

Минобрнауки России

Бузулукский гуманитарно-технологический институт (филиал)  
федерального государственного бюджетного образовательного учреждения  
высшего профессионального образования

Оренбургского государственного университета

Кафедра физики, информатики и математики

## **Методические рекомендации по освоению дисциплины**

ДИСЦИПЛИНЫ

*«Б.1.Б.10.1 Математический анализ»*

Уровень высшего образования

БАКАЛАВРИАТ

Направление подготовки

38.03.01 Экономика

(код и наименование направления подготовки)

Финансы и кредит

(наименование направленности (профиля) образовательной программы)

Тип образовательной программы

Программа академического бакалавриата

Квалификация

Бакалавр

Форма обучения

Очная, Заочная

Год набора 2015

УДК 510  
ББК 22.11. я 73  
У 74

Рецензент – О.А. Степунина

**Шабалина, Л.Г.**

Ш 73 Методические рекомендации по освоению дисциплины Математический анализ / Л.Г. Шабалина; Бузулукский гуманитарно-технологический институт – Бузулук: БГТИ, 2015 – 68 с.

Методические рекомендации включают общие рекомендации по дисциплине «Математический анализ»: по проведению лекций, практических занятий, консультаций, зачетов и экзаменов, по подготовке к практическим занятиям по вилам работ студентов, методические рекомендации к самостоятельной работе, методические рекомендации к контрольной работе, содержание курса набор заданий для самостоятельной работы, вопросы к зачету и экзамену, список рекомендуемой литературы.

Пособие адресовано преподавателям и студентам вузов, обучающихся по направлению подготовки 38.03.01 Экономика заочной и очной форм обучения.

УДК 510  
ББК 22.11. я 73

© Шабалина Л.Г., 2015  
© БГТИ, 2015

## Введение

Цель настоящего методического пособия – помочь студентам и преподавателям в организации занятий при изучении курсов математики.

Для освоения данным дисциплинам в вузе читаются лекции и проводятся практические занятия. В то же время основной формой обучения в условиях заочной формы обучения является самостоятельная работа с учебником и учебными пособиями.

Совершенствование деятельности в любой области экономики (управлении, финансово-кредитной сфере, маркетинге, учете, аудите) в значительной мере связано с применением в экономической науке и практике математических методов исследования.

Студенты бакалавриата направления 38.03.01 Экономика в рамках базового курса математики изучают три самостоятельные математические дисциплины: «Математический анализ» (I курс), «Линейная алгебра» (I курс), «Теория вероятностей и математическая статистика» (II курс), а также прикладные математические дисциплины «Методы оптимальных решений» (II курс).

Задачи изучения дисциплины «Математический анализ», «Линейная алгебра» и «Методы оптимальных решений» вытекают из требований к результатам освоения и условиям реализации основной образовательной программы и компетенций, установленных Федеральным государственным образовательным стандартом высшего образования по направлениям 38.03.01 Экономика.

**Основная цель для студента: овладеть методами решения, планирования, моделирования, прогнозирования, анализа, синтеза в математике, для использования в финансовой и экономической деятельности.**

### Экономическое приложение разделов курса

№	Содержание курса математики	
	Традиционные разделы (темы) курса математики	Экономические приложения
1	2	3
	<b><i>Элементы линейной алгебры</i></b>	
1.1	Матрицы. Виды матриц, действия над матрицами. Определители и их свойства. Обратная матрица. Решение систем линейных уравнений (матричный метод, метод Крамера, метод Гаусса). Ранг матрицы. Теорема Кронекера-Капелли (критерий совместности системы). Системы линейных однородных уравнений. Фундаментальная система решений	Технологические матрицы (матрицы норм расхода). Общая постановка задачи оптимального планирования. Модель Леонтьева многоотраслевой экономики. Продуктивные матрицы. Модель международной торговли. Структурная матрица торговли
1.2	Векторы. Линейные операции над векторами, декартова система координат. Скалярное, векторное и смешанное произведения векторов	Вектор цен. Экономический смысл скалярного произведения векторов. Вектор потребления. Вектор интенсивностей
1.3	Векторное (линейное) пространство. Подпространства. Линейная зависимость векторов. Евклидово пространство. Линейные преобразования. Собственные числа и собственные векторы линейного преобразования. Квадратичные формы	Вектор «затрат — выпуска», производственное пространство. Линейная модель международной торговли
2	<b><i>Элементы аналитической геометрии</i></b>	
2.1	Линии на плоскости. Прямая на плоскости. Кривые второго порядка. Полярная система координат. Уравнение плоскости в пространстве. Уравнение	Кривые спроса и предложения. Кривые производственных возможностей. Кривые безразличия, линия бюджетного ограничения. Кривые «доход - потребление»

	прямой в пространстве. Поверхности второго порядка	
3	<b><i>Начала математического анализа</i></b>	
3.1	Основные сведения о множествах	Бюджетное множество
3.2	Понятие функции одной переменной, основные свойства. Способы задания функции. Графики, их преобразования. Элементарные функции	Функции и графики в экономическом моделировании. Функции спроса и предложения. Точка равновесия. Зависимости спроса от дохода (функции Торнквиста). Функция потребления. Графики зависимости издержек и дохода от объема производства. Функция полезности, однофакторная производственная функция, функция налоговой ставки.
3.3	Понятие последовательности. Предел последовательности. Бесконечно большие, бесконечно малые величины.	Нарощенные суммы. Паутинная модель рынка.
3.4	Предел функции. Замечательные пределы. Эквивалентность. Непрерывность функции. Классификация точек разрыва.	Экономическая интерпретация непрерывности
4	<b><i>Дифференциальные исчисления функция одной переменной</i></b>	
4.1	Производная функции одной переменной, ее геометрический смысл. Правила и техника дифференцирования	Эластичность функции. Маржинальные величины. Предельная производительность труда. Предельная себестоимость
4.2	Экстремум функции одной переменной. Дифференциал функции одной переменной, его геометрический смысл. Применения дифференциала к приближенным вычислениям. Производные и дифференциалы высших порядков. Исследование функции по первой производной. Правило Лопиталя. Формула Тейлора.	Максимизация прибыли. Оптимизация налогообложения предприятий. Формула Уилсона. Критерий оптимальности объема партии товара (работа идеального склада). Теория одноресурсной фирмы (закон убывающей доходности, оптимальные решения)
5	<b><i>Интегральные исчисления функция одной переменной</i></b>	
5.1	Неопределенный интеграл: определение, свойства, методы интегрирования.	
5.2	Определенный интеграл: вычисление определенных интегралов по формуле Ньютона-Лейбница, заменой переменных и по частям.	Экономические приложения интеграла: вычисление затрат при хранении запасов сырья на складе; потребительская рента; определение объема выпускаемой продукции, периода окупаемости инвестиций; вычисление средних значений. Коэффициент Джини.
5.3	Несобственные интегралы первого и второго рода	Потоки и стоки.
6	<b><i>Дифференциальные исчисления функции нескольких переменных</i></b>	
6.1	Область определения и непрерывность функций нескольких переменных. Графики функций $z=f(x,y)$ .	Многомерная функция полезности, функция издержек, многофакторная производственная функция (функция Кобба-Дугласа). Уравнение обмена Фишера.
6.2	Частные производные функций нескольких переменных. Техника дифференцирования частных производных. Касательная плоскость и нормаль к поверхности. Дифференцирование сложной и неявно	Экономический смысл частных производных (предельная производительность труда; предельная фондоотдача; эластичность выпуска по труду; эластичность выпуска по фондам). 1-й закон Гессена; с увеличением потребления

	заданной функции. Дифференциал первого порядка, его применение	товара его полезность уменьшается.
6.3	Теория поля. Скалярное поле. Производная по направлению. Градиент	
6.4	Производные и дифференциалы высших порядков. Экстремум функции нескольких переменных.	Задачи оптимизации. Золотое правило экономики для многоресурсной фирмы. Задача ценовой дискриминации. Многокритериальные задачи оптимизации в экономике; оптимальность по Парето; ящик Эджворта
7	<i><b>Дифференциальные уравнения</b></i>	
7.1	Задачи на составление дифференциальных уравнений	Модель естественного роста продукции. Логистический рост, мультипликатор инфляции. Движение фондов. Демографическая задача.
7.2	Дифференциальные уравнения первого порядка. Задача Коши.	Задача о долге (кредитование). Рост населения и истощение ресурсов. Рост денежного вклада в банке. Модель естественного роста выпуска. Динамическая модель Кейса. Модели Эванса и Солоу. Уравнение Самуэльсона – Солоу, моделирующее связь между изменением цены и неудовлетворенным спросом.
7.3	Дифференциальные уравнения высших порядков. Системы дифференциальных уравнений.	Рост выпуска товаров в условиях конкуренции.
7.4	Линейные разностные уравнения.	Модель Самуэльсона – Хикса. Паутинная модель рынка. Задача об определении текущей стоимости купонной облигации.

В процессе изучения дисциплины перед студентами ставятся следующие задачи:

- освоение приемов исследования и решения математически формализованных задач;
- освоение приемов использования классического математического аппарата для решения прикладных задач ;
- выработка умения моделировать реальные объекты и процессы;
- развитие логического и алгоритмического мышление;
- повышение уровня математической культуры;
- развитие навыков самостоятельной работы.

## 1 Методические рекомендации по освоению дисциплины

В практике профессиональной подготовки используется лекционно-семинарская система, которая рассчитана на то, что студенты высшего образования уже имеют навыки учебной деятельности и способны к самостоятельному поиску и усвоению знаний. Основными формами организации обучения являются лекции, семинары, практические и лабораторные занятия, консультации, коллоквиумы, зачеты, экзамены.

Лекционно-семинарская система, с одной стороны, повышает эффективность обучения студентов, а с другой – обеспечивает преемственность между школой и системой высшего образования, между системой среднего профессионального и высшего образования.

### 1.1 Методические рекомендации к лекционным занятиям

**Лекция.** Лекция – это развернутое, продолжительное и системное изложение сущности какой-либо учебной, научной проблемы. Основа лекции – теоретическое обобщение, в котором конкретный фактический материал служит иллюстрацией или необходимым отправным моментом, это форма учебного занятия, цель которого состоит в рассмотрении теоретических вопросов излагаемой дисциплины в логически выдержанной форме.

В учебном процессе в зависимости от дидактических задач и логики учебного материала мы будем использовать вводные, текущие и обзорные лекции; в зависимости от деятельности студентов - информационные, объяснительные, лекции - беседы.

Лекционная форма целесообразна в процессе:

- изучения нового материала, мало связанного с ранее изученным;
- рассмотрения сложного для самостоятельного изучения материала;
- поддачи информации крупными блоками;
- выполнения определенного вида заданий по одной или нескольким темам либо разделам;
- применения изученного материала при решении практических задач.

**Вводная лекция** открывает лекционный курс по предмету. На ней четко и ярко показываются теоретическое и прикладное значение предмета, его связь с другими предметами, роль в понимании мира, в подготовке бакалавра. Лекция данного типа призвана способствовать убедительной мотивации самостоятельной работы студентов.

**Установочная лекция** (применяется при заочной форме обучения) - знакомит студентов со структурой учебного материала, основными положениями курса, а также содержит программный материал, самостоятельное изучение которого представляет для студентов трудность (наиболее сложные, узловые вопросы). Установочная лекция должна детально знакомить с организацией самостоятельной работы, с особенностями выполнения контрольных заданий.

**Текущая лекция** служит для систематического изложения учебного материала предмета. Каждая такая лекция посвящена определенной теме и является в этом отношении законченной, но составляет с другими (предшествующей, последующей) определенную целостную систему. В ходе лекций большое значение уделяется вопросам подготовки к работе над лекционным материалом (его осмысление, ведение конспекта, работа с материалом учебника). На лекционных занятиях преподаватель не только сообщает или обобщает теоретические знания, но и учит студентов приемам конспектирования.

**Заключительная лекция** завершает изучение учебного материала. На ней обобщается изученное ранее на более высокой теоретической основе, рассматриваются перспективы развития математической науки.

*Обзорная лекция* содержит краткую и в значительной мере обобщенную информацию об определенных однородных (близких по содержанию) программных вопросах. Эти лекции используются на завершающих этапах обучения (например, перед экзаменами или при дистанционной и заочной формах обучения).

