако, учитывая ограничение, можно выбрать только 24-10=14 пончиков из 10 различных видов, что дает $C_{14+10-1}^{14} = C_{33}^{14}$ различных вариантов выбора.

Если среди n элементов n_1 элементов одного вида, n_1 элементов другого вида и т.д.. то число перестановок с повторениями определяется формулой

$$P(n_1, n_2, ..., n_k) = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot ... \cdot n_k!},$$

где $n_1 + n_2 + ... + n_k = n$

Пример 5. Сколькими способами можно выбрать четыре набора по пять карт из колды, содержащей 52 карты? По сути, колода разбивается на пять множеств: четыре набора по пять карт и 32 оставшихся карты. Поэтому количество таких наборов равно $P(52; 5, 5, 5, 5, 32) = \dfrac{52!}{5! \cdot 5! \cdot 5 \cdot 5! \cdot 32!}$.

2.4 Методические указания к выполнению контрольной работы

2.4.1 Пояснительная записка

Контрольная работа является одним из видов самостоятельной работы студентов. Она выполняется в соответствии с рабочей программой дисциплины и способствует развитию необходимых навыков практического использования методов решения задач, изученных на лекционных занятиях.

Целью написания контрольной работы является углубление и проверка знаний студентов по изучаемой дисциплине, полученных в ходе теоретических и практических занятий, развитие умений ориентироваться в вопросах методики преподавания, привитие студентам навыков самостоятельного подбора, осмысления и обобщения информации, полученной из периодической, учебной и научной литературы. Выполнение контрольной работы должно отразить самостоятельное изучение студентами курса и степень усвоения ими материала.

– Задания для контрольной работы по данному курсу ориентированы на развитие умений построения и анализа моделей средствами дискретной математики. Главной особенностью заданий по курсу «Дискретная математика» является их ориентация на формирование способности формализованного представления реальных ситуаций, процессов, систем теоретико-множественными, графическими, логическими методами, а также на мотивирование самообразовательной деятельности.

Учебным планом направления подготовки, предусматривается написание контрольной работы по дисциплине. Этот вид письменной работы выполняется по вариантам, выбранным в соответствии с рекомендациями (порядок выбора варианта см. ниже).

Цель выполняемой работы: получить специальные знания по разделам курса;

Основные задачи выполняемой работы:

1) закрепление полученных ранее теоретических знаний;

2) выработка навыков самостоятельной работы;

3) выяснение подготовленности студента к будущей практической работе.

Весь процесс написания контрольной работы можно условно разделить на следующие этапы:

а) определение варианта работы;

б) сбор научной информации, изучение литературы;

в) изучение теоретических вопросов по заданию;

г) разбор задачи, методов ее решения (примеры решения задач разобраны).

Подготовку контрольной работы следует начинать с повторения соответствующего раздела учебника, учебных пособий по данной теме и конспектов лекций. Приступать к выполнению работы без изучения основных положений и понятий науки, не следует, так как в этом случае студент, как правило, плохо ориентируется в материале, не может отграничить смежные вопросы и сосредоточить внимание на основных, первостепенных проблемах рассматриваемой темы.

Номер варианта выбирается по последней цифре номера в зачетной книжке студента. (Цифра 0 соответствует 10 варианту.)

Контрольная работа должна состоять из:

- титульного листа;
- содержания;
- выполненных заданий по варианту;
- списка использованных источников;
- приложения (при необходимости).

При выполнении варианта необходимо:

- решить и оформить задания в тетради письменно;

-решение задач должно быть приведено полностью, с указанием используемых формул и ответа.

Работа должна быть оформлена в тетради.

Страницы следует нумеровать арабскими цифрами, соблюдая сквозную нумерацию по всему тексту. Номер страницы проставляют в центре нижней части листа без точки. После каждого выполненного задания стоит оставлять в тетради свободное место на случай доработки задания.

1. Выполнив контрольную работу, студент должен указать используемую литературу.
2. Проверенные работы сохраняются и предоставляются на зачете.
3. Студент должен ознакомиться с рецензией и ответить на все замечания, чтобы быть готовым к ответу по работе. Если работа не зачтена, то ее нужно переделать в соответствии с указаниями преподавателя и сдать на повторную рецензию.

В содержании контрольной работы необходимо показать знание рекомендованной литературы по данной теме. Кроме рекомендованной специальной литературы, можно использовать любую дополнительную литературу, которая необходима для выполнения контрольной работы.

Перед выполнением контрольной работы студент должен изучить соответствующие разделы курса по учебным пособиям, рекомендуемым в списке литературы.

В ходе написания контрольной работы студенты расширяют полученные знания по изученным темам и закрепляют их. Контрольная работа должна соответствовать требованиям логического и последовательного изложения материала.

2.4.2 Критерии оценивания

Уровень качества письменной контрольной работы студента определяется с использованием следующей системы оценок:

’’Зачтено’’ выставляется, в случае если студент показывает хорошие знания изученного учебного материала; хорошо владеет основными терминами и понятиями по дисциплине; самостоятельно, логично и последовательно излагает и интерпретирует материалы результаты выполненных действий; получает правильный результат заданий; показывает умение формулировать выводы и обобщения по теме заданий. Работа оценивается удовлетворительно при условии выполнения не менее 70% заданий.

<u>Каждое задание,</u> в свою очередь, считается выполненным и может быть зачтено, если выполнены 70%-94% условий и требований, сформулированных в нем.

’’Не зачтено – выставляется при наличии серьезных упущений в процессе решения задач, неправильного использования формул, отсутствия аргументации, вычислительных ошибок; неудовлетворительном знании базовых терминов и понятий курса, практические задания выполнены неверно; если работа выполнена без учета требований, предъявляемых к данному виду заданий.

Контрольная работа, выполненная небрежно, не по своему варианту, без соблюдения правил, предъявляемых к ее оформлению, возвращается с проверки с указанием причин, которые доводятся до студента. В этом случае контрольная работа выполняется повторно.

При выявлении заданий, выполненных несамостоятельно, преподаватель вправе провести защиту студентами своих работ. По результатам защиты преподаватель выносит решение либо о зачете контрольной работы, либо об ее возврате с изменением варианта. Защита контрольной работы предполагает свободное владение студентом материалом, изложенным в работе и хорошее знание учебной литературы, использованной при написании.

В случае неудовлетворительной оценки работы, она возвращается на доработку студенту. В <u>*этой же*</u> работе студент должен устранить замечания и сдать на повторную проверку. Обучающиеся, не выполнившие задания и не представившие результаты самостоятельной работы, аттестуются по курсу «неудовлетворительно» и к итоговой аттестации по курсу не допускаются.

2.4.3 Контрольные задания по курсу "Дискретная математика "

Раздел1. Множества

Примеры решения задач по данному разделу приведены в пункте 2.3.1 данного издания

Вариант № 1

1. Все грибники вернулись домой с полными корзинами. У десятерых из них в корзинах были белые грибы, у восемнадцати – подберезовики, у двенадцати – лисички. Белые и подберезовики были в шести корзинах, белые и лисички – в четырех, Подберезовики и лисички – в пяти. Все три вида грибов были у двух грибников. Сколько было грибников?
2. Верно или неверно равенство: $(A \cup B) \setminus (A \cap B) = A \cap \overline{B} \cup \overline{A} \cap B$?
3. Доказать, что множество точек $A = \{(x, y): y = |x|, \ -1 \le x \le 1\}$ несчетно.
4. Нарисовать диаграмму Эйлера-Венна для множества $\overline{A} \cap (B \cup C)$.
5. Пусть A – множество точек отрезка [0, 1], а B – множество всех точек числовой оси. Какие из следующих отношений справедливы: а) $A = B$; б) $A \sim B$; в) $A \supset B$; г) $A \supseteq B$; д) $A \not\subset B$; е) $A \in B$.

Вариант № 2

1. Все туристы взяли в поход консервы. Шесть человек взяли тушенку, пять – сгущенку, восемь – кашу (с мясом). У троих в рюкзаках была тушенка и сгущенка, у двоих – тушенка и каша, у троих – сгущенка и каша, и только в одном рюкзаке лежали все три вида консервов. Сколько было туристов?
2. Верно или неверно равенство: $\overline{(A \cup B)} \cap C = C \setminus (C \cap (A \cup B))$?
3. Пусть A – множество решений уравнения $x^2 - 3x + 2 = 0$. Записать это множество двумя различными способами.
4. Нарисовать диаграмму Эйлера-Венна для множества $(B \cap C) \setminus A$.
5. Эквивалентны ли множества $A = \{x: \ x^2 - 3x + 2 = 0\}$ и $B = \{2, 3\}$?

Вариант № 3

1. Было опрошено 70 человек. В результате опроса выяснили, что 45 человек знают английский язык, 29 – немецкий и 9 – оба языка. Сколько человек из опрошенных не знает ни английского, ни немецкого языков?
2. Верно или неверно равенство: $(A \cup B) \setminus (A \cap B) = A \cap \overline{B} \cup \overline{A} \cap B$?
3. Найти все подмножества множества $A = \{x, y, z\}$.
4. Нарисовать диаграмму Эйлера-Венна для множества $\overline{(A \cup B)} \cap C$.
5. Счетно ли множество $\{(x, y): \ y = 3^x, 0 < x < \infty\}$?

Вариант № 4

1. В туристической группе 10 человек знают английский язык, 10 – итальянский, 6 – испанский. По два языка знают: 6 человек – английский и итальянский, 4 – английский и испанский, 3 – итальянский и испанский. Один человек знает все три языка. Сколько туристов в группе?
2. Упростить $\overline{(A \cup B) \cap (A \cap B)}$.
3. Привести пример двух множеств A и B, таких, что мощность множества A больше мощности множества B.
4. Нарисовать диаграмму Эйлера-Венна для множества $C \setminus (C \cap (A \cup B))$.
5. Эквивалентны ли множества $A = \{2^n, n = 1, 2, \ldots\}$ и $B = \{n^2, n = 1, 2, \ldots\}$?