Приступая к изучению дисциплины, студенту необходимо ознакомиться с тематическим планом занятий, списком рекомендованной учебной и научной литературы. Следует уяснить последовательность выполнения индивидуальных учебных заданий, темы и сроки проведения семинаров, написания учебных и творческих работ, завести в свою рабочую тетрадь.

При изучении дисциплины студенты выполняют следующие задания: изучают рекомендованную учебную и научную литературу; пишут контрольные работы, готовят презентации и сообщения к практическим занятиям; выполняют самостоятельные творческие работы, участвуют в выполнении практических заданий. Уровень и глубина усвоения дисциплины зависят от активной и систематической работы в данных направлениях.

## **Общие и частные методические рекомендации по видам работ**

### **Работа по материалам лекций**

#### **Вид работы Работа с книгой**

Важно помнить, что рациональные навыки работы с книгой - это всегда большая экономия времени и сил. Поэтому при работе с книгой необходимо подобрать литературу, используя алфавитный и систематический каталоги, научиться правильно ее читать, вести записи.

Правильный подбор учебников рекомендуется преподавателем, читающим лекционный курс. Необходимая литература может быть также указана в методических разработках по данному курсу.

Изучая материал по учебнику, следует переходить к следующему вопросу только после правильного уяснения предыдущего, расписывая на бумаге все выкладки и вычисления (в том числе те, которые в учебнике опущены или на лекции даны для самостоятельного вывода).

Особое внимание следует обратить на определение основных понятий курса. Студент должен подробно разбирать примеры, которые поясняют такие определения, и уметь строить аналогичные примеры самостоятельно. Нужно добиваться точного представления о том, что изучаешь. Полезно составлять опорные конспекты. При изучении материала по учебнику полезно в тетради (на специально отведенных полях) дополнять конспект лекций. Там же следует отмечать вопросы, выделенные студентом для консультации с преподавателем.

Выводы, полученные в результате изучения, рекомендуется в конспекте выделять, чтобы они при прочитывании записей лучше запоминались.

Различают два вида чтения; первичное и вторичное. *Первичное* - это внимательное, неторопливое чтение, при котором можно остановиться на трудных местах. После него не должно остаться ни одного непонятого слова. Содержание не всегда может быть понятно после первичного чтения.

Задача *вторичного* чтения полное усвоение смысла целого (по счету это чтение может быть и не вторым, а третьим или четвертым).

### **Правила самостоятельной работы с литературой**

Самостоятельное теоретическое исследование проблем, обозначенных преподавателем на лекциях – это важнейшее условие формирования у студента научного способа познания. Основные советы здесь можно свести к следующим:

– Составить перечень книг, с которыми Вам следует познакомиться; «не старайтесь запомнить все, что вам в ближайшее время не понадобится, – советует студенту и молодому ученому Г. Селье, – запомните только, где это можно отыскать»

– Перечень должен быть систематизированным (что необходимо для семинаров, что для экзаменов, что пригодится для написания исследовательских работ, а что Вас интересует за рамками официальной учебной деятельности, то есть что может расширить Вашу общую культуру...).

– Обязательно выписывать все выходные данные по каждой книге (при написании исследовательских работ это позволит очень сэкономить время).

– Разобраться для себя, какие книги (или какие главы книг) следует прочитать более внимательно, а какие – просто просмотреть.

– При составлении перечней литературы следует посоветоваться с преподавателями и научными руководителями (или даже с более подготовленными и эрудированными сокурсниками), которые помогут Вам лучше сориентироваться, на что стоит обратить большее внимание, а на что вообще не стоит тратить время.

– Естественно, все прочитанные книги, учебники и статьи следует конспектировать, но это не означает, что надо конспектировать «все подряд»: можно выписывать кратко основные идеи автора и иногда приводить наиболее яркие и показательные цитаты (с указанием страниц).

– Если Вы раньше мало работали с научной литературой, то следует выработать в себе способность «воспринимать» сложные тексты; для этого лучший прием – научиться «читать медленно», когда Вам понятно каждое прочитанное слово (а если слово незнакомое, то либо с помощью словаря, либо с помощью преподавателя обязательно его узнать);

– Есть еще один эффективный способ оптимизировать знакомство с научной литературой – следует увлечься какой-то идеей и все книги просматривать с точки зрения данной идеи.

Чтение научного текста является частью познавательной деятельности. Ее цель – извлечение из текста необходимой информации. От того на сколько осознанна читающим собственная внутренняя установка при обращении к печатному слову (найти нужные сведения, усвоить информацию полностью или частично, критически проанализировать материал и т.п.) во многом зависит эффективность осуществляемого действия.

### **Вид работы: Подготовка конспекта**

Студент обязан вести конспект.

**Конспект** – краткое изложение или краткая запись чего-либо.

Хорошо составленный конспект помогает усвоить материал. В конспекте кратко излагается основная сущность учебного материала, приводятся необходимые обоснования, табличные данные, схемы, эскизы, расчеты и т.п. Конспект целесообразно составлять целиком на тему. При этом имеется возможность всегда дополнять составленный конспект из новых источников. Рекомендуется конспектировать определения, формулировки теорем, схемы их доказательств, формулы и решения задач. Формулы следует выписывать в специальные таблицы для каждой части (раздела) курса.

Постоянное пользование конспектом, в частности таблицами формул, способствует их запоминанию и дает возможность решать примеры и задачи, не обращаясь к учебным пособиям.

Таким образом, конспект становится сборником необходимых материалов, куда студент вносит всё новое, что он изучил, узнал. Такие конспекты представляют, большую



ценность при подготовке к занятиям и зачету, экзамену.

**Тезисы** – это способ сокращения текста; положения, кратко излагающие какую-нибудь идею, или краткая формулировка принципиальных положений произведения, не включающая фактический материал.

**Аннотация** – краткое изложение содержания статьи, книги, рукописи и др. По структуре аннотация включает информационную и рекомендательную части. Развернутая аннотация должна включать общую характеристику книги или статьи с указанием основной идеи материала, его назначения, научной ценности, основных проблем, стиля изложения. В конце аннотации дается общая оценка.

**Отзыв** – выражение собственного отношения к прослушанному, прочитанному, просмотренному; эмоциональная оценка личного восприятия статьи, впечатления с обоснованием.

## 1.2 Методические рекомендации к практическим занятиям

Практические занятия относятся к основным видам учебных занятий. Они составляют важную часть профессиональной подготовки. Состав и содержание предлагаемых практических занятий направлено на реализацию требований ФГОС ВО по направлению подготовки 38.03.01 Экономика

В результате выполнения практических работ закрепляются полученные теоретические знания. Каждое практическое занятие включает разделы: цель занятия; знания и умения; теоретическую и практическую части; контрольные вопросы к занятию.

**Занятие-практикум (лабораторная работа, практическое занятие).** Основная его задача – приобретение умений и навыков практического использования изученного материала. Основной формой их проведения являются работы, на которых студенты самостоятельно упражняются в практическом применении усвоенных теоретических знаний и умений. Главное их отличие состоит в том, что на лабораторных работах доминирующей составляющей является процесс формирования экспериментальных умений, а на практических работах – конструктивных.

После усвоения лекционного материала он будет закрепляться на практических занятиях как в результате обсуждения и анализа лекционного материала, так и с помощью решения проблемных ситуаций, задач. При этих условиях студент не только хорошо усвоит материал, но и научится применять его на практике, а также получит дополнительный стимул (и это очень важно) для активной проработки лекции.

Решение задач надо начинать с наиболее простых, элементарных, а затем переходить к более сложным, обосновывать каждый этап решения, исходя из теоретических положений курса. Если студент видит несколько путей решения проблемы (задачи), то нужно сравнить их и выбрать самый рациональный. Полезно до начала решения составить краткий план решения проблемы (задачи). Решение следует доводить до окончательного результата, промежуточные преобразования, выкладки и рассуждения выполнять последовательно и аккуратно.

Следует отметить, что учебный эксперимент как метод самостоятельного приобретения знаний студентами, имеет сходство с научным экспериментом.

Основным способом организации деятельности студентов на практикумах является групповая форма работы. При этом каждая группа, из 3–5 человек выполняет, как правило, отличающуюся от других практическую или лабораторную работу.

Средством управления учебной деятельностью студентов является инструкция (методические указания), которая по определенным правилам последовательно устанавливает действия студента.

Иногда недостаточность усвоения того или иного вопроса выясняется только при изучении дальнейшего материала. В этом случае надо вернуться назад и повторить плохо

усвоенный материал. Важный критерий усвоения теоретического материала - умение решать задачи или пройти тестирование по пройденному материалу.

### **Вид работы: Решение производственной ситуации**

Этап решения ситуации строится в соответствии с примерным планом:

- практический анализ ситуации (действующие лица, обстоятельства), определение проблемы с примерами из задания, доказательствами из теоретического материала, обязательное использование профессиональных терминов. Если есть необходимость проанализировать ошибочные или правильные действия участников (обоснованная личная позиция приветствуется);
- определение проблемных узлов (возможные причины и прогнозируемые последствия развития ситуации);
- обоснованные теоретически и, желательно, подкрепленные практическими примерами предлагаемые варианты действий;
- прогноз вероятностного развития ситуации, обоснованный и доказательный;
- определение гипотезы,
- формулировка решения ситуации;
- формулировка итоговых выводов.

**Семинар** (от латинского *seminarium* «рассадник»; переноси «школа») – составная часть учебного процесса, групповая форма занятий при активном участии студентов, дополняющая лекции. Семинары способствуют углубленному изучению наиболее сложных проблем науки и служат формой подведения итогов самостоятельной работы студентов. На семинарах студенты учатся грамотно излагать проблемы, свободно высказывать свои мысли и суждения, рассматривают ситуации, способствующие развитию профессиональной компетентности. Семинары способствуют развитию познавательных и исследовательских умений, повышению культуры общения, т. е. развитию коммуникативных навыков.

Семинар организовывается:

- при изучении нового материала, когда он доступен для самостоятельного изучения;
- после проведения вводных, установочных и текущих лекций;
- при обобщении и систематизации знаний студентов по изучаемой теме;
- при проведении занятий, посвященных различным методам решения задач, выполнения заданий и упражнений.

Семинар проводится со всей группой. Преподаватель заблаговременно определяет тему, цель и задачи семинара, планирует его проведение, формулирует основные и дополнительные вопросы по теме, распределяет задания между студентами с учетом их индивидуальных особенностей и возможностей, подбирает литературу, проводит индивидуальные консультации, проверяет конспекты. Преподаватель дополняет сообщения студентов, отвечает на возникшие вопросы и дает оценку выступлениям. Подводя итог, отмечает положительное.

Подготовка к семинару зависит от формы, места проведения семинара, конкретных заданий и поручений. Это может быть написание доклада, реферата (с последующим их обсуждением), подготовка презентаций, коллоквиум.

### **Вид работы: Подготовка к семинару**

#### **Этапы подготовки к семинару:**

- проанализируйте тему семинара, подумайте о цели и основных проблемах,

вынесенных на обсуждение;

- внимательно прочитайте материал, данный преподавателем по этой теме на лекции;
- изучите рекомендованную литературу, делая при этом конспекты прочитанного или тезисы, которые понадобятся при обсуждении на семинаре;
- постарайтесь сформулировать свое мнение по каждому вопросу и аргументировано его обосновать;
- запишите возникшие во время самостоятельной работы с учебниками и научной литературой вопросы, чтобы затем на семинаре получить на них ответы.

### **1.3 Организация самостоятельной работы**

Самостоятельная работа по дисциплине – это педагогически управляемый процесс самостоятельной деятельности студентов, обеспечивающий реализацию целей и задач по овладению необходимым объемом знаний, умений и навыков, опыта творческой работы и развитию профессиональных интеллектуально-волевых, нравственных качеств будущего бакалавра. Выделяют два вида самостоятельной работы:

- аудиторная работа, выполняется на занятиях под руководством преподавателя и по его заданию;
- внеаудиторная, выполняется студентом по заданию преподавателя, но без его непосредственного участия.

Основные виды аудиторной самостоятельной работы студентов при изучении дисциплины:

- формулировка вопросов студентам, преподавателю;
- выполнение письменных заданий, тестирование;
- выступление с сообщением по новому материалу;
- конспектирование, работа с книгой;
- выполнение самостоятельных работ.

Основные виды внеаудиторной самостоятельной работы студентов при изучении дисциплины:

- работа с учебником;
- конспектирование отдельного вопроса пройденной темы;
- работа со справочной литературой;
- подготовка рефератов и презентаций по темам;
- составление кроссвордов;
- использование Интернета,
- выполнение контрольных работ.

Повышение роли самостоятельной работы студентов при проведении различных видов учебных занятий предполагает оптимизацию методов обучения, внедрение в учебный процесс новых технологий обучения, повышающих производительность труда преподавателя, активное использование информационных технологий, позволяющих студенту в удобное для него время осваивать учебный материал; совершенствование методики проведения практик и научно - исследовательской работы студентов, поскольку именно эти виды учебной работы студентов в первую очередь готовят их к самостоятельному выполнению профессиональных задач; использование знаний, умений и навыков в системе курсового и дипломного проектирования по дисциплинам профессионального направления, которая должна повышать роль студента в подборе материала, поиске путей решения задач.

Для успешной организации самостоятельной работы все активнее применяются разнообразные образовательные ресурсы в сети Интернет: системы тестирования по различным областям, виртуальные лекции, лаборатории. Студент может получать все задания и методические указания через электронную почту, что дает ему возможность

привести в соответствие личные возможности с необходимыми для выполнения работ трудозатратами. Студент имеет возможность выполнять работу дома или в аудитории.

Основной формой контроля самостоятельной работы студента являются практические задания, защита презентаций и рефератов на занятиях. Массовой формой контроля являются зачеты, экзамены.

Большое образовательное значение в самостоятельном учебном труде студента имеет самоконтроль. Самоконтроль возбуждает и поддерживает внимание и интерес, повышает активность памяти и мышления, позволяет студенту своевременно обнаружить и устранить допущенные ошибки и недостатки, объективно определить уровень своих знаний, практических умений.

Самое доступное и простое средство самоконтроля с применением информационно-коммуникационных технологий - это ряд тестов, которые позволяют определить свой уровень владения предметным материалом, выявить свои ошибки и получить рекомендации по самосовершенствованию.

Критериями оценки результатов внеаудиторной самостоятельной работы студента являются:

- уровень освоения учебного материала;
- умение использовать теоретические знания и умения при выполнении практических задач;
- уровень сформированности общих и профессиональных компетенций.

### **Памятка педагогу по организации самостоятельной работы студентов**

1. Самостоятельную работу необходимо организовывать во всех звеньях учебного процесса, в том числе и в процессе усвоения нового материала.

2. Студентов необходимо ставить в активную позицию, делать их непосредственными участниками процесса познания.

3. Организация самостоятельной работы должна способствовать развитию мотивации учения.

4. Самостоятельная работа должна носить целенаправленный характер, быть четко сформулированной.

5. Содержание самостоятельной работы должно обеспечивать полный и глубокий комплекс заданий.

6. В ходе самостоятельной работы необходимо обеспечить сочетание репродуктивной и продуктивной учебной деятельности.

7. При организации самостоятельной работы необходимо предусмотреть адекватную обратную связь, т.е. правильно организовать систему контроля.

### **Рекомендации для студентов**

Методика изучения материала (на что необходимо обращать внимание при изучении материала):

1. Первичное чтение одного параграфа темы;
2. Повторное чтение этого же параграфа темы с фиксированием наиболее значительных по содержанию частей;
3. Проработка материала данного параграфа (знать термины и определения);
4. После такого прохождения всех параграфов одной темы, повторное (третий раз) чтение параграфов этой темы с фиксированием наиболее значительных по содержанию частей;
5. Прохождение тренировочных упражнений по теме;
6. Прохождение тестовых упражнений по теме;

7. Возврат к параграфам данной темы для разбора тех моментов, которые были определены как сложные при прохождении тренировочных и тестовых упражнений по теме;

8. После прохождения всех тем раздела, закрепление пройденного материала на основе решения задач.

#### **Критерии оценки ответов:**

Оценка «5» (отлично) выставляется в случае полного рассмотрения вопроса, аргументированного выражения своей позиции, отсутствия ошибок, грамотного текста, точность формулировок и т.д.;

Оценка «4» (хорошо) выставляется в случае полного выполнения всего объема работ при наличии несущественных ошибок, не повлиявших на общий результат работы;

Оценка «3» (удовлетворительно) выставляется в случае недостаточно полного рассмотрения проблемы, при наличии ошибок, которые не оказали существенного влияния на окончательный результат;

Оценка «2» (неудовлетворительно) выставляется в случае, если тема не раскрыта, работа выполнена крайне небрежно и т.д.

#### **Вид работы: Самостоятельная работа студентов при решении задач**

В процессе изучения математики наряду с некоторыми теоретическими сведениями студенты овладевают и закрепляют способы решения задач. Преподаватель раскрывает перед студентами технологию решения задачи, показывает, чем мотивировано применение некоторого метода решения, чем обусловлен выбор того или иного пути.

Работа над задачей тоже может быть полностью самостоятельной работой студентов. Она преследует несколько целей:

- продолжить формирование умений самостоятельно изучать текст, который в данном случае представляет собой задачу;
- обучить рассуждениям;
- обучить оформлению решения задач. К тому же студенты будут знать, что у них имеется образец рассуждений и оформления задачи, к которому они могут обратиться при решении другой задачи или при проверке правильности своего решения.

Непременным условием усвоения новых теоретических сведений и овладения новыми приемами решения задач является выполнение студентами тренировочных упражнений. А подготовка студентов к творческому труду и самостоятельному пополнению знаний имеет самостоятельное выполнение заданий. В этом случае студент без помощи должен наметить пути решения, правильно выполнить все построения, преобразования, вычисления и т. п. В таком случае мысль студента работает наиболее интенсивно. Он приобретает практический навык работы в ситуации, с которой ему неоднократно придется сталкиваться в последующей трудовой деятельности.

#### **Форма контроля и критерии оценки**

«Отлично» - задачи решены верно, все действия записаны точно, без помарок.

«Хорошо» - задачи решены верно, в действиях допущены неточности.

«Удовлетворительно» - задачи решены с ошибками и помарками.

«Неудовлетворительно» - задачи решены с ошибками, ответ не получен.

#### **Вид работы: Написать реферат на определенную тему**

Реферат как форма самостоятельной учебной деятельности студентов в вузе — это рассуждение на определенную тему на основе обзора литературы (нескольких источников

информации), доказательство или опровержение какой-то главной мысли (тезиса), в котором информация нескольких источников используется для аргументации, иллюстрации и т. д. (объем — 10 – 15 страниц).

Цель реферата – приобретение студентом необходимой профессиональной подготовки, развитие умения и навыков самостоятельного научного поиска: изучения литературы по выбранной теме, анализа различных источников и точек зрения, обобщения материала, выделения главного, формулирования выводов. С помощью рефератов студент глубже постигает наиболее сложные проблемы курса, учится лаконично излагать свои мысли, докладывать результаты своего труда и последующего письменного оформления текста.

Изложение материала носит проблемно-тематический характер, показываются различные точки зрения, а также собственные взгляды на проблему. Содержание реферата должно быть логичным.

Перед началом работы над рефератом следует наметить план и подобрать литературу. Прежде всего, следует пользоваться литературой, рекомендованной учебной программой, а затем расширить список источников, включая и использование специальных журналов, где имеется новейшая научная информация.

Задачи реферата: научить студента подбирать список источников, необходимый для осмысления изучаемого вопроса; составлять логически обоснованный план, соответствующий цели и задачам; грамотно и логично излагать основные идеи по заданной теме, делать выводы.

Структура реферата и требования к его элементам:

1. Титульный лист.
2. План.
3. Введение.
4. Основная часть.
5. Заключение.
6. Список используемых источников.
7. Приложение (по необходимости).

Реферат оформляется в соответствии с требованиями к оформлению научных работ.

Основная часть реферата содержит материал, который отобран студентом для рассмотрения проблемы. Материал должен быть обоснованно распределён по разделам. В подаче материала должна соблюдаться логика изложения. Основная часть реферата, помимо почерпнутого из разных источников содержания, также должна включать в себя собственное мнение студента и сформулированные самостоятельные выводы, опирающиеся на приведенные факты. Объём основной части реферата должен составлять 7 – 9 страниц текста.

В заключении формируются выводы, оценки, предложения.

Темы рефератов охватывают дискуссионные вопросы курса. Они призваны отражать передовые научные идеи, обобщать тенденции практической деятельности. Рекомендованная ниже тематика рефератов примерная.

1. Математика и экономика.
2. Использование математических методов в различных отраслях производства.
3. Золотое сечение.
4. Число  $\pi$ .
5. Экспонента и сложные проценты.
6. Жизнь и творчество Эйлера.
7. Звездчатые многогранники. Кристаллы-природные многогранники.
8. Модели многогранников.
9. Теории управления процессами принятия решений.
10. Математические иллюзии

Студент при желании может сам предложить ту или иную тему, предварительно

согласовав ее с научным руководителем.

Объем реферата - от 10 до 15 машинописных страниц. В списке литературы должно быть не менее 8–10 различных источников. Допускается включение таблиц, графиков, схем, как в основном тексте, так и в качестве приложений.

Этапы подготовки реферата:

1. выбор темы;
2. подбор учебной, научной и специальной литературы и иных источников изучение;
3. составление плана;
4. написание текста работы и ее оформление;
5. устное изложение реферата, возможно с презентацией.

Процесс написания реферат включает:

1. Прочитайте текст.
2. Составьте его развернутый план.
3. Подумайте, какие части можно сократить так, чтобы содержание было понято правильно и, главное, не исчезло.
4. Объедините близкие по смыслу части.
5. В каждой части выделите главное и второстепенное, которое может быть сокращено при конспектировании.
6. При записи старайтесь сложные предложения заменить простыми.

Тематическое и смысловое единство сообщения выражается в том, что все его компоненты связаны с темой первоисточника. Строго следите за точностью своих выражений и правильностью употребления терминов.

Содержание реферата студент докладывает на семинаре, научной конференции.

Рефераты могут быть представлены на теоретических занятиях в виде выступлений.

Предварительно подготовив тезисы доклада, студент в течение 5-7 минут должен кратко сообщить характеризующие задачи работы, ее актуальность, полученные результаты, вывод и предложения. Прежде чем отвечать на дополнительный вопрос, необходимо сначала правильно его понять. При ответе следует соблюдать принцип экономности мышления, а не высказывать без разбора все, что Вы можете сказать.

После доклада автор отвечает на вопросы, затем выступают оппоненты, которые заранее познакомились с текстом реферата, и отмечают его сильные и слабые стороны. На основе обсуждения, студенту выставляется соответствующая оценка.

Будьте доброжелательны и тактичны.

### **Критерии оценки реферата:**

«Отлично» выставляется если выполнено соответствие теме; глубина проработки материала; правильность и полнота использования источников; отражена точка зрения автора на рассматриваемую проблему, владение терминологией и культурой речи; оформление реферата. При защите реферата студент продемонстрировал отличное знание материала работы приводил соответствующие доводы, давал полные развернутые ответы на вопросы и аргументировал их.

«Хорошо» выставляется если выполнено соответствие теме, текст напечатан аккуратно, встречаются небольшие опечатки, полностью раскрыта тема реферата, отражена точка зрения автора на рассматриваемую проблему. При защите реферата студент продемонстрировал хорошее знание материала работы, приводил соответствующие доводы, но не смог дать полные развернутые ответы на вопросы и привести соответствующие аргументы.

«Удовлетворительно» - в случае, когда объем реферата составляет менее 8 страниц, текст напечатан неаккуратно, много опечаток, тема реферата раскрыта не полностью, не отражена точка зрения автора на рассматриваемую проблему, реферат написан с ошибками. При защите реферата студент продемонстрировал слабое знание материала работы, не смог привести соответствующие доводы и аргументировать на свои ответы.

«Неудовлетворительно» - в случае, когда объем реферата составляет менее 5 страниц, текст напечатан неаккуратно, много опечаток, тема реферата не раскрыта, не отражена точка зрения автора на рассматриваемую проблему, много ошибок в построении предложений. При защите реферата студент продемонстрировал слабое знание материала работы, не смог раскрыть тему не отвечал на вопросы.