Вариант № 5

1. Предприятие объявило набор рабочих на должности токаря, слесаря и сварщика. В отдел кадров обратились 25 человек. Из них 10 человек владели профессией токаря, 15

– слесаря, 12 – сварщика. Профессией и токаря и слесаря владели 6 человек, и токаря, и сварщика – 5 человек, и слесаря и сварщика – 3 человека. Сколько человек владеют всеми тремя профессиями?
2. Верно или неверно равенство: $\overline{C} \setminus \overline{(A \cup B)} = \overline{A} \setminus \overline{(B \cup C)}$?
3. Привести примеры множеств A, B и C, для которых одновременно выполняются равенства $A \cup B \cup C = A$ и $A \cap B \cap C = C$.
4. Нарисовать диаграмму Эйлера-Венна для множества $\overline{C} \setminus \overline{(A \cup B)}$.
5. Можно ли построить взаимно-однозначное соответствие между множеством рациональных чисел отрезка [0, 1] и множеством рациональных чисел из этого интервала? Ответ обосновать.

Вариант № 6
1. Оказалось, что в группе туристов 15 человек были раньше во Франции, 19 – в Италии, 8 – в Германии. 9 туристов были во Франции и в Италии, 7 – во Франции и в Германии, 6 – и в Италии, и в Германии. 4 туриста были во всех трех странах. Сколько туристов были хотя бы в одной из трех стран?
2. Пользуясь равносильными преобразованиями, установить, верно или неверно равенство: $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap \overline{C}$?
3. Привести примеры множеств A и B, для которых равенство $\overline{A} \cup B = \overline{A}$
а) выполняется; б) не выполняется.
4. Нарисовать диаграмму Эйлера-Венна для множества $A \cap (B \cup \overline{C})$.
5. Найти мощность множества точек окружности с центром в точке (0, 0) и радиусом 1.

Вариант № 7
1. Группе студентов из 30 человек была предложена контрольная работа из трех задач. Первую задачу решили 15 студентов, вторую – 13, третью – 12. Первую и вторую задачи решили 7 человек, первую и третью – 6, вторую и третью – 5 человек. Все три задачи решили 2 студента. Сколько студентов из группы не решили ни одной задачи?
2. Пользуясь равносильными преобразованиями, установить, верно или неверно равенство: $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap \overline{C}$?
3. Привести пример двух бесконечных множеств A и B, таких, что мощность множества A больше мощности множества B.
4. Нарисовать диаграмму Эйлера-Венна для множества $A \cap B \cap \overline{C}$.
5. Найти мощность множества точек гиперболы $y = \dfrac{1}{x-2}$ при $x \in (3, \infty)$.

Вариант № 8
1. Анализ историй болезней группы из 20 детей показало, что 10 детей болели ветрянкой, 6 – корью, 5 – свинкой. Ветрянкой и корью болели 3 ребенка, ветрянкой и свинкой – 3, корью и свинкой – 2. Всеми тремя болезнями болел один ребенок. Сколько детей не болели ни одной из перечисленных болезней?
2. Верно или неверно равенство: $\overline{(A \cup B)} \cap C) = \overline{A} \cap \overline{B} \cap C$?
3. Доказать, что множество точек $A = \{(x, y): y = |x+1|, \ -1 \le x \le 1\}$ несчетно.
4. Нарисовать диаграмму Эйлера-Венна для множества $(B \cap C) \setminus A$.
5. Пусть A – множество точек отрезка [1, 2], а B – множество точек интервала (0, 3). Какие из следующих отношений справедливы: а) $A = B$; б) $A \sim B$; в) $A \subset B$; г) $A \supseteq B$; д) $A \not\subset B$; е) $A \in B$.

Вариант № 9
1. В книжный киоск привезли для продажи 100 книг Пушкина, Лермонтова и Тургенева. Книги Пушкина купили 60 человек, книги Лермонтова – 50, книги Тургенева – 30

человек. Книги Пушкина и Лермонтова купили 40 человек, книги Пушкина и Тургенева – 20, книги Лермонтова и Тургенева – 10 человек. Пять человек купили книги всех трех писателей. Сколько человек не купили ни одной из перечисленных книг?
2. Верно или неверно равенство: $\overline{C} \setminus \overline{(A \cup B)} = \overline{A} \setminus \overline{(B \cup C)}$?
3. Привести примеры множеств A, B и C таких, что равенство $A \cup B \cup C = C$
а) справедливо; б) несправедливо.
4. Нарисовать диаграмму Эйлера-Венна для множества $\overline{A} \setminus \overline{(B \cup C)}$.
5. Можно ли построить взаимно-однозначное соответствие между множеством натуральных чисел N и множеством действительных чисел отрезка [0, 1]? Ответ обосновать.

Вариант № 10
1. Группа научных работников состоит из 100 человек. Из них 70 человек владеют английским языком, 50 – немецким, 40 – французским, 30 – английским и немецким, 25 – английским и французским, 15 – французским и немецким. Хотя бы один язык знает каждый научный работник. Сколько человек владеют всеми тремя языками?
2. Упростить: $(A \setminus (A \cap B)) \cup B$.
3. Привести примеры множеств A, B и C так, чтобы $A \in B$, $B \subset C$.
4. Нарисовать диаграмму Эйлера-Венна для множества $\overline{C} \setminus \overline{(A \cup B)}$.
5. Можно ли утверждать, что множество всех положительных пятизначных чисел счетно? Ответ обосновать.

Раздел 2. Отношения

Примеры решения задач по данному разделу приведены в пункте 2.3.2 данного издания

Вариант № 1.
Задано бинарное отношение $\rho = \{<1, 1>, <1, 2>, <2, 1>, <3, 3>, <4, 4>\}$.
Найти $D(\rho)$, $R(\rho)$, $\rho \circ \rho$, ρ^{-1}. Проверить, будет ли отношение ρ рефлексивным, симметричным, антисимметричным, транзитивным?
2. Привести пример отношения не рефлексивного, не симметричного и не транзитивного.
3. Дана функция $f(x) = x^3 e^x$, отображающая множество действительных чисел R во множество действительных чисел, $R \to R$. Является ли эта функция сюръективной, инъективной, биективной? Почему?

Вариант № 2.
Задано бинарное отношение $\rho = \{<1, 3>, <3, 4>, <1, 4>, <4, 1>, <4, 3>\}$.
Найти $D(\rho)$, $R(\rho)$, $\rho \circ \rho$, ρ^{-1}. Проверить, будет ли отношение ρ рефлексивным, симметричным, антисимметричным, транзитивным?
2. Привести пример отношения частичного порядка на множестве треугольников на плоскости.
3. Привести пример функции $f(x)$, отображающей множество действительных чисел R во множество действительных чисел, $R \to R$ и не являющейся сюръективной, инъективной, биективной.

Вариант № 3.
Задано бинарное отношение $\rho = \{<1, 2>, <2, 2>, <2, 1>, <2, 3>, <3, 2>\}$.
Найти $D(\rho)$, $R(\rho)$, $\rho \circ \rho$, ρ^{-1}. Проверить, будет ли отношение ρ рефлексивным, симметричным, антисимметричным, транзитивным?

2. Будет ли отношением эквивалентности на множестве действительных чисел отношение $x\rho y$, задаваемое равенством $x = -y$?
3. Дана функция $f(x) = lnx + \sqrt{x}$, отображающая множество положительных действительных чисел во множество всех действительных чисел. Является ли эта функция сюръективной, инъективной, биективной? Почему?

Вариант № 4
Задано бинарное отношение $\rho = \{<1, 1>, <2, 2>, <2, 1>, <2, 3>, <3, 2>, <3, 3>\}$.
Найти $D(\rho)$, $R(\rho)$, $\rho\circ\rho$, ρ^{-1}. Проверить, будет ли отношение ρ рефлексивным, симметричным, антисимметричным, транзитивным?
2. Будет ли отношением частичного полрядка на множестве действительных чисел отношение $x\rho y$, задаваемое неравенством $x^2 - y^2 \leq 0$?
3. Дана функция $f(x) = e^x + \sqrt{x}$, отображающая множество положительных действительных чисел на множество положительных действительных чисел. Является ли эта функция сюръективной, инъективной, биективной? Почему?

Вариант № 5.
Задано бинарное отношение $\rho = \{<1, 1>, <1, 2>, <2, 1>, <3, 1>, <3, 2> <1, 3>\}$.
Найти $D(\rho)$, $R(\rho)$, $\rho\circ\rho$, ρ^{-1}. Проверить, будет ли отношение ρ рефлексивным, симметричным, антисимметричным, транзитивным?
2. Привести пример отношения не транзитивного, не рефлексивного и симметричного.
3. Привести пример функции $f(x)$, отображающей множество действительных чисел R во множество неотрицательных действительных чисел, $R\to [0, \infty)$ и являющейся сюръективной, но не инъективной.

Вариант № 6
Задано бинарное отношение $\rho = \{<1, 2>, <2, 1>, <2, 3>, <1, 3>, <3, 1>, <3, 2>\}$.
Найти $D(\rho)$, $R(\rho)$, $\rho\circ\rho$, ρ^{-1}. Проверить, будет ли отношение ρ рефлексивным, симметричным, антисимметричным, транзитивным?
2. Будет ли отношением эквивалентности на множестве действительных чисел отношение $x\rho y$, задаваемое неравенством $x \leq y$?
3. Дана функция $f(x) = lnx + 2x$, отображающая множество действительных чисел R во множество действительных чисел, $R\to R$. Является ли эта функция сюръективной, инъективной, биективной? Почему?

Вариант № 7.
Задано бинарное отношение $\rho = \{<2, 2>, <2, 4>, <1, 4>, <4, 1>, <4, 2>\}$.
Найти $D(\rho)$, $R(\rho)$, $\rho\circ\rho$, ρ^{-1}. Проверить, будет ли отношение ρ рефлексивным, симметричным, антисимметричным, транзитивным?
2. Привести пример отношения не транзитивного, не рефлексивного и не симметричного.
3. Привести пример функции $f(x)$, отображающей множество действительных чисел R во множество действительных чисел, $R\to R$ и являющейся сюръективной и неинъективной.

Вариант № 8.
Задано бинарное отношение $\rho = \{<1, 1>, <3, 4>, <1, 4>, <4, 1>, <4, 3>\}$.
Найти $D(\rho)$, $R(\rho)$, $\rho\circ\rho$, ρ^{-1}. Проверить, будет ли отношение ρ рефлексивным, симметричным, антисимметричным, транзитивным?