### **Вид работы: Подготовка доклада**

**Доклад** – это устное выступление на заданную тему на 5-15 минут.

#### **Цели доклада:**

1. Научиться убедительно и кратко излагать свои мысли в устной форме. Эффективно продавать свой интеллектуальный продукт.

2. Донести информацию до слушателя, установить контакт с аудиторией и получить обратную связь.

Важно при подготовке доклада учитывать три его фазы: мотивацию, убеждение, побуждение.

**В первой фазе доклада** рекомендуется использовать:

- риторические вопросы;
- актуальные местные события;
- личные происшествия;
- истории, вызывающие шок;
- цитаты, пословицы;
- возбуждение воображения;
- оптический или акустический эффект;
- неожиданное для слушателей начало доклада.

Как правило, используется один из перечисленных приёмов. Главная цель фазы открытия (мотивации) – привлечь внимание слушателей к докладчику, поэтому длительность её минимальна.

**Ядром** хорошего доклада является информация. Она должна быть новой и понятной. Важно в процессе доклада не только сообщить информацию, но и убедить слушателей в правильности своей точки зрения. Для убеждения следует использовать:

сообщение о себе кто? обоснование необходимости доклада почему? доказательство, кто? когда? где? сколько? пример берём пример с... сравнение — это так же, как... проблемы что мешает?

**Третья фаза** доклада должна способствовать положительной реакции слушателей. В заключении могут быть использованы: обобщение; прогноз; цитата; пожелания; объявление о продолжении дискуссии; просьба о предложениях по улучшению; благодарность за внимание.

#### **Средства достижения воздействия**

Язык доклада. Короткие предложения. Выделение главных предложений. Выбор слов. Иностранные слова и сокращения. Образность языка. Голос Выразительность. Вариации громкости. Темп речи. Внешнее общение Зрительный контакт. Обратная связь. Доверительность. Жестикуляция.

### **Примерные темы докладов, рекомендуемых при изучении дисциплины «Математический анализ»**

Динамическая модель планирования.

Линейная модель обмена (модель международной торговли).

Экстремум в задачах линейного программирования.

Пример задачи линейного программирования.

### **Формы контроля и критерии оценок**

«Отлично» выставляется в случае, когда объем доклада составляет 5-6 страниц,



полностью раскрыта тема доклада, информация взята из нескольких источников, доклад написан грамотно, без ошибок. При защите доклада студент продемонстрировал отличное знание материала работы, приводил соответствующие доводы, давал полные развернутые ответы на вопросы и аргументировал их.

«Хорошо» выставляется в случае, когда объем доклада составляет 4-5 страниц, текст напечатан аккуратно, в соответствии с требованиями, встречаются небольшие опечатки, полностью раскрыта тема доклада, информация взята из нескольких источников, реферат написан грамотно. При защите доклада студент продемонстрировал хорошее знание материала работы, приводил соответствующие доводы, но не смог дать полные развернутые ответы на вопросы и привести соответствующие аргументы.

«Удовлетворительно» - в случае, когда объем доклада составляет менее 4 страниц, текст напечатан неаккуратно, много опечаток, тема доклада раскрыта не полностью, информация взята из одного источника, реферат написан с ошибками. При защите доклада студент продемонстрировал слабое знание материала работы, не смог привести соответствующие доводы и аргументировать свои ответы.

«Неудовлетворительно» - в случае, когда объем доклада составляет менее 4 страниц, текст напечатан неаккуратно, много опечаток, тема доклада не раскрыта, информация взята из 1 источника, много ошибок в построении предложений. При защите доклада студент продемонстрировал слабое знание материала работы, не смог раскрыть тему не отвечал на вопросы.

### **Вид работы: Подготовить презентацию на тему. Рекомендации по дизайну презентации**

Оформление и демонстрация каждого типа информации подчиняется определенным правилам. Так, например, для текстовой информации важен выбор шрифта, для графической – яркость и насыщенность цвета, для наилучшего их совместного восприятия необходимо оптимальное взаиморасположение на слайде.

Графическая информация рисунки, фотографии, диаграммы призваны дополнить текстовую информацию или передать ее в более наглядном виде;

желательно избегать в презентации рисунков, не несущих смысловой нагрузки, если они не являются частью стилевого оформления;

цвет графических изображений не должен резко контрастировать с общим стилевым оформлением слайда;

иллюстрации рекомендуется сопровождать пояснительным текстом;

если графическое изображение используется в качестве фона, то текст на этом фоне должен быть хорошо читаем.

Оформление слайдов	
Содержание и расположение информационных блоков на слайде	информационных блоков не должно быть слишком много (3-6); рекомендуемый размер одного информационного блока — не более 1/2 размера слайда; желательно присутствие на странице блоков с разнотипной информацией (текст, графики, диаграммы, таблицы, рисунки), дополняющей друг друга; логика предъявления информации на слайдах и в презентации должна соответствовать логике ее изложения.
Стиль	необходимо соблюдать единый стиль оформления; нужно избегать стилей, которые будут отвлекать от самой презентации; вспомогательная информация (управляющие кнопки) не должны

	преобладать над основной информацией (текст, рисунки)
Фон	для фона выбираются более холодные тона (синий или зеленый)
Использование цвета	на одном слайде рекомендуется использовать не более трех цветов: один для фона, один для заголовков, один для текста; для фона и текста используются контрастные цвета; особое внимание следует обратить на цвет гиперссылок (до и после использования); Черный цвет имеет негативный (мрачный) подтекст. Белый текст на черном фоне читается плохо (инверсия плохо читается).
Анимационные эффекты	Анимационные эффекты используются для привлечения внимания слушателей или для демонстрации динамики развития какого-либо процесса; не стоит злоупотреблять различными анимационными эффектами; анимационные эффекты не должны отвлекать внимание от содержания информации на слайде
Представление информации	
Содержание информации	в тексте ни в коем случае не должно содержаться орфографических ошибок; следует использовать короткие слова и предложения; времена глаголов должно быть везде одинаковым; следует использовать минимум предлогов, наречий, прилагательных; заголовки должны привлекать внимание аудитории
Расположение информации на странице	предпочтительно горизонтальное расположение информации; наиболее важная информация должна располагаться в центре экрана; если на слайде располагается картинка, надпись должна располагаться под ней; информационные блоки лучше располагать горизонтально, связанные по смыслу блоки — слева направо;
Шрифты	для заголовков не менее 32 и можно использовать декоративный шрифт; для остальной информации не менее 24; шрифты без засечек (Arial, Tahoma, Verdana), легче читать с большого расстояния; нельзя смешивать разные типы шрифтов в одной презентации; для выделения информации (ключевые слова) следует использовать жирный шрифт, курсив или подчеркивание того же типа; нельзя злоупотреблять прописными буквами (они читаются хуже, чем строчные).
Способы выделения информации	Следует использовать: рамки, границы, заливку разные цвета шрифтов, штриховку, стрелки рисунки, диаграммы, схемы для иллюстрации наиболее важных фактов
Объем информации	не стоит заполнять один слайд слишком большим объемом информации: люди могут одновременно запомнить не более трех фактов, выводов, определений; наибольшая эффективность достигается тогда, когда ключевые пункты отражаются по одному на каждом отдельном слайде.
Виды слайдов	Для обеспечения разнообразия следует использовать разные виды слайдов: с текстом, с таблицами, с диаграммами.
Звук	Звуковое сопровождение должно отражать суть или подчеркивать особенность темы слайда, презентации;

необходимо выбрать оптимальную громкость, чтобы звук был слышен всем слушателям, но не был оглушительным (должна не отвлекать внимание слушателей и не заглушать слова докладчика);
---

После создания презентации и ее оформления, необходимо отрепетировать ее показ и свое выступление, проверить, как будет выглядеть презентация в целом (на экране компьютера или проекционном экране), насколько скоро и адекватно она воспринимается из разных мест аудитории, при разном освещении, шумовом сопровождении, в обстановке, максимально приближенной к реальным условиям выступления.

### **Рекомендации к содержанию презентации**

**По содержанию.** На слайдах презентации не пишется весь тот текст, который произносит докладчик (во-первых, в этом случае сам факт произнесения доклада теряет смысл, так как аудитория обычно умеет читать, а во-вторых, длинный текст на слайде плохо воспринимается и только мешает слушанию и пониманию смысла).

Текст на слайде должен содержать только ключевые фразы (слова), которые докладчик развивает и комментирует устно.

Если презентация является основой устного доклада, то второй слайд должен содержать краткое перечисление всех основных вопросов, которые будут рассмотрены в докладе. Это дисциплинирует докладчика, концентрирует внимание слушателей, а, кроме того, во время создания такого слайда от автора требуется очень четко выделить и сформулировать ключевые проблемы доклада.

Если презентация имеет характер игры, викторины, или какой-либо другой, который требует активного участия аудитории, то на каждом слайде должен быть текст только одного шага, или эти «шаги» должны появляться на экране постепенно.

**По оформлению.** На первом слайде пишется не только название презентации, но и имена авторов, и дата создания.

Каждая прямая цитата, которую комментирует или даже приводит докладчик размещается на отдельном слайде, обязательно с полной подписью автора (имя и фамилия, инициалы и фамилия, но ни в коем случае – одна фамилия, исключение – псевдонимы). Допустимый вариант – две небольшие цитаты на одну тему на одном слайде, но не больше.

Все схемы и графики должны иметь названия, отражающие их содержание.

На каждом слайде выставляется колонтитул, включающий фамилию автора и/или краткое название презентации и год создания, номер слайда.

В конце презентации представляется список использованных источников, оформленный по правилам библиографического описания.

Правила хорошего тона требуют, чтобы последний слайд содержал выражение благодарности тем, кто прямо или косвенно помогал в работе над презентацией.

Кино и видеоматериалы оформляются титрами, в которых указываются: название фильма (репортажа), год и место выпуска, авторы идеи и сценария, руководитель проекта. Для правильной работы презентации все вложенные файлы (документы, видео, звук и пр.) размещайте в ту же папку, что и презентацию.

### **Форма контроля и критерии оценки**

Презентацию необходимо предоставить преподавателю для проверки в электронном виде.

«Отлично» выставляется в случае, если презентация выполнена аккуратно, примеры проиллюстрированы, полностью освещены все обозначенные вопросы.

«Хорошо» выставляется в случае, если работа содержит небольшие неточности

«Удовлетворительно» - в случае, если презентация выполнена неаккуратно, не полностью освещены заданные вопросы.

«Неудовлетворительно» - работа выполнена небрежно, не соблюдена структура, отсутствуют иллюстрации.

### **Примерные темы презентаций, рекомендуемых при изучении дисциплины «Математический анализ»**

«Физический смысл производной. Решение физических задач с применением производной»

«Исследование функций с помощью производной»

«Применение производной при решении задач на нахождение наибольшего и наименьшего значений»

«Использование интеграла для вычисления экономических задач»

«Использование интеграла для нахождения площадей, объемов тел вращения»

### **Вид работы: Составить кроссворд по теме**

1. Составьте словник, то есть список (перечень) слов, которые должны войти в кроссворд.

2. Для этого найдите в своем конспекте основные понятия и подчеркните их.

3. Выпишите эти понятия на отдельный лист, желательно в клетку.

4. Подчеркните в них одинаковые повторяющиеся буквы.

5. Расположите слова так, чтобы повторяющиеся буквы одновременно использовались в словах, написанных по вертикали и по горизонтали.

6. Пронумеруйте слова.

7. В соответствии с номерами выпишите определения понятий.

8. Начертите сетку кроссворда (количество клеток должно соответствовать количеству букв в слове).

9. Разметьте сетку кроссворда цифрами (номерами понятий).

10. Оформите кроссворд. Подпишите его.

11. Слова-задания – это существительные в единственном числе, именительном падеже.

12. Слов должно быть достаточно много (как правило, более 20), чтобы как можно полнее охватить всю тему (допустимо использование терминов из других тем и разделов, логически связанных с изучаемой темой).

Оформление кроссворда состоит из трех частей: заданий, кроссворда с решением, того же кроссворда без решения.

1. В общем случае определение должно состоять из одного предложения.

2. Определения должны быть по возможности краткими. Следует избегать перечислений, не злоупотреблять причастными и деепричастными оборотами, не перегружать текст прилагательными. Определение кроссворда - своего рода компромисс между краткостью и содержательностью.

3. Запрещается использование в одной сетке двух и более одинаковых слов, даже с различными определениями.

4. В вопросах следует избегать энциклопедических определений. В целом работа должна быть авторской, а не перепечаткой статей из словаря.

5. Нежелательно начинать формулировку вопроса с цифры, глагола, деепричастия.

6. Запрещается использование однокоренных слов в вопросах и ответах.

7. В работе должна быть изюминка, то есть нечто, отличающее ее от миллионов других.

8. Запрещается помещать слова без пересечений.

9. Не используются слова, которые пишутся через тире и имеющие уменьшительно-ласкательную окраску.

**Форма контроля и критерии оценки:** смысловое содержание; грамотность; выполнение правил составления кроссвордов; эстетичность.

### **Критерии оценки:**

Оценка «5» (отлично) выставляется в случае полного выполнения работы, отсутствия ошибок, грамотного текста, точность формулировок и т.д.;

Оценка «4» (хорошо) выставляется в случае полного выполнения всего объема работ при наличии ошибок, не повлиявших на общий результат работы;

Оценка «3» (удовлетворительно) выставляется в случае недостаточно полного выполнения всех разделов работы, при наличии ошибок, которые не оказали существенного влияния на окончательный результат, при очень ограниченном объеме используемых понятий и т.д.;

Оценка «2» (неудовлетворительно) выставляется в случае, если допущены принципиальные ошибки, работа выполнена крайне небрежно и т.д.

**Методические указания к контрольной работе** (см. методические указания к контрольной работе для заочной формы обучения)

### **Методические указания по выполнению исследовательской работы**

#### **Цель и порядок выполнения исследовательской работы**

Выполнение исследовательской работы должно способствовать более глубокому изучению соответствующей дисциплины, развитию у студентов навыков научно-исследовательской работы, самостоятельного мышления, умения письменного изложения логики исследования вопроса. Студент должен научиться в процессе пользоваться общенаучной специальной литературой, критически оценивать мысли авторов, грамотно логично излагать результаты, выводы, обобщения, точно выражать собственные идеи и предложения, применяя при этом творческий подход, нестандартность мышления, научную любознательность, умение литературным и грамотным языком изложить на бумаге свои мысли. Полная самостоятельность студенту дана в подборе научной литературы, публикаций в периодических изданиях, информации в сети Интернет.

Студент может предложить собственную тему исследования, с последующим согласованием его с руководителем работы. Исследовательская работа может отражать современные процессы и быть направлена на конкретный объект исследования, будь то банк, акционерное общество или малое предприятие, но обязательно с показом использования математических методов в будущей профессиональной деятельности. Данные исследования могут быть использованы в дипломном проектировании. Важна возможность получения статистических данных о функционировании выбранного объекта исследования.

Исследовательская работа является результатом самостоятельной разработки студентом конкретных актуальных современных проблем, представляющих практическую значимость. Для ее написания необходимо привлекать как теоретические, так и фактические материалы, которые следует тщательно анализировать для последующего формирования предложений и рекомендаций.

*Теоретический обзор проблемы.* В данном разделе дается краткий анализ различных теоретических концепций, связанных с темой исследования. При этом данный анализ должен носить объективный характер, то есть должна быть дана как позитивная характеристика той или иной концепции, так и ее недостатки, дается их оценка.

*Аналитический раздел.* В этом разделе излагаются практические аспекты рассматриваемой проблемы на конкретном примере или используются собственные опытные данные.

Аналитический раздел должен заканчиваться выводами, в которых обобщено исследование данной темы, отражены недостатки, выявлены проблемы, требующие

дальнейшего разрешения.

На протяжении всего исследования студент может получать от руководителя необходимые консультации по всем вопросам исследуемой темы.

Форма защиты исследовательской работы определяется научным руководителем. Это может быть собеседование или публичная защита в виде выступления на 5–10 минут и ответов на вопросы в группе из 3 и более человек.

### **Примерные групповые и/или индивидуальные творческие задания/проекты**

- 1 Математика и литература – два крыла одной культуры.
- 2 Математика в танцах и музыке.
- 3 Математика и здоровый образ жизни.
- 4 Математика в пифагорейской философской школе.
- 5 Эталоны математических пропорций в жизни.
- 6 Математика в архитектуре.
- 7 Математика в экономике.

### **Оценка работы производится по следующим критериям:**

- а) глубина и полнота раскрытия темы;
- б) логика изложения представленного материала;
- в) формирование собственных взглядов и разработка предложений по данным вопросам.

### **Вид работы: Консультация (урок-консультация).**

На занятиях данного вида проводится целенаправленная работа не только по ликвидации пробелов в знаниях студентов, обобщению и систематизации программного материала, но и по развитию их умений. В зависимости от содержания и назначения выделяют тематические и целевые консультации.

Тематические консультации проводятся по каждой теме, по наиболее значимым или сложным вопросам программного материала. Целевые консультации входят в систему подготовки, проведения и подведения итогов самостоятельных и контрольных работ, зачетов, экзаменов. Это работа над ошибками, анализ результатов контрольной работы или зачета и т. д.

На консультации сочетаются различные формы работы со студентами: общегрупповые, групповые и индивидуальные.

К консультации подготавливаются и преподаватели, и студенты.

Накануне консультации можно предложить студентам домашнее задание: подготовить по изучаемой теме вопросы и задания, с которыми они не могут справиться. Преподаватель обобщает некоторые вопросы, отбирает наиболее значимые, перенося оставшиеся на другие занятия.

## **1.4 Формы контроля**

### **Вид работы. Рубежный контроль (для очной форм обучения)**

Целью проведения рубежного контроля является промежуточная оценка результатов изучения тем и разделов дисциплины.

Критерием положительной оценки рубежного контроля является усвоение студентами 60% изученного материала.

Методы проведения рубежного контроля выбирает преподаватель, оповещая студентов предварительно.

### **Вид работы: Зачет (урок-зачет).**

Основная его цель – диагностика уровня усвоения знаний и умений каждым студентом на определенном этапе обучения. Положительная оценка за зачет ставится, если студент справился со всеми заданиями, соответствующими уровню обязательной подготовки по изученному предмету. Если хотя бы одно из таких заданий осталось невыполненным, то, как правило, положительная оценка не выставляется. В этом случае зачет подлежит передаче, причем студент может передать не весь зачет целиком, а только те виды заданий, с которыми он не справился.

Студентам предварительно сообщают примерный перечень заданий, выносимых на зачет, т.е. получаем открытый зачет.

### **Вид работы: Зачет (урок-зачет).**

Изучение дисциплин завершается экзаменом. Экзамен является заключительным этапом процесса формирования компетенции студента при изучении дисциплины или ее части и имеет целью проверку и оценку знаний студентов по теории и применению полученных знаний, умений и навыков при решении практических задач.

Экзамены проводятся по расписанию, сформированному учебным отделом и утвержденному проректором по учебной работе, в сроки, предусмотренные календарным графиком учебного процесса. Расписание экзаменов доводится до сведения студентов не менее чем за две недели до начала экзаменационной сессии.

Экзамены принимаются преподавателями, ведущими лекционные занятия.

Экзамены проводятся в устной форме, в форме тестирования. Экзамен проводится только при предъявлении студентом зачетной книжки и при условии выполнения всех контрольных мероприятий, предусмотренных учебным планом и рабочей программой по изучаемой дисциплине (сведения фиксируются допуском в ведомости). При устном экзамене, студентам на экзамене предоставляется право выбрать один из билетов. Время подготовки к ответу составляет 30 минут. По истечении установленного времени студент должен ответить на вопросы экзаменационного билета.

Подготовка к экзамену способствует закреплению, углублению и обобщению знаний, получаемых, в процессе обучения, а также применению их к решению практических задач. Готовясь к экзамену, студент ликвидирует имеющиеся пробелы в знаниях, углубляет, систематизирует и упорядочивает свои знания. На экзамене студент демонстрирует то, что он приобрел в процессе обучения по конкретной учебной дисциплине.

На консультации перед экзаменом студентов знакомят с основными требованиями, ответят на возникшие у них вопросы. Поэтому посещение консультаций обязательно.

Требования к организации подготовки к экзаменам: важно соблюдать режим дня; наличие хороших собственных конспектов лекций; хороший учебник или конспект литературы, прочитанной по указанию преподавателя в течение семестра. Здесь можно эффективно использовать листы опорных сигналов.

Вначале следует просмотреть весь материал по дисциплине, отметить для себя трудные вопросы. Обязательно в них разобраться. В заключение еще раз целесообразно повторить основные положения, используя при этом листы опорных сигналов.

Систематическая подготовка к занятиям в течение семестра позволит использовать время экзаменационной сессии для систематизации знаний.

### **Правила подготовки к зачетам и экзаменам:**

– обязательно расположить весь материал согласно экзаменационным вопросам (или вопросам, обсуждаемым на семинарах;

– переосмысление материала, и даже рассмотрение альтернативных идей;  
– готовить «шпаргалки» полезно, но пользоваться ими рискованно. Главный смысл подготовки «шпаргалок» – это систематизация и оптимизация знаний по данному предмету – это очень сложная и важная для студента работа, так как у него сформирована общая ориентировка в сложном материале.

– сначала студент должен продемонстрировать, что он «усвоил» все, что требуется по программе обучения, и лишь после этого он вправе высказать иные, желательно аргументированные точки зрения.

Результаты экзамена оцениваются по четырех балльной системе («отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно») и заносятся в экзаменационную ведомость и зачетную книжку. В зачетную книжку заносятся только положительные оценки. В случае неявки студента на экзамен в экзаменационной ведомости делается отметка «не явился».

### **1.5 Информационные технологии, используемые при осуществлении образовательного процесса по дисциплине**

Информационные технологии, используемые при осуществлении образовательного процесса по дисциплине, включают:

- технические средства: компьютерная техника и средства связи (персональные компьютеры, проектор, акустическая система);
- методы обучения с использованием информационных технологий (компьютерное тестирование, демонстрация мультимедийных материалов, компьютерный лабораторный практикум);
- перечень Интернет-сервисов и электронных ресурсов (поисковые системы, электронная почта, профессиональные, тематические чаты и форум, системы аудио и видео конференций, онлайн энциклопедии и справочники; электронные учебные и учебно-методические материалы);
- перечень программного обеспечения:

### **Программное обеспечение, профессиональные базы данных и информационные справочные системы современных информационных технологий**

- Операционная система Microsoft Windows 7 Academic
- Офисные приложения Microsoft Office 2010 Academic
- Яндекс-браузер. – Режим доступа: <https://yandex.ru/>
- Общероссийский математический портал. – Режим доступа: <http://www.mathnet.ru/>
- Большая российская энциклопедия. - Режим доступа: <https://bigenc.ru/>
- СПС «КонсультантПлюс». – Режим доступа: <http://www.consultant.ru/>
- Федеральная служба государственной статистики. – Режим доступа: [http://www.gks.ru/wps/wcm/connect/rosstat\\_main/rosstat/ru/](http://www.gks.ru/wps/wcm/connect/rosstat_main/rosstat/ru/)

Федеральный образовательный портал. – Режим доступа – <http://www.edu.ru> – «Российское образование» Федеральный портал. Каталог образовательных интернет ресурсов. Законодательство. Нормативные документы и стандарты // Учебно-методическая библиотека.

### **Образовательные технологии**

Образовательный процесс по дисциплине строится на основе интегральной модели



образовательного процесса по дисциплине: контекстное обучение, развивающее и проектное обучение, элементы технологии критического мышления.

Реализация данной модели предполагает использование следующих технологий стратегического уровня (задающих организационные формы взаимодействия субъектов образовательного процесса), осуществляемых с использованием определенных тактических процедур:

- лекционные (вводная лекция, лекция-презентация, проблемная лекция);
- практические (работа в малых группах, игровые методики, использование видеоматериалов);
- активизации творческой деятельности (дискуссия, мозговой штурм, ролевые игры, метод проектов и др.);
- самоуправления (самостоятельная работа студентов, создание глоссария по материалам дисциплины, подготовка презентаций по темам домашних заданий, метод экспертных оценок.