2. Будет ли отношением эквивалентности на множестве действительных чисел отношение $x\rho y$, задаваемое равенством $xy = 100$?
3. Привести пример функции $f(x)$, отображающей множество действительных чисел R во множество действительных чисел, $R \to R$ и не являющейся сюръективной, инъективной, биективной.

Вариант № 9.
Задано бинарное отношение $\rho = \{<1, 1>, <2, 2>, <3, 3>, <3, 1>, <1, 3>\}$.
Найти $D(\rho)$, $R(\rho)$, $\rho \circ \rho$, ρ^{-1}. Проверить, будет ли отношение ρ рефлексивным, симметричным, антисимметричным, транзитивным?
2. Привести пример отношения не транзитивного, не рефлексивного и симметричного.
3. Привести пример функции $f(x)$, отображающей множество действительных чисел R во множество действительных чисел, $R \to R$ и являющейся сюръективной, но не инъективной.

Вариант № 10.
Задано бинарное отношение $\rho = \{<1, 1>, <2, 2>, <4, 4>, <2, 1>, <2, 4>, <4, 2>\}$.
Найти $D(\rho)$, $R(\rho)$, $\rho \circ \rho$, ρ^{-1}. Проверить, будет ли отношение ρ рефлексивным, симметричным, антисимметричным, транзитивным?
2. Привести пример отношения частичного порядка.
3. Дана функция $f(x) = x^2\sqrt{x}$, отображающая множество действительных чисел R во множество действительных чисел, $R \to R$. Является ли эта функция сюръективной, инъективной, биективной? Почему?

Раздел 3 Булевы функции

Примеры решения задач по данному разделу приведены в пункте 2.3.4 данного издания

Вариант № 1
Упростить выражение $(A \wedge \overline{B \wedge C}) \supset ((A \wedge B \wedge C) \vee \overline{A})$
Для данной формулы булевой функции $\neg(x\&(y \supset (z \sim y)))$
А) составить соответствующую ей переключательную схему (при необходимости выполнить соответствующие преобразования формулы)
Б) найти ДНФ и КНФ, СДНФ,СКНФ методом равносильных преобразований;
В) найти СДНФ,СКНФ табличным способом (сравнить с СДНФ,СКНФ, полученными в пункте а);
Г) указать минимальную ДНФ и соответствующую ей переключательную схему.

Вариант № 2

Упростить выражение $\left[A \wedge (\overline{B} \vee \overline{C})\right] \supset \left[((\overline{\overline{A} \vee \overline{B}}) \wedge C) \vee \overline{A}\right]$
Для данной формулы булевой функции $\neg(x\& y) \supset ((xVz) \supset y)$
А) составить соответствующую ей переключательную схему (при необходимости выполнить соответствующие преобразования формулы)
Б) найти ДНФ и КНФ, СДНФ,СКНФ методом равносильных преобразований;
В) найти СДНФ,СКНФ табличным способом (сравнить с СДНФ,СКНФ, полученными в пункте а);
Г) указать минимальную ДНФ и соответствующую ей переключательную схему.

Вариант № 3

Упростить выражение $\left\lfloor((\overline{(\overline{A} \vee \overline{B})} \wedge C) \vee \overline{A}\right\rfloor \supset \left[A \wedge \overline{B \wedge C}\right]$.
Для данной формулы булевой функции (x&¬y ⊃ z) ⊃ (x ~ z)
А) составить соответствующую ей переключательную схему (при необходимости выполнить соответствующие преобразования формулы)
Б) найти ДНФ и КНФ, СДНФ,СКНФ методом равносильных преобразований;
В) найти СДНФ,СКНФ табличным способом (сравнить с СДНФ,СКНФ, полученными в пункте а);
Г) указать минимальную ДНФ и соответствующую ей переключательную схему.

Вариант № 4
Упростить выражение $\left[(A \wedge B \wedge C) \vee \overline{A}\right] \supset \left[A \wedge (\overline{B} \vee \overline{C})\right]$
Для данной формулы булевой функции ¬(x ⊃ y)V ¬(y&(x~z))

А) составить соответствующую ей переключательную схему (при необходимости выполнить соответствующие преобразования формулы)
Б) найти ДНФ и КНФ, СДНФ,СКНФ методом равносильных преобразований;
В) найти СДНФ,СКНФ табличным способом (сравнить с СДНФ,СКНФ, полученными в пункте а);
Г) указать минимальную ДНФ и соответствующую ей переключательную схему.

Вариант № 5
Упростить выражение $\left\lfloor((\overline{(\overline{A} \vee \overline{B})} \wedge C) \vee \overline{A}\right\rfloor \supset \left[A \wedge (\overline{B} \vee \overline{C})\right]$
Для данной формулы булевой функции ¬(x ⊃ z) V ¬(y ~ z)
А) составить соответствующую ей переключательную схему (при необходимости выполнить соответствующие преобразования формулы)
Б) найти ДНФ и КНФ, СДНФ,СКНФ методом равносильных преобразований;
В) найти СДНФ,СКНФ табличным способом (сравнить с СДНФ,СКНФ, полученными в пункте а);
Г) указать минимальную ДНФ и соответствующую ей переключательную схему.

Вариант № 6
Упростить выражение $\left\lfloor(\overline{\overline{A} \wedge B \wedge \overline{C}})\right\rfloor \supset \left\lfloor\overline{A \vee \overline{B} \vee C}\right\rfloor$
Для данной формулы булевой функции ¬(x ⊃ y)V ¬(y&(x~z))
А) составить соответствующую ей переключательную схему (при необходимости выполнить соответствующие преобразования формулы)
Б) найти ДНФ и КНФ, СДНФ,СКНФ методом равносильных преобразований;
В) найти СДНФ,СКНФ табличным способом (сравнить с СДНФ,СКНФ, полученными в пункте а);
Г) указать минимальную ДНФ и соответствующую ей переключательную схему.

Вариант № 7
Упростить выражение $\overline{(A \vee B)} \vee \overline{(\overline{A} \wedge \overline{B}) \wedge (\overline{A} \vee (A \wedge \overline{B}))}$
Для данной формулы булевой функции ¬(x&y ⊃ z) ⊃ (x ⊃ y)
А) составить соответствующую ей переключательную схему (при необходимости выполнить соответствующие преобразования формулы)
Б) найти ДНФ и КНФ, СДНФ,СКНФ методом равносильных преобразований;
В) найти СДНФ,СКНФ табличным способом (сравнить с СДНФ,СКНФ, полученными в пункте а);
Г) указать минимальную ДНФ и соответствующую ей переключательную схему.

Вариант № 8

Упростить выражение $\overline{(\overline{A}\vee(\overline{B}\wedge\overline{C}))}\vee\left[(A\wedge B)\vee(A\wedge C)\right]$

Для данной формулы булевой функции x ⊃(z ⊃(x V y&z))

А) составить соответствующую ей переключательную схему (при необходимости выполнить соответствующие преобразования формулы)

Б) найти ДНФ и КНФ, СДНФ,СКНФ методом равносильных преобразований;

В) найти СДНФ,СКНФ табличным способом (сравнить с СДНФ,СКНФ, полученными в пункте а);

Г) указать минимальную ДНФ и соответствующую ей переключательную схему.

Вариант № 9

Упростить выражение $(\overline{A}\wedge\overline{B})\vee(A\vee B)\vee(A\wedge(\overline{A}\vee B))$

Для данной формулы булевой функции ¬(x~y) ⊃ (xVz)

А) составить соответствующую ей переключательную схему (при необходимости выполнить соответствующие преобразования формулы)

Б) найти ДНФ и КНФ, СДНФ,СКНФ методом равносильных преобразований;

В) найти СДНФ,СКНФ табличным способом (сравнить с СДНФ,СКНФ, полученными в пункте а);

Г) указать минимальную ДНФ и соответствующую ей переключательную схему.

Вариант № 10

Упростить выражение $(A\wedge(B\vee C))\vee\left[\overline{(\overline{A}\vee\overline{B})\wedge(\overline{A}\vee\overline{C})}\right]$

Для данной формулы булевой функции x ⊃(y ⊃ (z ⊃ y&z))

А) составить соответствующую ей переключательную схему (при необходимости выполнить соответствующие преобразования формулы)

Б) найти ДНФ и КНФ, СДНФ,СКНФ методом равносильных преобразований;

В) найти СДНФ,СКНФ табличным способом (сравнить с СДНФ,СКНФ, полученными в пункте а);

Г) указать минимальную ДНФ и соответствующую ей переключательную схему.

Раздел 4 «Элементы комбинаторики»

Примеры решения задач по данному разделу приведены в пункте 2.3.5 данного издания

Вариант 1.

Сколько целых чисел делится на 4, 5 или 6 между 1 и 2003?.

Сколько целых чисел делится на 9 и 3 между 1 и 2003?.

Сколько существует способов вытащить из колоды 13 карт, содержащих 7 карт одной масти?

Человек покупает 10 различных игрушек для своих четырех детей Сколькими способами он может распределить игрушки?

Возведите в степень $(2+3m)^{15}$

Вариант 2.

Сколько целых чисел делится на 6, 7 или 11 между 1 и 2125? Сколько целых чисел делится на 7 и 11 между 1 и 2125?

Сколько существует способов вытащить из колоды 13 карт, содержащих 4 карт ы одной масти?

Если в урне имеются 10 красных, 10 зеленых, 10 синих шаров, то сколькими различными способами можно выбрать 5 шаров?