Рекомендуется использование информационных технологий при организации коммуникации со студентами для представления информации, выдачи рекомендаций и консультирования по оперативным вопросам (электронная почта), использование мультимедиа средств при проведении лекционных и семинарских занятий.

### **Вывод для студентов**

Каждый студент с самого начала занятий должен выработать для себя рациональную систему работы над курсом и постоянно практиковаться в решении задач. В противном случае усвоение и практическое использование учебного материала затруднены. Чрезвычайно важны систематические занятия. Работа урывками не приносит положительных результатов.

## **2 Цели, задачи и требования к результатам дисциплины «Математический анализ»**

**Целью освоения дисциплины «Математический анализ»** являются овладение теоретическими основами дисциплины, приобретение навыков использования универсального понятийного аппарата и широкого арсенала математических приемов при дальнейшем изучении профильных дисциплин.

### **Задачи:**

- повысить уровень фундаментальной математической подготовки, формируя у студента базовые понятия дисциплины «Математический анализ», необходимые для решения теоретических и практических задач математики и экономики;
- изучить общие методы и приемы дисциплины - освоение математического инструментария и подготовка к изучению дальнейших математических и экономических дисциплин;
- развивать навыки логического и алгоритмического математического мышления, и доказательных рассуждений, оперирования с абстрактными объектами.

## **Требования к результатам обучения по дисциплине**

Планируемые результаты обучения по дисциплине, характеризующие этапы формирования компетенций	Формируемые компетенции
<b>Знать:</b> – основные положения теоретического курса и инструменты математического анализа, четко представлять его органическую связь с приложениями экономики;	ОПК-3 способность выбирать инструментальные средства для обработки

Планируемые результаты обучения по дисциплине, характеризующие этапы формирования компетенций	Формируемые компетенции
<p><b>Уметь:</b>  – уметь решать типовые задачи математического анализа: предел последовательности и его свойства, предел и непрерывность функции, проводить дифференциальные исчисления функции одной переменной и функции нескольких переменных, использовать понятие производной при решении экономических задач, проводить интегральные расчеты; решать дифференциальные уравнения, исследовать числовые и степенные ряды.  – анализировать исходные данные, производить правильную постановку задачи, строить математические модели практических и прикладных задач;  – анализировать результаты математических расчетов и обосновывать полученные выводы;</p> <p><b>Владеть:</b>  – методами математического анализа необходимыми в профессиональной деятельности, навыками использования математического инструментария для решения практических задач в области экономики.</p>	<p>экономических данных в соответствии с поставленной задачей, проанализировать результаты расчетов и обосновывать полученные выводы</p>

## 2 Учебно-программный материал, который должен изучить студент по дисциплине «Математический анализ»

### Введение

Предмет и методы математики. Исторические сведения о развитии математики. Роль математики в современных науках.

### Введение в анализ

#### 1. Числовые последовательности

В этой теме осваиваются понятия: числовой последовательности, ее предела; свойств последовательностей, числа  $e$ , предел последовательности  $\{(1+1/n)^n\}$ .

*Изучив эту тему, студент должен*

*Знать:* Числовые последовательности и операции над ними. Определения ограниченной и неограниченной последовательности, бесконечно малой и бесконечно большой последовательности. Основные свойства бесконечно малых последовательностей. Понятие сходящейся последовательности. Основные свойства сходящейся последовательности. Последовательность  $\{(1+1/n)^n\}$ . Число  $e$ .

*Уметь:* Находить предел числовой последовательности. Определять тип числовой последовательности.

*Владеть:* методами использования данной темы при решении прикладных задач.

2. Понятие функции. Общее понятие функции. Способы задания. Основные элементарные функции и их графики. Элементарные функции. Предел функции. Арифметические операции над функциями, имеющими предел. Бесконечно малые и бесконечно большие функции и их сравнение.

*Изучив данную тему студент должен*

*Знать:* Способы задания функции, примеры. Графики основных элементарных функций. Критерий Коши для существования предела функции. Бесконечно малые и бесконечно большие функции и их сравнение.

*Уметь:* Преобразовывать графики функций (сдвиги, растяжения, симметрические преобразования относительно осей координат). Вычислять пределы функций.

*Владеть:* методами использования данной темы при решении прикладных задач.

### 3. Непрерывность функции

*Цель изучения данной темы:* освоение понятия непрерывности функции, классификация точек разрыва.

Данная тема включает в себя:

Непрерывность функции в точке и в области. Арифметические операции над непрерывными функциями. Понятие обратной функции, ее непрерывность; монотонные функции. Предельные значения функции  $\frac{\sin x}{x}$  при  $x \rightarrow 0$  и  $(1 + \frac{1}{x})^x$  при  $x \rightarrow \infty$ . Понятие сложной функции. Непрерывность элементарной функции в области ее определения. Точки разрыва функции и их классификация.

*Изучив данную тему, студент должен*

*Знать:* Определение непрерывности функции в точке и в области. Условия непрерывности функции. Условия существования и непрерывности обратной функции. Условия непрерывности сложной функции. Первый и второй замечательные пределы. Классификация точек разрыва функции.

*Уметь:* Определять непрерывность функции. Применять замечательные пределы для вычисления пределов функций. Доказывать непрерывность элементарных функций. Проводить классификацию точек разрыва.

*Владеть:* методами использования данной темы при решении прикладных задач.

## Дифференциальные исчисления

### 1. Производная и дифференциал функции.

*Цель изучения данной темы –* освоение понятия производной и дифференциала, их свойства, геометрического смысла.

Данная тема включает в себя:

Понятие производной. Геометрический и физический смысл производной. Правая и левая производные. Правила дифференцирования. Уравнения касательной и нормали к плоской кривой. Дифференциал функции. Геометрический смысл дифференциала. Производные и дифференциалы высших порядков.

*Изучив данную тему студент должен*

*Знать:* Определение и геометрический смысл производной. Таблица производных и правила дифференцирования. Методы нахождения касательных и нормалей к плоским кривым. Определение дифференциала и его геометрический смысл. Находить производную произвольной функции. Находить дифференциал от произвольной функции. Находить производные и дифференциалы высших порядков.

*Уметь:* вычислять производные функции одной переменной

*Владеть:* методами использования данной темы при решении прикладных задач.

### 2. Приложение производной.

*Цель изучения данной темы –* освоение методов приложения производной и построение графика.

Данная тема включает в себя:

Основные теоремы о непрерывных и дифференцируемых функциях. Правило Лопиталья о раскрытии неопределенностей вида  $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$ . Формула Тейлора для многочлена и для произвольной функции.

*Изучив данную тему, студент должен*

*Знать:* Теоремы: об обращении в нуль непрерывной функции при смене знака; о прохождении непрерывной функции через любое промежуточное значение; об ограниченности функции, непрерывной на сегменте, о достижении функцией, непрерывной на сегменте, своих точных верхней и нижней граней. Понятие локального экстремума, теорему Ферма (необходимое условие локального экстремума). Теоремы Ролля (о нуле производной); Лагранжа (о конечных приращениях); Коши; формула конечных приращений. Правило Лопиталья раскрытия неопределенностей. Формулу Тейлора.

*Уметь:* Применять правило Лопиталья для раскрытия неопределенностей вида  $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$ .

Применять формулу Тейлора для произвольной функции.

*Владеть:* методами использования данной темы при решении прикладных задач.

## **Интегральные исчисления**

### **1. Неопределенный интеграл.**

*Цель изучения данной темы* - знакомство с понятием неопределенного интервала, изучение методов интегрирования.

Данная тема включает в себя:

Понятие первообразной функции и неопределенного интеграла. Основные свойства неопределенного интеграла. Таблицу основных неопределенных интегралов. Методы нахождения неопределенных интегралов.

*Изучив данную тему, студент должен*

*Знать:* Определения первообразной функции и неопределенного интеграла. Основные свойства неопределенного интеграла. Таблицу основных неопределенных интегралов. Методы интегрирования заменой переменной и по частям. Интегрирование правильных рациональных дробей. Интегрирование тригонометрических функций. Интегрирование дробно-линейных иррациональностей.

*Уметь:* Использовать таблицу основных неопределенных интегралов. Владеть методами интегрирования заменой переменной и по частям. Раскладывать правильную рациональную дробь на простейшие. Применять тригонометрические подстановки.

*Владеть:* методами использования данной темы при решении прикладных задач.

### **2. Определенный интеграл.**

*Цель изучения этой темы:* понятие определенного интеграла (Римана) и его приложения.

Данная тема включает в себя:

Понятие определенного интеграла, интегральных сумм, их свойств. Верхний и нижний интегралы Дарбу. Теорему о необходимом и достаточном условии интегрируемости в смысле Римана функции на сегменте. Основные свойства определенного интеграла. Формула Ньютона-Лейбница вычисления определенного интеграла. Применение определенного интеграла для вычисления: площади плоской фигуры, объемов тел вращения. Несобственные интегралы с бесконечными пределами интегрирования. Несобственные интегралы от неограниченных функций.

*Изучив данную тему, студент должен*

*Знать:* Понятие определенного интеграла. Теоремы о необходимом и достаточном условии интегрируемости функции на сегменте. Основные свойства определенного

интеграла. Формула Ньютона-Лейбница вычисления определенного интеграла. Формулы замены переменной и интегрирования по частям для определенного интеграла. Несобственные интегралы 1-ого и 2-ого рода.

*Уметь:* вычислять определенный интеграл и использовать определенный интеграл при решении задач.

*Владеть:* методами использования данной темы при решении прикладных задач.

## **Функции нескольких переменных**

*Цель изучения данной темы* – совершенствование математического аппарата, формирование у студентов понятия функции нескольких переменных, отражающего многофакторные зависимости многих, в том числе экономических явлений.

Данная тема включает в себя:

Понятие функции нескольких переменных (фнп). Предел и непрерывность фнп. Частные производные фнп. Дифференциал и дифференцируемость фнп. Геометрический смысл дифференцируемости функции двух переменных, уравнение касательной плоскости. Производная по направлению, градиент. Экстремум фнп, частные производные высших порядков, необходимое и достаточное условие экстремума функции двух переменных. Наибольшее и наименьшее значения функции. Условный экстремум. Прикладные методы исследования фнп. Понятие двойного интеграла.

*Изучив данную тему, студент должен*

*Знать:* Понятие фнп. Определение предела, непрерывности, дифференцируемости. Необходимое и достаточное условие дифференцируемости. Геометрический смысл дифференцируемости функции двух переменных. Понятие частных производных, производных по направлению, градиента, линии уровня. Необходимое и достаточное условие экстремума. Понятие условного экстремума. Понятие двойного и повторного интеграла, геометрический смысл двойного интеграла.

*Уметь и владеть:* Привести примеры фнп, применяемых в экономике. Переносить свойства пределов и непрерывности функции в двумерном пространстве на многомерный случай. Находить частные производные фнп. Составлять уравнения касательной плоскости. Строить градиент и линии уровня функции двух переменных. Исследовать функцию двух переменных на экстремум. Наибольшее и наименьшее значения. Находить точки условного экстремума. Вычислять простейшие двойные интегралы на элементарных множествах. Применять методы множителей Лагранжа для отыскивания условного экстремума и наименьших квадратов для получения эмпирических формул.

## **Дифференциальные уравнения**

*Цель изучения данной темы* ознакомление с дифференциальными уравнениями и методами их решения.

Данная тема включает в себя:

Понятие о дифференциальном уравнении. Задачи приводящие к дифференциальным уравнениям. Дифференциальные уравнения первого порядка: с разделяющимися переменными, однородные, линейные, Бернулли. Дифференциальные уравнения допускающие понижение порядка. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка. Структура их общего решения. Линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами в левой части и специального вида правой частью. Нахождение их общего решения.

*Изучив данную тему, студент должен*

*Знать:* Теорему о существовании и единственности решения задачи Коши для дифференциального уравнения. Методы решения дифференциальных уравнений первого

порядка: с разделяющимися переменными, однородные, линейные, Бернулли. Методы решения дифференциальных уравнений допускающих понижение порядка.

*Уметь:* Определять порядок и тип уравнения. Решать дифференциальные уравнения первого порядка: с разделяющимися переменными, однородные, линейные, Бернулли, в полных дифференциалах. Находить общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка.

*Владеть:* методами использования данной темы при решении прикладных задач.

## **Ряды**

*Цель изучения этой темы* ознакомления с понятиями числовых и функциональных рядов и их применения.

Данная тема включает в себя:

Числовые ряды. Частичные суммы. Сходимость и расходимость числовых рядов. Необходимое условие сходимости числового ряда. Достаточные признаки сходимости рядов с положительными членами: сравнения, Даламбера, Коши, интегральный Коши-Маклорена. Знакопеременные ряды. Знакопеременяющиеся ряды. Абсолютно и условно сходящиеся ряды.

Понятие функционального ряда. Область сходимости. Сумма функционального ряда. Степенные ряды. Радиус и область сходимости. Формулы Даламбера и Коши для нахождения радиуса сходимости. Разложение функции в степенные ряды. Необходимое и достаточное условие разложимости функции в степенной ряд. Разложение элементарных функций в ряд Маклорена.

*Изучив данную тему, студент должен*

*Знать:* Понятие числового ряда, его частичных сумм, сходимости. Необходимый признак сходимости числового ряда. Достаточные признаки: сравнения, Даламбера, Коши, интегральный Коши-Маклорена. Знакопеременные ряды, абсолютную и условную сходимость. Признак Лейбница. Понятие функционального ряда, области его сходимости. Степенные ряды, формулы для нахождения радиуса сходимости. Разложение элементарных функций в ряд Тейлора.

*Уметь:* Исследовать числовой ряд на сходимость применяя различные признаки на сходимость. Исследовать на сходимость знакопеременные ряды. Применять признак Лейбница. Находить область сходимости функционального ряда. Разложить в ряд Тейлора элементарную функцию.

*Владеть:* методами использования данной темы при решении прикладных задач.

## **Темы занятий и образовательные технологии для студентов дневной формы обучения**

Тема лекционного занятия	Образовательная технология	Тема практического занятия	Образовательная технология
Введение. Элементы теории множеств и функций.	Информационная лекция	Элементы теории множеств. Функция, основные свойства функции. График функции.	Решение типовых задач
Предел и непрерывность функции одной переменной.	Лекция - погружение	Предел последовательности и функции. Непрерывность функции одной переменной.	Тренинг Индивидуальный опрос

Производная и дифференциал функции одной переменной.	Лекция по готовому конспекту	Дифференциальные исчисления функции одной переменной. Дифференциал функции одной переменной.	Решение типовых задач  Анализ практической ситуации
Исследование дифференцируемых функций одной переменной.	Лекция-визуализация	Исследование функции одной переменной с помощью производных и построение ее графика.	Контрольно-корректирующее занятие Индивидуальный опрос
Множества точек и последовательности в $n$ -мерном пространстве.	Лекция «Приглашение к беседе»	Множества на плоскости и в $n$ -мерном пространстве.	Решение типовых задач
Функции нескольких переменных (ФНП)	Метод укрупненных проблем	Функция нескольких переменных. Предел и непрерывность фнп.	Занятие по решению проблемных и творческих задач Мозговой штурм
Дифференцируемые ФНП	Лекция-визуализация	Дифференциальные исчисления функции нескольких переменных. Частные дифференциалы функции нескольких переменных. Градиент.	Решение задач. Индивидуальный опрос Форма организации занятия: индивидуально-групповая
Теория неявных функций	Лекция «Приглашение к беседе»	Теория неявных функций. Экономические иллюстрации теоремы о неявной функции.	Мозговой штурм
Классические методы оптимизации	Лекция по готовому конспекту	Экстремум (абсолютный, условный, локальный, глобальный) ФНП. Функция Лагранжа и множители Лагранжа.	Занятие по решению проблемных и творческих задач
Интегрирование	Лекция-визуализация	Неопределенный интеграл. Свойства. Интегралы от основных элементарных функций.	Решение задач. Индивидуальный опрос Форма организации занятия: индивидуально-
	Лекция по готовому конспекту	Приемы интегрирования (разложением, заменой переменной и по частям).	

	Лекция-визуализация	Интегрирование рациональных дробей.	групповая
	Лекция по готовому конспекту	Интегрирование тригонометрических функций. Интегрирование некоторых видов иррациональностей.	
	Лекция-визуализация	Интегральная сумма Римана, определенный интеграл. Экономические иллюстрации использования понятия определенного интеграла. Формула Ньютона – Лейбница.	Анализ практической ситуации,
	Лекция по готовому конспекту	Вычисление определенных интегралов способом подстановки и по частям.	Занятие по решению проблемных и творческих задач
	Лекция «Приглашение к беседе»	Приближенное вычисление определенных интегралов.	Решение типовых задач
	Проблемная лекция	Геометрические приложения определенного интеграла: вычисление площадей фигур, объемов тел.	Занятие по решению проблемных и творческих задач
	Метод укрупненных проблем	Несобственные интегралы I и II рода.	Решение типовых задач
Дифференциальные уравнения и их системы	Проблемная лекция	Дифференциальные уравнения (общие понятия). Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям.	Анализ практической ситуации,
	Лекция-визуализация	Дифференциальные уравнения первого порядка (общие понятия). Изоклины. Задачи Коши.	Решение задач.
	Лекция по готовому конспекту	Дифференциальные уравнения с разделяющимися и разделенными переменными. Однородные дифференциальные уравнения первого порядка и уравнения, приводящиеся к однородным.	Индивидуальный опрос
	Лекция-визуализация	Линейные дифференциальные уравнения первого порядка. Уравнение Бернулли.	Форма организации занятия: индивидуально-групповая
	Метод укрупненных проблем	Дифференциальные уравнения высших порядков (общие	Занятие по решению



		понятия). Задача Коши. Дифференциальные уравнения второго порядка, приводимые к уравнения первого порядка. Модели естественного и логического роста.	проблемных и творческих задач
	Лекция-визуализация	Однородные линейные уравнения (определения и общие свойства). Однородные и неоднородные линейные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.	Анализ практической ситуации,
	Информационная лекция	Системы дифференциальных уравнений.	Решение типовых задач
Числовые, функциональные и степенные ряды	Метод укрупненных проблем	Понятие числового ряда. Сумма ряда, частичная сумма, остаток ряда. Признаки сходимости числового ряда.	Решение типовых задач
	Лекция-визуализация	Функциональные ряды. Степенные ряды. Теорема Абеля. Радиус сходимости. Интервал сходимости. Область сходимости.	Тренинг Индивидуальный опрос
	Проблемная лекция	Ряды Тейлора и Маклорена. Приложение степенных рядов к приближенным вычислениям.	Анализ практической ситуации,

### Варианты вопросов к контролю знаний и самопроверки

Понятие множества.

1. Постоянные и переменные величины. Определение функции. Область определения функции. Способы задания.
2. Понятие функции. Основные свойства функции
3. Элементарные функции. Классификация функций. Преобразование графиков.
4. Числовые последовательности. Классификация последовательностей
5. Предел числовой последовательности. Основные теоремы о пределах последовательности.
6. Предел функции в точке. Односторонние пределы функции в точке.
7. Бесконечно большие и бесконечно малые величины. Связь между бесконечно малыми и бесконечно большими величинами.
8. Предел функции в бесконечности.
9. Основные теоремы о пределах функции.
10. Первые и второй замечательные пределы.
11. Раскрытие неопределенностей вида  $0/0$ ,  $\infty/\infty$ ,  $0 \cdot \infty$ ,  $\infty - \infty$ ,  $0^0$ ,  $1^\infty$ ,  $\infty^0$ .
12. Непрерывность функции в точке и на интервале. Точки разрыва функции.
13. Комплексные числа Исходные определения. Геометрическое изображение комплексных чисел. Комплексная плоскость.
14. Основные действия над комплексными числами.
15. Возведение комплексного числа в степень.
16. Извлечение корня из комплексного числа.
17. Показательная и тригонометрическая формы комплексного числа.

18. Задачи, приводящие к понятию производной. Производная функции: ее геометрический и механический смысл.
19. Производная сложной функции. Производная обратной функции. Производная функции, заданной неявно.
20. Производная степенно-показательной функции. Производная функции заданной параметрически.
21. Производные высших порядков. Механический смысл производной второго порядка.
22. Дифференциал функции: его геометрический смысл.
23. Основные теоремы дифференциального исчисления (теорема Ферма).
24. Основные теоремы дифференциального исчисления (теорема Ролля).
25. Основные теоремы дифференциального исчисления (теорема Лагранжа).
26. Правило Лопиталя (применение производной к вычислению пределов).
27. Возрастание и убывание функций. Экстремумы функций
28. Наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке.
29. Выпуклость функции. Точки перегиба.
30. Асимптоты графика функции.
31. Общая схема исследования функций и построения их графиков.
32. Множества в  $n$ -мерном пространстве.
33. Функции нескольких переменных. Геометрическое изображение функции двух переменных.
34. Предел и непрерывность функции нескольких переменных. Свойства непрерывных функций.
35. Дифференцируемость функции нескольких переменных.
36. Частные производные функции нескольких переменных.
37. Дифференциал функции нескольких переменных.
38. Дифференцирование неявных и сложных функций.
39. Производная по направлению Градиент.
40. Частные производные и дифференциалы высших порядков.
41. Экстремумы функции двух переменных.
42. Наибольшее и наименьшее значение функции нескольких переменных.
43. Неопределенный интеграл, его свойства.
44. Таблица основных интегралов.
45. Интегрирование заменой переменной.
46. Интегрирование по частям.
47. Интегрирование рациональных дробей.
48. Интегрирование тригонометрических функций:  $\int R(\sin x, \cos x)dx$
49. Интегрирование некоторых видов иррациональностей:  $\int R(x, \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}})dx$ ,  
 $\int R(x, \sqrt[m]{ax^2+bx+c})dx$
50. Определенный интеграл, его свойства. Криволинейная трапеция.
51. Формула Ньютона – Лейбница.
52. Вычисление определенных интегралов способом подстановки и по частям.
53. Приближенное вычисление определенных интегралов.
54. Геометрические приложения определенного интеграла: вычисление площадей фигур, объемов тел.
55. Несобственные интегралы с бесконечными пределами интегрирования.
56. Несобственные интегралы от неограниченных функций.
57. Несобственные интегралы от разрывных функций.
58. Дифференциальные уравнения (общие понятия). Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям.

59. Дифференциальные уравнения первого порядка (общие понятия). Изоклины.
60. Теорема существования и единственности решения задачи Коши.
61. Задачи Коши.
62. Дифференциальные уравнения с разделяющимися и разделенными переменными.
63. Однородные дифференциальные уравнения первого порядка.
64. Дифференциальные уравнения, приводящиеся к однородным.
65. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка.
66. Уравнение Бернулли.
67. Дифференциальные уравнения высших порядков (общие понятия). Задача Коши.
68. Понятия о краевых задачах для дифференциальных уравнений. Уравнения, допускающие понижение порядка.
69. Теорема о существовании и единственности решения дифференциального уравнения  $n$ -го порядка.
70. Дифференциальные уравнения вида  $y^{(n)} = f(x)$ .
71. Дифференциальные уравнения второго порядка, приводимые к уравнениям первого порядка.
72. Однородные линейные уравнения (определения и общие свойства).
73. Однородные линейные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.
74. Неоднородные линейные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.
75. Понятие числового ряда. Сумма ряда, частичная сумма, остаток ряда.
76. Сходимость и расходимость числового ряда.
77. Необходимые условия сходимости. Свойства сходящихся рядов.
78. Признаки сравнения рядов. Эталонные ряды.
79. Ряды с положительными членами. Признак Даламбера и Коши.
80. Интегральный признак Коши - Маклорена.
81. Знакопередающиеся ряды. Признак Лейбница.
82. Абсолютная и условная сходимость.
83. Ряды с комплексными членами.
84. Функциональные ряды. Степенные ряды. Теорема Абеля.
85. Радиус сходимости. Интервал сходимости. Область сходимости.
86. Приложение степенных рядов к приближенным вычислениям.
87. Ряды Тейлора и Маклорена.
88. Разложение в степенной ряд элементарных функций.