Возведите в степень $(3+5m)^{17}$

Вариант 3.
Сколько целых чисел делится на 6 или 12 или 7 между 1 и 3115? Сколько целых чисел делится на 6 и 21 между 1 и 3115?
Сколько существует способов вытащить из колоды 13 карт, содержащих 9 карт одной масти?
Цветочник продает 10 видов цветов. Сколько различных букетов из 8 цветков модно сделать?
Возведите в степень $(2+7m)^{13}$

Вариант 4.
Сколько целых чисел делится на 6 или 9 или 19 между 1 и 3967? Сколько целых чисел делится на 8 и 21 между 1 и 3967?
Сколько существует способов вытащить из колоды 13 карт, содержащих 10 карт одной масти? (стандартная колода 52 карты)
Если в урне имеются 20 красных, 20 зеленых, 20 синих шаров, то сколькими различными способами можно выбрать 10 шаров?
Возведите в степень $(8+2m)^{19}$

Вариант 5.
Сколько целых чисел делится на 5 или 13 или 7 между 1 и 42115? Сколько целых чисел делится на 6 и 21 между 1 и 42115?
Сколько существует способов вытащить из колоды 13 карт, содержащих 12 карт одной масти?
Цветочник продает 10 видов цветов. Сколько различных букетов из 12 цветков модно сделать?
Возведите в степень $(2+m)^{21}$

Вариант 6.
Сколько целых чисел делится на 5 или 18 или 7 между 1 и 3597? Сколько целых чисел делится на 5и 21 между 1 и 3597?
Сколько существует способов вытащить из колоды 13 карт, содержащих 11 карт одной масти?
Человек покупает 12 различных игрушек для своих четырех детей Сколькими способами он может распределить игрушки?
Возведите в степень $(4+3m)^{16}$

Вариант 7.
Сколько целых чисел делится на 4, 5 или 6 между 1 и 2003?.
Сколько целых чисел делится на 9 и 3 между 1 и 2003?.
Сколько существует способов вытащить из колоды 13 карт, содержащих 7 карт одной масти?
Человек покупает 10 различных игрушек для своих четырех детей Сколькими способами он может распределить игрушки?
Возведите в степень $(2+3m)^{15}$

Вариант 8.
Сколько целых чисел делится на 6, 7 или 11 между 1 и 2125? Сколько целых чисел делится на 7 и 11 между 1 и 2125?

Сколько существует способов вытащить из колоды 13 карт, содержащих 4 карт ы одной масти?
Если в урне имеются 10 красных, 10 зеленых, 10 синих шаров, то сколькими различными способами можно выбрать 5 шаров?
Возведите в степень $(3+5m)^{17}$

Вариант 9.
Сколько целых чисел делится на 6 или 12 или 7 между 1 и 3115? Сколько целых чисел делится на 6 и 21 между 1 и 3115?
Сколько существует способов вытащить из колоды 13 карт, содержащих 9 карт одной масти?
Цветочник продает 10 видов цветов. Сколько различных букетов из 8 цветков модно сделать?
Возведите в степень $(2+7m)^{13}$

Вариант 10.
Сколько целых чисел делится на 6 или 9 или 19 между 1 и 3967? Сколько целых чисел делится на 8 и 21 между 1 и 3967?
Сколько существует способов вытащить из колоды 13 карт, содержащих 10 карт одной масти? (стандартная колода 52 карты)
Если в урне имеются 20 красных, 20 зеленых, 20 синих шаров, то сколькими различными способами можно выбрать 10 шаров?
Возведите в степень $(8+2m)^{19}$

Раздел 5 «Графы»
Примеры решения задач по данному разделу приведены в пункте 2.3.1 данного издания

1. Описать граф, заданный матрицей смежности, используя как можно больше характеристик. Составить матрицу инцидентности и связности (сильной связности).
2. Пользуясь алгоритмом Форда-Беллмана, найти минимальный путь из x_1 в x_7 в ориентированном графе, заданном матрицей весов.
3. Пользуясь алгоритмом Краскала, найти минимальное остовное дерево для графа, заданного матрицей длин ребер.

Варианты заданий

1.1. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 2. $\begin{pmatrix} \infty & 4 & 6 & 12 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 13 & 7 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 5 & \infty & 3 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 10 & 9 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 8 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 11 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \end{pmatrix}$ 3. $\begin{pmatrix} \infty & 12 & 6 & 20 & 14 \\ 12 & \infty & 2 & 4 & 6 \\ 6 & 2 & \infty & 10 & 12 \\ 20 & 4 & 10 & \infty & 6 \\ 14 & 6 & 12 & 6 & \infty \end{pmatrix}$

2.1. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 2. $\begin{pmatrix} \infty & 1 & 3 & 9 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 10 & 4 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 2 & \infty & 1 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 7 & 6 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 5 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 8 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \end{pmatrix}$ 3. $\begin{pmatrix} \infty & 1 & \infty & 4 & 5 \\ 1 & \infty & 2 & \infty & 1 \\ \infty & 2 & \infty & 1 & 1 \\ 4 & \infty & 1 & \infty & 3 \\ 5 & 1 & 1 & 3 & \infty \end{pmatrix}$

3.1. $$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. $$\begin{pmatrix} \infty & 3 & 5 & 11 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 12 & 6 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 3 & \infty & 2 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 9 & 8 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 7 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 10 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \end{pmatrix}$$

3. $$\begin{pmatrix} \infty & 6 & 3 & 10 & 7 \\ 6 & \infty & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & \infty & 5 & 6 \\ 10 & 2 & 5 & \infty & 3 \\ 7 & 3 & 6 & 3 & \infty \end{pmatrix}$$

4.1. $$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. $$\begin{pmatrix} \infty & \infty & 5 & 4 & 2 & 2 & 9 \\ \infty & \infty & 1 & 1 & \infty & 1 & 1 \\ 2 & \infty & \infty & 1 & 1 & \infty & 3 \\ \infty & 2 & 1 & \infty & 1 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 2 & 2 & \infty & 1 & 6 \\ 1 & 5 & \infty & 1 & 1 & \infty & \infty \\ 2 & \infty & 1 & \infty & 1 & 2 & \infty \end{pmatrix}$$

3. $$\begin{pmatrix} \infty & 7 & 2 & 11 & 7 \\ 7 & \infty & 3 & \infty & 4 \\ 2 & 3 & \infty & 1 & 5 \\ 11 & \infty & 1 & \infty & 3 \\ 7 & 4 & 5 & 3 & \infty \end{pmatrix}$$

5.1. $$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. $$\begin{pmatrix} \infty & 4 & \infty & \infty & 3 & 1 & \infty \\ 3 & \infty & 2 & 1 & \infty & \infty & 4 \\ 1 & 1 & \infty & \infty & \infty & \infty & 1 \\ \infty & 3 & 1 & \infty & 1 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 2 & \infty & \infty & 1 & 5 \\ \infty & 3 & \infty & 2 & 2 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 2 & \infty & \infty & 2 & \infty \end{pmatrix}$$

3. $$\begin{pmatrix} \infty & 2 & \infty & 5 & 5 \\ 2 & \infty & 8 & \infty & 7 \\ \infty & 8 & \infty & 10 & 1 \\ 5 & \infty & 10 & \infty & 13 \\ 5 & 7 & 1 & 13 & \infty \end{pmatrix}$$

6.1. $$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. $$\begin{pmatrix} \infty & \infty & 9 & \infty & \infty & 2 & 12 \\ 1 & \infty & \infty & \infty & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & \infty & \infty & 1 & \infty & 2 \\ \infty & 1 & 1 & \infty & \infty & 1 & \infty \\ 1 & 2 & \infty & 2 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 1 & \infty & 8 \\ \infty & 2 & 1 & \infty & 1 & 2 & \infty \end{pmatrix}$$

3. $$\begin{pmatrix} \infty & 1 & 5 & 4 & 5 \\ 1 & \infty & 2 & 6 & 1 \\ 5 & 2 & \infty & 1 & 7 \\ 4 & 6 & 1 & \infty & 4 \\ 5 & 1 & 7 & 4 & \infty \end{pmatrix}$$

7.1. $$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. $$\begin{pmatrix} \infty & 3 & 4 & 9 & \infty & \infty & \infty \\ 12 & \infty & \infty & 10 & 4 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 2 & \infty & 1 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 7 & 6 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 5 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 8 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \end{pmatrix}$$

3. $$\begin{pmatrix} \infty & 4 & 3 & 5 & 6 \\ 4 & \infty & 2 & \infty & 1 \\ 3 & 2 & \infty & 1 & 1 \\ 5 & \infty & 1 & \infty & 3 \\ 6 & 1 & 1 & 3 & \infty \end{pmatrix}$$

8.1. $$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. $$\begin{pmatrix} \infty & 2 & 5 & 8 & 9 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 10 & 4 & \infty & \infty \\ 5 & 3 & \infty & 2 & 1 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 7 & 6 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 5 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 9 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \end{pmatrix}$$

3. $$\begin{pmatrix} \infty & 1 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & \infty & 2 & 9 & 1 \\ 3 & 2 & \infty & 1 & 1 \\ 4 & 9 & 1 & \infty & 3 \\ 5 & 1 & 1 & 3 & \infty \end{pmatrix}$$

9.1. $$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2. $$\begin{pmatrix} \infty & 2 & 5 & 14 & \infty & \infty & \infty \\ 11 & \infty & \infty & 12 & 6 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 3 & \infty & 2 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 9 & 8 & \infty \end{pmatrix}$$

3. $$\begin{pmatrix} \infty & 5 & 3 & 10 & 7 \\ 5 & \infty & 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & \infty & 5 & 6 \\ 10 & 2 & 5 & \infty & 3 \end{pmatrix}$$

1 0 1 1 0 1 ∞ ∞ ∞ ∞ ∞ ∞ 7 7 4 6 3 ∞

1 0 0 0 1 0 ∞ ∞ ∞ ∞ ∞ ∞ 10

∞ ∞ ∞ ∞ ∞ ∞ ∞

10. 1 0 1 1 0 1 1 2. ∞ ∞ 5 4 2 3 9 3. ∞ 7 2 11 7

1 0 0 1 1 1 ∞ ∞ 1 1 ∞ 1 6 7 ∞ 3 ∞ 4

1 0 0 0 1 0 4 ∞ ∞ 1 1 ∞ 3 2 3 ∞ 1 5

0 1 0 0 0 1 ∞ 2 1 ∞ 1 ∞ ∞ 11 ∞ 1 ∞ 3

1 1 1 0 0 1 ∞ ∞ 2 2 ∞ 1 6 7 4 5 3 ∞

1 1 0 1 1 0 1 5 ∞ 1 1 ∞ ∞

2 ∞ 1 ∞ 1 2 ∞

3 Методические рекомендации по подготовке к практическим занятиям

3.1 Пояснительная записка

Рабочей программой дисциплины предусмотрено три практических занятия, содержание которых раскрыто ниже

Данное издание предназначено для студентов направления подготовки 44.03.01Педагогическое образование (профиль Информатика), поскольку дисциплина «Математическая логика» относится к базовой части дисциплин.

Цель практических занятий:

- развитие навыков и компетенций в процессе аудиторной и самостоятельной исследовательской деятельности;

- отработка навыков аргументированной защиты выводов и предложений.

- углубить и закрепить знания, полученные на лекциях и в ходе самостоятельной работы;

- проверить эффективность и результативность самостоятельной работы обучающихся над учебным материалом;

- привить будущим бакалаврам навыки поиска, обобщения и изложения учебного материала в аудитории, развить навыки самостоятельной исследовательской деятельности;

- выработать умение формулировать, обосновывать и излагать собственное суждение по обсуждаемому вопросу, умение отстаивать свои взгляды;

- формирование навыков использования математических моделей и ППП для принятия целесообразных решений в различных ситуациях.

Содержание занятий нацелено на формирование у обучающихся компетенций, связанных с умением работать с информацией.

В данном пособии представлены два раздела: теоретического и практического характера.

Материал изложен по трем темам в соответствии с содержанием курса:

– Использование математического языка для записи и обработки информации;
– Вероятностные методы обработки информации;
– Статистические методы обработки информации.

В практической части издания предлагаются теоретические вопросы к каждому занятию, перечисляются основные термины, знание которых необходимо для занятия, предлагается список источников, которые помогут при подготовке к занятию. Также в практической части предлагаются задания и задачи, выполнение которых способствует формированию соответствующих компетенций у будущих педагогов.

3.2 Методические указания по подготовке к практическим занятиям

Подготовку к участию в практическом занятии целесообразно организовать в следующей последовательности:

- подобрать учебную, справочную и другую литературу, необходимую для получения более полной информации по теме предстоящего занятия;
- повторить соответствующий теоретический материал, обращая особое внимание на список терминов (словарь занятия), необходимых для участия в занятии;
- разобрать примеры, иллюстрирующие решение задач, приведенные в литературе, в теоретическом материале данного пособия;
- найти ответы на контрольные вопросы;
- отобрать термины, необходимые для освещения теоретических вопросов занятия, составить план выступления.

Порядок проведения лабораторного занятия:

– входной контроль подготовки обучающихся и вводный инструктаж; (терминологический диктант, тест на знание терминов занятия);

– обсуждение вопросов занятия в указанной последовательности;

– решение задач по теме занятия

– общее подведение итогов.

Каждый обучающийся должен иметь на занятии рабочую тетрадь, конспект лекций.

Желательно при подготовке к занятиям придерживаться следующих рекомендаций:

1. При изучении конспектов лекций, учебников, учебных пособий, интернет-ресурсов и других материалов необходима его собственная интерпретация. Не следует жёстко придерживаться терминологии лектора, а правильно уяснить сущность и передать её в наиболее удобной форме.

2. При изучении основной рекомендуемой литературы следует сопоставить учебный материал темы с конспектом, выявить основные моменты изучаемой темы, обратить внимание на особенности изложения материала авторами учебников. При этом нет необходимости составлять дополнительный конспект, достаточно в основном конспекте сделать пояснительные записи (желательно другим цветом).

3. Приступая к решению задачи, студент должен прежде всего уяснить содержание задачи: данные и требование задачи. Составить модель задачи (изобразить графически, в виде таблицы, схемы). Затем найти необходимые теоремы и формулы, составить план решения задачи.

3.2.1 Алгебра множеств

<u>Формируемые компетенции</u>

– способность использовать естественнонаучные и математические знания для ориентирования в современном информационном пространстве

<u>Задачи</u>

– познакомить с методами формализации реальных ситуаций, явлений и процессов средствами дискретной математики

– научить употреблять специальную математическую символику для выражения количественных и качественных отношений между объектами;

– формирование навыков построения математических моделей средствами дискретной математики

<u>Вопросы к занятию</u>

1. Понятие множества. Операции над множествами и их геометрические иллюстрации.

2. Алгебра множеств. Основные тождества алгебры множеств.

3.Эквивалентность множеств.

4. Счетные множества. Множества мощности континуум.

Информация по теории этих вопросов имеется в теоретической части данного пособия (п. 3.1).

Практические задания

Задание №1.

1. Фирма имеет 100 предприятий, причем каждое предприятие выпускает хотя бы одну продукцию вида A, B, C. Продукцию всех трех видов выпускают 10 предприятий, продукцию A и B – 18 предприятий, продукцию A и C – 15 предприятий, продукцию B и C – 21 предприятие. Число предприятий, выпускающих продукцию A равно числу предприятий, выпускающих продукцию B и равно числу предприятий, выпускающих продукцию C. Найти число всех предприятий.
2. В группе спортсменов 30 человек. Из них 20 занимаются плаванием, 18 – легкой атлетикой и 10 – лыжами. Плаванием и легкой атлетикой занимаются 11 человек, плаванием и лыжами – 8, легкой атлетикой и лыжами – 6 человек. Сколько спортсменов занимаются всеми тремя видами спорта?
3. В студенческой группе 20 человек. Из них 10 имеют оценку “отлично” по английскому языку, 8 - по математике, 7 - по физике, 4 - по английскому языку и по математике, 5 - по английскому языку и по физике, 4 - по математике и по физике, 3 - по английскому языку, по математике и по физике. Сколько студентов группе не имеют отличных оценок?
4. В классе 20 человек. На экзаменах по истории, математике и литературе 10 учеников не получили ни одной пятерки, 6 учеников получили 5 по истории, 5 – по математике и 4 – по литературе; 2 - по истории и математике, 2 - по истории и литературе, 1 - по математике и литературе. Сколько учеников получили 5 по всем предметам?
5. В спортивном лагере 100 человек, занимающихся плаванием, легкой атлетикой и лыжами. Из них 10 занимаются и плаванием, и легкой атлетикой, и лыжами, 18 – плаванием и легкой атлетикой, 15 – плаванием и лыжами, 21 – легкой атлетикой и лыжами. Число спортсменов, занимающихся плаванием, равно числу спортсменов, занимающихся легкой атлетикой, и равно числу спортсменов, занимающихся лыжами. Найти это число.
6. Группе студентов предложено три спецкурса: по мультимедиа, искусственному интеллекту и имитационному моделированию. 22 студента записались на спецкурс по мультимедиа, 18 – на спецкурс по искусственному интеллекту, 10 – на спецкурс по имитационному моделированию, 8 – на спецкурсы по мультимедиа и искусственному интеллекту, 15 – на спецкурсы по мультимедиа и имитационному моделированию, 7 – на спецкурсы по искусственному интеллекту и имитационному моделированию. 5 студентов записались на все три спецкурса. Сколько студентов в группе?
7. Во время сессии 24 студента группы должны сдать три зачета: по физике, математике и программированию. 20 студентов сдали зачет по физике, 10 – по математике, 5 – по программированию, 7 – по физике и математике, 3 – по физике и программированию, 2 – по математике и программированию. Сколько студентов сдали все три зачета?
8. В группе переводчиков 15 человек владеет английским языком, 19 – французским, 8 – немецким. 9 переводчиков владеют английским и французским языком, 7 – английским и немецким, 6 – французским и немецким. 4 переводчика владеют всеми тремя языками. Сколько переводчиков в группе?

9. Опрос группы студентов показал, что 70% из них любят ходить в кино, 60% в театр, 30% на концерты. В кино и театр ходят 40% студентов, в кино и на концерты – 20%, в театр и на концерты – 10%. Сколько студентов (в %) ходят в кино, театр и на концерты?

10. В группе 20 учеников. После медицинского осмотра на дополнительное обследование 14 учеников были направлены к терапевту, 6 – к окулисту, 5 – к ортопеду. К терапевту и окулисту были направлены 3 ученика, к терапевту и ортопеду –3, к окулисту и ортопеду – 2. Сколько учеников были направлены к терапевту, окулисту и ортопеду?

11. В одной из повестей Льюиса Кэррола – автора «Алисы в Стране Чудес», «Алисы в Зазеркалье» и др. – есть такая задача: «В ожесточенном бою 70 из 100 пиратов потеряли один глас, 757 – одно ухо, 80 – одну руку и 85 одну ногу. Каково минимальное количество потерявших одновременно глаз, ухо, руку и ногу?

12. Старейший математик среди шахматистов и старейший шахматист среди математиков – это один и тот же человек или (возможно) разные?

13. Каждый десятый математик – шахматист, а каждый пятый шахматист – математик. Кого больше – математиков или шахматистов, и во сколько раз?

14. Может ли множество двух отцов и двух детей состоять из трех человек? В каком случае?

Задание 2.

1. Упростить: $\overline{(A\cup B)} \;\cup\; \overline{A}\cup\overline{B}$.
2. Упростить: $A\cap\ (A\cup B)$.
3. Упростить: $(A\backslash B)\cup(A\backslash B)$.
4. Упростить: $(A\cap B)\cup(A\cap B)$.
5. Упростить: $(A\cup B)\cup(A\cup B)$.
6. Упростить: $(\,\overline{A}\cup\overline{B}\,)\setminus(A\cup B)$
7. Упростить: $(A\cup B)\cup(A\cap B)$.
8. Верно или неверно равенство: $(A\setminus B)\cup(A\cap B) = A$?
9. Пользуясь равносильными преобразованиями, установить, верно или неверно равенство: $A\ \setminus(B\cup C) = (A\setminus B)\cup C$?
10. Верно или неверно равенство: $(A\cap B)\ \cap(A\cup B) = B$?
11. В каком случае $A\subseteq A\cap B$?
12. Придумать пример множеств A, B, C, каждое из которых имеет мощность континуума, так, чтобы выполнялось равенство: $A\cup B\ = C$.
13. Привести пример двух множеств A и B, таких, что мощность множества A больше мощности множества B.
14. Придумать пример множеств A, B, C, каждое из которых имеет мощность континуума, так, чтобы выполнялось равенство: $A\cup B\ = C$.
15. Является ли множество $A = \{1, 2, 3\}$ подмножеством множества $B = \{\{1\}, \{2, 3\}\}$?
16. Найти все подмножества множества $A= \{1, 2, 3, 4)$.
17. Доказать, что множество точек $A= \{(x, y)\colon y = |x|, -,\ -1\le x\le 1\}$ несчетно.
18. Найти все подмножества множества $A= \{a, b, c, d\}$.
19. Является ли множество $A = \{1, 2, 3\}$ подмножеством множества $B = \{\{1\}, \{2, 3\}\}$?
20. Эквивалентны ли множества $A = \{x\colon x^2 - 8x + 15= 0\}$ и $B = \{2, 3\}$?
21. Является ли множество всех атомов Солнечной системы бесконечным?

Задание №3

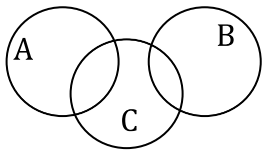
1. Нарисовать диаграмму Эйлера-Венна для множества $\overline{A}\cup\overline{B}$.
2. Нарисовать диаграмму Эйлера-Венна для множества $(A\setminus B)\ \cap\ C$
3. Нарисовать диаграмму Эйлера-Венна для множества $(A\setminus B)\cup(A\setminus C)$.
4. Нарисовать диаграмму Эйлера-Венна для множества $(\,\overline{A}\cup\overline{B}\,)\setminus(A\cup B)$.

5. Нарисовать диаграмму Эйлера-Венна для множества $A \setminus (B \cap C)$.
6. Нарисовать диаграмму Эйлера-Венна для множества $(A \cap B) \cup (C \setminus (A \cup B))$.
7. Нарисовать диаграмму Эйлера-Венна для множества $(A \setminus B) \cup C$.
8. Нарисовать диаграмму Эйлера-Венна для множества $\overline{A \setminus B} \cup C \cap (\bar{A} \setminus B$.
9. Нарисовать диаграмму Эйлера-Венна для множества $(\bar{B} \cup C \cap A) \setminus A \setminus \bar{C}$.
10. Нарисовать диаграмму Эйлера-Венна для множества $\overline{(B \setminus C)} \cup (B \setminus \bar{A} \cap C)$

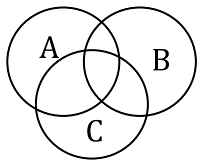
Задание № 4

Заштриховать ту часть диаграммы, которая соответствует следующему множеству:

а)



б)



1) $(A \cup B) \setminus C$;
2) $(C \setminus B) \cup (A \setminus C)$;
3) $(A \setminus C) \cup (B+C)$;
4) $(C+A) \setminus (B \cap A)$;
5) $(A \cap B) \cup (C+B)$;
6) $(A+B) \cap (C \setminus B)$.

1) $(A \cup B) \setminus (C \cap B)$;
2) $(A \setminus B) \cap (C \setminus B)$;
3) $(C \setminus A) \cup (C \setminus B)$;
4) $(C \setminus A) \cap (C \setminus B)$;
5) $(C \setminus B) \cup (A \setminus C)$;
6) $(C \cap A) + (B \cup A) \setminus C$.

Задание 5.

1. Какое из множеств $A = \{1, 4, 9, 16, 25,\ldots\}$ и $B = \{1, 1/2, 1/4, 1/6, 1/8,\ldots\}$ имеет большую мощность?
2. Доказать, что множества точек контуров всех треугольников эквивалентны.
3. Эквивалентны ли множества $A = \{2^x, 0<x<\infty\}$ и $B = \{2^n, n = 1, 2, \ldots\}$?
4. Эквивалентны ли множества $A = \{x: x^2-8x+15= 0\}$ и $B = \{2, 3\}$?
5. Эквивалентны ли множества $A = \{(x, y): y = \ln x, 0 < x < \infty\}$ и $B = \{(x, y): y = \sin x, -\infty < x < \infty\}$?
6. Эквивалентны ли множества $A = \{x: x^2 - 3x + 2 = 0\}$ и $B = \{1, 3\}$?
7. Эквивалентны ли множества $A = \{x: x^3 - 1 = 0\}$ и $B = \{x: x^2 - 3x + 2 = 0\}$?
8. Эквивалентны ли множества $A = \{y: y = x^3, 1< x <2\}$ и $B = \{y: y = 3^x, 3< x < \infty\}$?

Задание 6.

Найдите объединение, пересечение, разность и симметрическую разность множества A и B, если:

а) $A= \{a| a\in(-7; 1]\}$, $B= \{b| b\in[-3; 4]\}$;
б) $A= \{a| a\in[-7; 1]\}$, $B= \{b| b\in(-3; 4)\}$;
в) $A= \{a| a\in[-7; 1)\}$, $B= \{b| b\in[-3; 4)\}$;
г) $A= \{a| a\in(-7; 1)\}$, $B= \{b| b\in(-3;$

3.2.2 Операции над отношениями. Равносильные преобразования формул

Формируемые компетенции

– способность использовать естественнонаучные и математические знания для ориентирования в современном информационном пространстве;

– способность применять математический аппарат для решения поставленных задач, разрабатывать соответствующую процессу математическую модель и оценить ее адекватность.

Задачи

– прояснить основные понятия, факты и закономерности, характеризующие свойства абстрактных дискретных объектов;

– научить употреблять специальную математическую символику для выражения количественных и качественных отношений между объектами;

– выявить основные этапы построения математических моделей средствами дискретной математики

Вопросы к занятию

1. Отношения. Основные понятия и определения.
2. Операции над отношениями. Свойства отношений.
3. Функции. Основные понятия и определения.

Информация по теории этих вопросов имеется в теоретической части данного пособия (п. 3.2).

Практические задания

Задание 1.

Задано бинарное отношение. Найти $D(\rho)$, $R(\rho)$, $\rho \circ \rho$, ρ^{-1}.Проверить, будет ли отношение ρ рефлексивным, симметричным, антисимметричным, транзитивным?

1.1 $\rho_1 = \{<1, 1>, <1, 3>, <3, 1>, <3, 4>, <4, 3>\}$
1.2 $\rho_2 = \{<1, 3>, <3, 1>, <3, 4>, <4, 3>, <4, 4>\}$
1.3 $\rho_3 = \{<2, 2>, <2, 3>, <3, 2>, <3, 4>, <4, 1>\}$
1.4 $\rho_4 = \{<1, 1>, <1, 2>, <2, 1>, <3, 3>, <4, 4>\}$
1.5 $\rho_5 = \{<1, 2>, <2, 1>, <3, 4>, <4, 3>, <4, 4>\}$
1.6 $\rho_6 = \{<2, 2>, <2, 3>, <3, 2>, <3, 1>, <4, 1>\}$
1.7 $\rho_7 = \{<1, 1>, <1, 2>, <2, 1>, <2, 4>, <4, 2>\}$
1.8 $\rho_8 = \{<2, 2>, <2, 3>, <3, 2>, <3, 4>, <4, 2>\}$
1.9 $\rho_9 = \{<1, 1>, <2, 3>, <1, 3>, <3, 1>, <3, 2>\}$
1.10 $\rho_{10} = \{<1, 1>, <2, 3>, <1, 3>, <3, 1>, <3, 2>\}$

Задание 2.

Дана функция $f(x)$, отображающая множество действительных чисел R во множество действительных чисел, $R \to R$. Является ли эта функция сюръективной, инъективной, биективной? Почему?

2.1 $f(x) = x^2 + e^x$ 2.2 $f(x) = x^2 + e^{-x}$ 2.3 $f(x) = x + e^x$
2.4 $f(x) = x^3 + e^x$ 2.5 $f(x) = x + e^{-x}$ 2.6 $f(x) = -x + e^x$
2.7 $f(x) = x^2 + \sqrt{x}$ 2.8 $f(x) = x + \sqrt{x}$ 2.9 $f(x) = sinx + \sqrt{x}$ 2.10 $f(x) = lnx + \sqrt{x}$

Задание 3.

Назовите свойства отношений, заданных :

3.1 *На множестве натуральных чисел* N:

а) R_1 – «быть не больше (≤)»; б) R_2– «быть делителем»; в) R_3 – «быть равным».

3.2 *На множестве точек действительной плоскости* $R \times R$

а) R_4 – «находиться на одинаковом расстоянии от начала координат»;

б) R_5 – «быть симметричным относительно оси X»;

в) R_6 – «быть симметричным относительно оси У».

3.3 *На системе множеств* β(М):

а) R_7 – «пересекаться с» (иметь непустое пересечение);

б) R_8 – «являться строгим включением $\subset$»;

3.4 *На множестве людей*

а) R_9 – «быть сыном»; б) R_{10} – «жить в одном городе»; в) R_{11} – «быть братом».

Задание 4.

Привести примеры отношений.

4.1 Привести пример отношения не рефлексивного, не симметричного и транзитивного.

4.2. Привести пример отношения не симметричного, но рефлексивного и транзитивного.

4.3 Привести пример отношения не транзитивного, но рефлексивного и симметричного.

4.4 Привести пример отношения не симметричного, не рефлексивного и транзитивного.

4.5 Привести пример отношения транзитивного, рефлексивного и антисимметричного.

4.6 Привести пример отношения рефлексивного, симметричного и транзитивного.

4.7 Привести пример отношения транзитивного, рефлексивного и антисимметричного.

4.8 Привести пример отношения транзитивного, рефлексивного и симметричного.

4.9 Привести пример отношения не транзитивного, не рефлексивного и не симметричного.

5.Закончите каждое предложение, указав одно из свойств
(рефлексивность, симметричность, транзитивность, антисимметричность, антирефлексивность):

а) Всякое действительное число равно самому себе, поэтому отношение равенства обладает свойством…;

b) ($\forall$a, b, c $\in$R) (a < b $\wedge$b < c $\Rightarrow$a < c) – истинное высказывание, поэтому отношение «<» на R обладает свойством…;

c)($\forall$a, b, c $\in$Z) (a $\leq$b$\wedge$ b$\leq$ a a = b) – истинное высказывание, поэтому отношение « $\leq$» на Z обладает свойством…;

d)($\forall$a $\in$N) ($\overline{a \vdots a}$) – ложное высказывание, поэтому отношение «⋮» на N не обладает свойством…;

е) Если прямая a перпендикулярна b, то и прямая b перпендикулярна прямой a. Поэтому отношение перпендикулярности на множестве прямых плоскости обладает свойством…

3.2.3Нормальные формы. Основные правила комбинаторики

<u>Формируемые компетенции</u>

– способность использовать естественнонаучные и математические знания для ориентирования в современном информационном пространстве;

– способность применять математический аппарат для решения поставленных задач, разрабатывать соответствующую процессу математическую модель и оценить ее адекватность.

Задачи

– прояснить основные понятия, факты и закономерности, характеризующие свойства абстрактных дискретных объектов;

– научиться реализовывать классические арифметические, теоретико-числовые и комбинаторные алгоритмы при решении практических задач;

– познакомиться с классическими арифметическими, теоретико-числовыми и комбинаторными алгоритмами;

Вопросы к занятию

1. Правила суммы и произведения.
2. Перестановки и сочетания
3. Свойства биномиальных коэффициентов

Информация по теории этих вопросов имеется в теоретической части данного пособия (п. 3.3).

Практические задания

1. Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 1,2,3,4,5, если каждую из них можно использовать не более одного раза?

2. Сколько имеется пятизначных чисел, которые делятся на пять?

3. На одной из боковых сторон треугольника взято n точек, на другой – m точек. Каждая из вершин при основании треугольника соединена прямыми точками, взятыми на противоположной стороне.

- Сколько точек пересечения этих прямых образуется внутри треугольника?
- На сколько частей делит треугольник эти прямые?

4. Сколько есть двузначных чисел, у которых обе цифры четные?

5. Пассажир оставил вещи в автоматической камере хранения, а когда пришел получать вещи, выяснилось, что он забыл номер. Он только помнит, что в номере были числа 23 и 37. Чтобы открыть камеру, нужно правильно набрать пятизначный номер. Какое наибольшее количество номеров нужно перебрать, чтобы открыть камеру?

6. Из колоды, содержащей 52 карты, вынули 10 карт. В скольких случаях среди этих карт окажется:

А) хотя бы один туз; Б) ровно один туз;

В) не менее двух тузов; Г) ровно два туза?

7. Дано n точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Сколько прямых можно провести, соединяя точки попарно?

8. В соревнованиях по гимнастике две команды имели одинаковое число участников. В итоге общая сумма баллов, полученных всеми участниками, равна 156. Сколько было участников, если каждый из них получил 8 или 9 баллов?

9. Расстояние от А до В – 999 км. Вдоль дороги стоят километровые столбы, на которых расстояния от А до В записаны, как показано на рисунке. Сколько среди этих столбов таких, на которых есть только две различные цифры?

| 0 | 999 |, | 1 | 998 |, | 2 | 997 |,..., | 999 | 0 |

10. В некотором царстве каждые два человека отличаются набором зубов. Какова может быть наибольшая численность населения царства (максимальное количество зубов у человека - 32)?

11. В роте имеется три офицера и сорок солдат. Сколькими способами может быть выделен наряд, состоящий из одного офицера и трех солдат?

12. На рояле 88 клавиш. Сколько существует последовательностей из шести попарно различных звуков? (В последовательности звуки идут один за другим) Сколько существует

аккордов из шести звуков? (Аккорд получается, если любые 6 клавиш нажаты одновременно).

13. Сколько членов получится после раскрытия всех скобок в выражении $(a+1)(b+1)(c+1)(d+1)(e+1)(f+1)(g+1)$?

14. Сколько существует чисел от 0 до 10^n, в которые не входят две подряд идущие друг за другом одинаковые цифры?

15. Сколькими способами можно выбрать 6 карт из колоды, содержащей 52 карты, так, чтобы среди них были карты каждой масти?

16. Какова вероятность, купив один билет, угадать в спортлото (из 49):

А) k номеров (k=1,2,…,6);

Б) хотя бы k номеров?

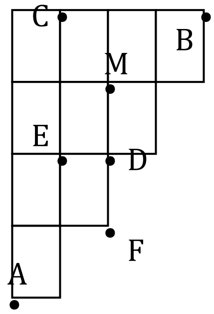
17. Сколькими способами можно посадить за круглый стол n мужчин и n женщин так, чтобы никакие два лица одного пола не сидели рядом?

18. Сколькими способами можно разложить в два кармана девять монет различного достоинства?

19. Сколько различных делителей имеет число : а) 2310; б) 10! ?

20. У англичан принято давать детям несколько имен. Сколькими способами можно назвать ребенка, если ему дадут не более трех имен, а общее число имен не более 300?

21. На перекрестке А автомобилист разбил стекло левой фары и теперь ему надо кратчайшим путем попасть в ремонтную мастерскую В, не попав при этом в пункт М. Сколькими способами он может выбрать маршрут?



22. Международная комиссия состоит из 9 человек. Материалы комиссии хранятся в сейфе. Сколько замков должен иметь сейф, сколько ключей для них нужно изготовить и как их разделить между членами комиссии, чтобы доступ к сейфу был возможен тогда и только тогда, когда соберутся 6 членов комиссии?

23. Определить, сколько рациональных членов содержится в разложении:

а) $(\sqrt{2}+\sqrt[3]{3})^{20}$; б) $(\sqrt[3]{6}+\sqrt[4]{2})^{100}$.

24. Найти коэффициенты при t^k в разложении:

а) $(2+t^4+t^7)^{15},\ k=17$; б) $(2+t-2t^3)^{20},\ k=10$.

25. Какое число больше: $99^{50}+100^{50}$ или 101^{50}?

3.2.4 Графы: основные характеристики и способы задания

<u>Формируемые компетенции</u>

– способность использовать естественнонаучные и математические знания для ориентирования в современном информационном пространстве;

– способность применять математический аппарат для решения поставленных задач, разрабатывать соответствующую процессу математическую модель и оценить ее адекватность.

Задачи

– прояснить основные понятия, факты и закономерности, характеризующие свойства абстрактных дискретных объектов;

– познакомиться с методами дискретного анализа, в том числе с методами теории графов;

– научиться пользоваться основными алгоритмами дискретной оптимизации

Вопросы к занятию

1. Основные понятия и определения. Операции над графами.
2. Маршруты, цепи, циклы.
3. Способы задания графов.
4. Метрические характеристики графа.
5. Упорядочивание элементов орграфов.
6.Деревья. Остовы графов. Фундаментальные циклы.

Информация по теории этих вопросов имеется в теоретической части данного пособия (п. 3.3).

Практические задания

1. Какая модель теории графов адекватна следующей задаче:

Различные организации x_1, ... , x_n обмениваются некоторой информацией (при этом связи могут быть направленными). Если между организациями x_i и x_j возможен непосредственный обмен информацией, то затраты на него составляют r_{ij} рублей. Возможен ли обмен информацией между двумя организациями? Если возможен, то как осуществить этот обмен с наименьшими затратами?

2. Какая модель теории графов адекватна следующей задаче:

Имеется схема городских дорог с перекрестками и, возможно, односторонним движением. Необходимо найти маршрут, соединяющий две точки на карте. Как найти такой маршрут при условии, что его длина минимальна?

3. Какая модель теории графов адекватна следующей задаче: Требуется построить схему электрической сети, в которой клеммы должны быть соединены с помощью проводов наименьшей общей длины.

4. Какая модель теории графов адекватна следующей задаче:

Имеется сеть связи, соединяющая n узлов. Если выйдут из строя некоторые каналы, то связь между узлами может быть нарушена. Какие каналы можно удалить без нарушения связи? Какие каналы нужно удалить, чтобы связь не нарушалась, а общая стоимость всех каналов была минимальной?

5. Какая модель теории графов адекватна следующей задаче:

Разрабатывается проект газопровода, соединяющего буровые скважины в Мексиканском заливе с находящейся на берегу приемной станцией. Следует выбрать проект, в котором строительство газопровода имеет минимальную стоимость.

6. Какая модель теории графов адекватна следующей задаче:

Пусть имеется n изолированных городов. Какое минимальное количество дорог между некоторыми городами надо построить, чтобы иметь возможность попасть из любого города в любой другой? Если заданы расстояния между городами, то как выбрать сеть дорог с минимальной общей длиной?

7. Описать граф, заданный матрицей смежности, используя как можно больше характеристик. Составить матрицу инцидентности и связности (сильной связности).

$$1.\begin{pmatrix} 0&1&1&0&1&1\\ 1&0&0&1&0&0\\ 1&0&0&0&1&0\\ 0&1&0&0&1&0\\ 1&0&1&1&0&1\\ 1&0&0&0&1&0 \end{pmatrix}\quad 2.\begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&1\\ 0&0&1&1&1&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&1\\ 1&0&1&0&0&0\\ 1&0&1&0&0&0 \end{pmatrix}$$

$$3.\begin{pmatrix} 0&1&0&1&0&0\\ 1&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&1&1\\ 1&1&0&0&1&1\\ 0&0&1&1&0&0\\ 0&0&1&1&0&0 \end{pmatrix}\quad 4.\begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&1\\ 1&0&1&0&1&1\\ 1&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&1\\ 0&1&1&1&0&0\\ 0&0&1&0&0&0 \end{pmatrix}$$

$$5.\begin{pmatrix} 0&0&0&1&1&0\\ 0&0&0&1&0&1\\ 1&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&1\\ 1&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&1&0&0 \end{pmatrix}\quad 6.\begin{pmatrix} 0&1&0&0&1&1\\ 1&0&1&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1\\ 0&1&0&0&0&1\\ 1&0&0&1&1&0 \end{pmatrix}$$

8. Пользуясь алгоритмом Форда-Беллмана, найти минимальный путь из x_1 в x_7 в ориентированном графе, заданном матрицей весов.

$$1.\begin{pmatrix} \infty&1&3&9&\infty&\infty&\infty\\ \infty&\infty&\infty&10&4&\infty&\infty\\ \infty&\infty&\infty&2&\infty&1&\infty\\ \infty&\infty&\infty&\infty&7&6&\infty\\ \infty&\infty&\infty&\infty&\infty&\infty&5\\ \infty&\infty&\infty&\infty&\infty&\infty&8\\ \infty&\infty&\infty&\infty&\infty&\infty&\infty \end{pmatrix}\quad 2.\begin{pmatrix} \infty&4&6&12&\infty&\infty&\infty\\ \infty&\infty&\infty&13&7&\infty&\infty\\ \infty&\infty&\infty&5&\infty&3&\infty\\ \infty&\infty&\infty&\infty&10&9&\infty\\ \infty&\infty&\infty&\infty&\infty&\infty&8\\ \infty&\infty&\infty&\infty&\infty&\infty&11\\ \infty&\infty&\infty&\infty&\infty&\infty&\infty \end{pmatrix}$$

$$3.\begin{pmatrix} \infty&3&5&11&\infty&\infty&\infty\\ \infty&\infty&\infty&12&6&\infty&\infty\\ \infty&\infty&\infty&3&\infty&2&\infty\\ \infty&\infty&\infty&\infty&9&8&\infty\\ \infty&\infty&\infty&\infty&\infty&\infty&7\\ \infty&\infty&\infty&\infty&\infty&\infty&10\\ \infty&\infty&\infty&\infty&\infty&\infty&\infty \end{pmatrix}\quad 4.\begin{pmatrix} \infty&\infty&5&4&2&2&9\\ \infty&\infty&1&1&\infty&1&1\\ 2&\infty&\infty&1&1&\infty&3\\ \infty&2&1&\infty&1&\infty&\infty\\ \infty&\infty&2&2&\infty&1&6\\ 1&5&\infty&1&1&\infty&\infty\\ 2&\infty&1&\infty&1&2&\infty \end{pmatrix}$$

$$5.\begin{pmatrix} \infty&4&\infty&\infty&3&1&\infty\\ 3&\infty&2&1&\infty&\infty&4\\ 1&1&\infty&\infty&\infty&\infty&1\\ \infty&3&1&\infty&1&\infty&\infty\\ \infty&\infty&2&\infty&\infty&1&5\\ \infty&3&\infty&2&2&\infty&\infty\\ \infty&\infty&2&\infty&\infty&2&\infty \end{pmatrix}\quad 6.\begin{pmatrix} \infty&4&3&\infty&\infty&3&\infty\\ \infty&\infty&4&2&\infty&\infty&\infty\\ \infty&\infty&\infty&4&3&\infty&6\\ \infty&\infty&\infty&\infty&4&5&2\\ \infty&2&\infty&\infty&\infty&4&5\\ \infty&\infty&\infty&\infty&\infty&\infty&1\\ \infty&\infty&\infty&\infty&\infty&\infty&\infty \end{pmatrix}$$

9. Пользуясь алгоритмом Краскала, найти минимальное остовное дерево для графа, заданного матрицей длин ребер.

1. $\begin{pmatrix} \infty & 12 & 6 & 20 & 14 \\ 12 & \infty & 2 & 4 & 6 \\ 6 & 2 & \infty & 10 & 12 \\ 20 & 4 & 10 & \infty & 6 \\ 14 & 6 & 12 & 6 & \infty \end{pmatrix}$ 2. $\begin{pmatrix} \infty & 1 & \infty & 4 & 5 \\ 1 & \infty & 2 & \infty & 1 \\ \infty & 2 & \infty & 1 & 1 \\ 4 & \infty & 1 & \infty & 3 \\ 5 & 1 & 1 & 3 & \infty \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} \infty & 6 & 3 & 10 & 7 \\ 6 & \infty & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & \infty & 5 & 6 \\ 10 & 2 & 5 & \infty & 3 \\ 7 & 3 & 6 & 3 & \infty \end{pmatrix}$ 4. $\begin{pmatrix} \infty & 7 & 2 & 11 & 7 \\ 7 & \infty & 3 & \infty & 4 \\ 2 & 3 & \infty & 1 & 5 \\ 11 & \infty & 1 & \infty & 3 \\ 7 & 4 & 5 & 3 & \infty \end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix} \infty & \mathbf{2} & \infty & \mathbf{5} & \mathbf{5} \\ \mathbf{2} & \infty & \mathbf{8} & \infty & \mathbf{7} \\ \infty & \mathbf{8} & \infty & \mathbf{10} & \mathbf{1} \\ \mathbf{5} & \infty & \mathbf{10} & \infty & \mathbf{13} \\ \mathbf{5} & \mathbf{7} & \mathbf{1} & \mathbf{13} & \infty \end{pmatrix}$ **6.** $\begin{pmatrix} \infty & \mathbf{10} & \mathbf{5} & \mathbf{2} & \mathbf{16} \\ \mathbf{10} & \infty & \mathbf{4} & \infty & \infty \\ \mathbf{5} & \mathbf{4} & \infty & \mathbf{8} & \mathbf{15} \\ \mathbf{2} & \infty & \mathbf{8} & \infty & \mathbf{8} \\ \mathbf{16} & \infty & \mathbf{15} & \mathbf{8} & \infty \end{pmatrix}$

4 Материалы к промежуточной аттестации

Вопросы к дифференцированному зачету

1 Математическая логика и основания математики.
2 Логические и семантические парадоксы.
3 Теоретико-множественные основы математической логики.
4 Языковые основы математической логики.
5 Логико-математические языки.
6 Логика высказываний. Определение высказывания
7 Операции над высказываниями. Алгебра высказываний
8 Формулы логики высказываний. Равносильность формул
9 Запись сложного высказывания в виде формулы логики высказываний
10 Тождественно-истинные и тождественно-ложные формулы. Проблема разрешимости
11 Формализация рассуждений. Правильные рассуждения.
12 Логика предикатов. Определение предиката. Кванторы
13 Формулы логики предикатов. Равносильность формул
14 Приведенные и нормальные формулы
15 Выражение суждения в виде формулы логики предикатов
16 Интерпретация формулы логики предикатов в виде суждения.
17 Выполнимость. Общезначимость
18 Принципы построения формальных теорий
19 Алгебра высказываний и синтаксис языка математических и логических знаков.
20 Исчисление высказываний
21 Структура логико-алгебраических моделей.
22 Принцип дедукции
23 Формальный вывод и выводимые формулы
24 Логическое следование
25 Непротиворечивость. Семантическая полнота исчисления высказываний
26 Исчисление предикатов. Основные понятия.
27 Алгебра предикатов.
28 Исчисление предикатов. Синтаксис и семантика языка логики предикатов.
29 Правила вывода и предложения исчисления предикатов
30 Автоматическое доказательство теорем.
31 Доказательство теорем методом резолюций.
32 Нечеткая логика. Использование нечеткой логики.
33 Нечеткие множества. Основные понятия.
34 Операции с нечеткими множествами
35 Нечеткие отношения
36 Модальные логики.
37 Язык модальной логики
38 Темпоральная логика.
39 Нечеткие высказывания
40 Нечеткие предикаты
41 Лингвистические переменные и исчисление нечетких высказываний.
42 Аксиоматический метод.
43 Понятие о метаязыке и метатеории.
44 Интерпретация формальной системы и теории
45 Структура языка и выражения. Функторы
46 Грамматики
47 Определение формальной системы

48 Алгоритмы. Определение алгоритма
49 Интуитивное понятие алгоритма.
50 Формализация и обобщение понятия алгоритма
51 Марковские алгоритмы.
52 Челночные алгоритмы
53 Вычислимые функции
54 Машина Тьюринга.
55 Вычислимые по Тьюрингу функции
56 Теорема Геделя о неполноте математики
57 Формальная арифметика
58 Сложность вычислений и элементы логического программирования
59 Рекурсивные множества.
60 Рекурсивные функции

Критерии оценивания на дифференцированном зачете

- **«отлично»** - оценка ставится за знание фактического матер็ила по дисциплине, владение понятиями системы знаний по дисциплине, личную освоенность знаний, умение объяснять сущность понятий, умение выделять главное в учебном материале, готовность к самостоятельному выбору, решению, умение найти эффективный способ решения проблемной ситуации, умение использовать знания в стандартных и нестандартных ситуациях, логичное и доказательное изложение учебного материала, владение точной речью, умение аргументировано отвечать па вопросы; вступать в диалоговое общение.
- **«хорошо»** - оценка ставится за владение терминологией по дисциплине, умение обобщения, умозаключения, за теоретическое осмысление проблемной ситуации, умение найти решение проблемной задачи, владение языковыми средствами для ответа на вопрос.
- **«удовлетворительно»** ставится за неполное знание терминологии по дисциплине, неполное владение терминологией, за неумение обобщать, делать вывод, за одностороннее решение задачи, неполное владение языковыми средствами, односторонний ответ на предложенный вопрос.
- **«неудовлетворительно»** оценка ставится за отсутствие знаний по дисциплине, представления по вопрос, непонимание материала по дисциплине, отсутствие решения задачи, наличие коммуникативных «барьеров» в общении, отсутствие ответа на предложенный вопрос.

5 Литература

Основная литература

1. Веретенников Б. М. Дискретная математика: учебное пособие, Ч. 1 [Электронный ресурс] / Веретенников Б. М., Белоусова В. И. - Издательство Уральского университета, 2014. – режим доступа - http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=276013
2. Редькин, Н.П. Дискретная математика [Электронный ресурс]/ Н.П. Редькин. – Москва : Физматлит, 2009. – 263 с. – ISBN 978-5-9221-1093-8– Режим доступа http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=75709

Дополнительная литература

1. Судоплатов, С.В. Дискретная математика : учебник [Электронный ресурс] / С.В. Судоплатов, Е.В. Овчинникова. - 4-е изд. - Новосибирск : НГТУ, 2012. – 278 с. - (Учебники НГТУ). – ISBN978-5-7782-1815-4 ; Режим доступа :

http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=135675

2. Ковалева Л. Ф. Дискретная математика в задачах. Учебное пособие [Электронный ресурс] / Ковалева Л. Ф. - Евразийский открытый институт, 2011. – режим доступа http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=93273

3. Триумфгородских, М.В. Дискретная математика и математическая логика для информатиков, экономистов и менеджеров : учебное пособие [Электронный ресурс]/ М.В. Триумфгородских. – Москва : Диалог-МИФИ, 2011. - 180 с. : табл., граф., ил. - Библиогр. в кн. - ISBN 978-5-86404-238-0 ; Режим доступа: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=136106

Периодические издания

– Информатика и образование: журнал. – Москва: «Образование и Информатика» , 2015 ;
– Инновации в образовании: журнал. Москва: Издательство СГУ, 2015

Интернет-ресурсы

https://www.coursera.org/learn/teoriya-grafov «Coursera», МООК: «Теория графов»

https://www.coursera.org/learn/kombinatorika-dlya-nachinayushchikh «Coursera», МООК: «Комбинаторика для начинающих)»