## 2.1 Примеры заданий для самостоятельного решения

### Самостоятельная работа

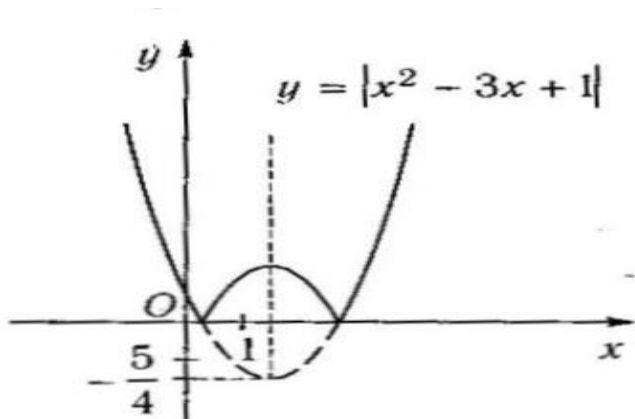
**Тема** **Функции, их свойства и графики. Функции, содержащие знак модуля**

**1** Построим график функции  $y = |f(x)|$ . Для построения графика функции  $y = |f(x)|$  следует построить график функции  $y = f(x)$  и ту часть которая расположена ниже оси  $OX$  отобразить относительно оси абсцисс т.е.  $OX$

**Пример** Построить график функции  $y = |x^2 - 3x + 1|$

**1** Построим график функции  $y = x^2 - 3x + 1$

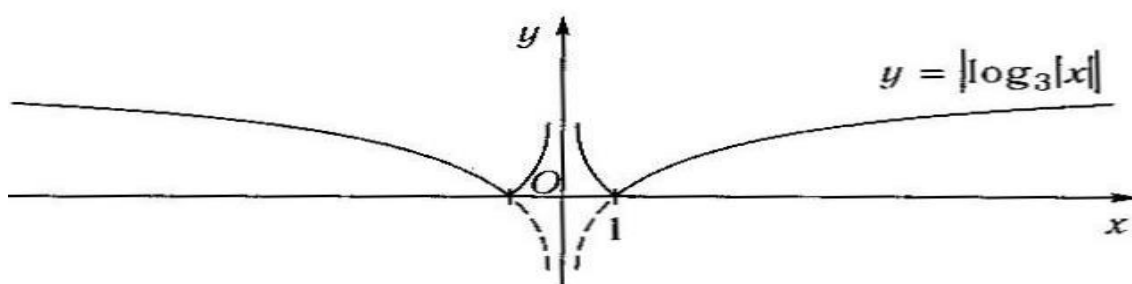
**2** В интервалах где функция отрицательна, производим отображение относительно оси  $OX$



2 Построим график функции  $y = |f(|x|)|$ . Для построения графика функции  $y = |f(|x|)|$  следует построить график функции  $y = f(x)$  и ту часть которая расположена ниже оси  $OX$  отобразить относительно оси абсцисс т.е.  $OX$ , а затем отобразить симметрично относительно оси  $OY$

**Пример** Построить график функции  $y = |\log_3|x||$

- 1 Построим график функции  $y = \log_3 x$
- 2 В интервалах где функция отрицательна, производим отображение относительно оси  $OX$
- 3 Выполняем симметрию относительно оси  $OY$



**Пример1.** Найти область определения и область значений функции  $y = x^2 + 1$   
 Областью определения функции является множество  $X = (-\infty, \infty)$ , область значений является множество  $Y = [0, \infty)$ .

**Пример 2.** Найти область определения функции  $y = 1/(x^2 - 5x + 6)$ .  
 Решение: Найдем значения  $x$ , в которых знаменатель обращается в нуль.  
 $x^2 - 5x + 6 = 0$ .  $x_1 = 2$ ,  $x_2 = 3$ . Функция не существует в этих точках. Областью определения является объединение таких множеств:  $(-\infty, 2) \cup (2, 3) \cup (3, \infty)$ .

**Пример 3.** Найти область определения функции  $y = \log_3(x - 1)$ .  
 Решение:  $x - 1 > 0$ ,  $x > 1$ . Запишем решение в виде интервала:  $(1, \infty)$  – область определения функции.

**Пример 4.** Дана функция  $f(x) = |x + 2|/x - 1$ . Найти значения функции в точках  $x = -2$ ,  $x = -3$ ,  $x = 1$ ,  $x = 0$ .

Решение:  $f(-2) = |-2+2| / (2-1) = 0/1 = 0$ ;  $f(-3) = |-3+2| / (3-2) = |-1| / 1 = 1$ ;  
 $f(1) = |1+2| / (1-1) = 3/0$ , точка  $x = 1$  в область определения функции не входит, так как знаменатель в этой точке обращается в 0.

$$f(0) = |0 + 2| / (0-1) = 2 / -1 = -2.$$

**Пример 5.** Дана функция  $f(x) = 3x^2 + x - 1$ .

Найти значение этой функции при 1)  $x=a^2 - 1$ , 2)  $x = 1/t$ .

Решение: 1)  $f(a^2 - 1) = 3(a^2 - 1)^2 + a^2 - 1 - 1 = 3a^4 - 6a^2 + 3 + a^2 - 2 = 3a^4 - 5a^2 + 1$ .

2)  $f(1/t) = 3(1/t^2) + 1/t - 1 = (3 + t - t^2)/t^2$ .

### Самостоятельная работа

#### Тема Элементарные функции. Сложные функции

#### Требования к знаниям и умениям

Студент должен:

*Иметь представление:*

- о различных способах задания функции;
- о сдвиге и деформации графика функции;
- о бесконечно малой и бесконечно большой величине и их связи.

*Знать:*

- определение функции, сложной и обратной функции;
- свойства функции (монотонность, ограниченности, чёткость, нечёткость, периодичность, непрерывность);
- определение предела функции в точке и свойства пределов;
- свойства степенной, показательной, логарифмической и тригонометрических функций.

*Уметь:*

- находить область определения функции;
- находить значение функции, заданной аналитически или графически, по значению аргумента и наоборот;
- вычислять значение функции по заданному значению аргумента при различных способах задания функции;
- определять основные свойства числовых функций, иллюстрировать их на графиках;
- строить графики изученных функций, иллюстрировать по графику свойства элементарных функций;
- использовать понятие функции для описания и анализа зависимостей величин;
- определять непрерывность функции в точке;
- производить простейшие преобразования графиков функций;
- решать уравнения, системы уравнений, неравенства, используя свойства и графики функций.

#### Виды самостоятельной работы студентов.

1. Работа над учебным материалом: чтение текста, составление плана и конспектирование текста.

2. Решение упражнений по образцу.

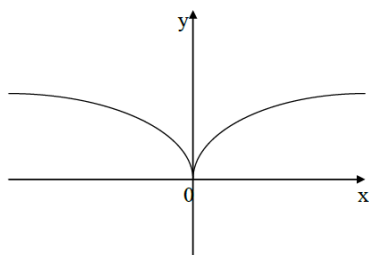
#### Образец выполнения задания

Построить графики функции  $y = x^{\frac{4}{7}}$  и провести исследование по следующей схеме:

1. Найти область определения функции.
2. Найти множество значений функции.
3. Свойства функции: непрерывность, чётность (нечётность), возрастание (убывание), интервалы знакопостоянства.
4. Нули функции.
5. Точки пересечения с осями координат.
6. Периодичность функции.

$$y = x^{\frac{4}{7}} = \sqrt[7]{x^4}$$

x	0	1	-1	128	-128
y	0	1	1	16	16



1. Область определения множество  $\mathbb{R}$  всех действительных чисел:  $x \in \mathbb{R}$ .
2. Множество значений функции:  $[0, +\infty)$ .
3. Функция  $y = x^{\frac{4}{7}}$  непрерывна в области определения.
4. Функция  $y = x^{\frac{4}{7}}$  - четная  $y(-x) = y(x)$
5. Функция возрастает на промежутке  $(0; +\infty)$ , убывает -  $(-\infty; 0)$ .
6. Функция положительна на всей области определения.
7. Нули функции:  $y = 0$  при  $x = 0$ .
8. Точка пересечения с осями координат -  $(0; 0)$ .
9. Функция неперiodическая.

#### Набор заданий:

$y = x^{\frac{n}{m}}$ $n, m \in \mathbb{N}$	$y = x^{\frac{n}{m}}$ $n \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}$	Тригоном. функция	Обратная тригоно- метрич. функция	$y = a^{kx}$	$y = \log_a kx$
$n = 10,$ $m = 3$	$n = -3,$ $m = 7$	$y = 2 +$ $+ \operatorname{ctg} x$	$y =$ $\arccos(x-1)$	$a = 1/7,$ $k = 3$	$a = 1/3,$ $k = -2$
$n = 5,$ $m = 9$	$n = -2,$ $m = 9$	$y =$ $\sin x/2$	$y = \pi/2 -$ $\arccos x$	$a = 7,$ $k = -2$	$a = 5,$ $k = -1$
$n = 6,$ $m = 11$	$n = -7,$ $m = 5$	$y = 2 -$ $-\cos x$	$y =$ $-2 \operatorname{arctg} x$	$a = 1/6,$ $k = 1$	$a = 4,$ $k = 2$

#### Построение и преобразование графиков.

Выполнить задания: Построить графики функций.

$y = \sin 2x$	$y = \sin(x - \frac{\pi}{3}) + 1$	$y = \frac{1}{2} \cos x - 2$	$y = 2 \cos \frac{x}{3}$	$y = \sin 3x - 1$
$y = \cos x - 1$	$y = 2 \sin x$	$y = \cos(x - \frac{\pi}{3})$	$y = \sin(x + \frac{\pi}{4})$	

2. Найдите функцию, обратную данной, укажите область определения и область значений обратной функции, Постройте графики данной и обратной функции в одной системе координат.
  - а)  $y = -3x$ ,
  - б)  $y = (x - 4)^2, x \geq 4$ ,

в)  $y = \sqrt{x+3}$

3 Найдите область определения каждой из функций:

а)  $y = \sqrt{4-x^2} \cdot \ln(x-1)^2$  б)  $y = \sqrt{\ln(x-3)}$  в)  $y = \log_{0,3}(x^2+3x) + \sqrt{49-x^2}$

г)  $y = \frac{1}{\sin 2x + \cos 2x}$  д)  $y = \frac{1}{\sin 3x - \cos 3x}$

а. Построить графики функций:

а)  $y = \log_{0,5}(x+1)$  б)  $y = 3^{\log_3(1-x^2)}$  в)  $y = |\log_2 x|$  г)  $y = \log_2 |x|$

д)  $y = (0,5)^{|x|}$  е)  $y = |2^x - 4|$  ж)  $y = 1 - 3^x$  з)  $y = 3 - 2^x$

4. Какие из указанных ниже функций являются четными: какие нечетными и какие не являются ни четными, ни нечетными:

а)  $f(x) = \frac{\cos 4x - x^4}{x^2 - \cos 2x}$ ; б)  $f(x) = x^3 - \operatorname{tg}^3 3x \sin^2 2x$ ; в)  $f(x) = \sqrt{\sin x} - 5x^2 + 2$ .

5. Запишите все решения уравнения  $\sin x \cdot \operatorname{ctg} x = -0,5$ , принадлежащие промежутку  $\left[-\frac{5\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}\right)$ .

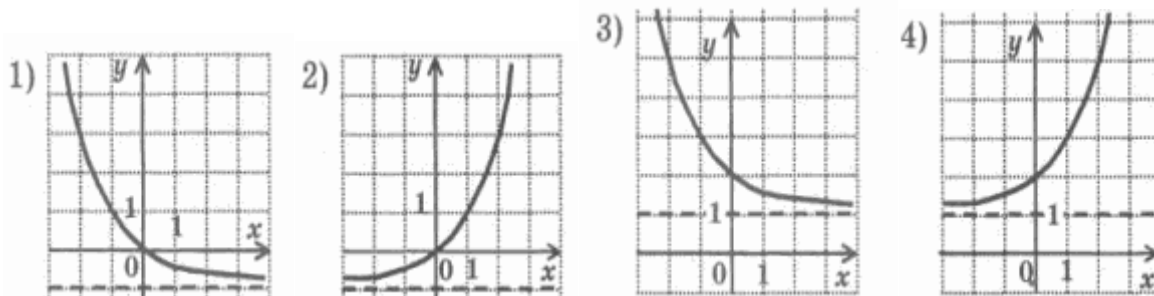
6. Запишите все решения неравенства  $\operatorname{tg} x \cdot \cos x > 0,5$ , принадлежащие промежутку  $(-2\pi; 3\pi)$ .

**Ответить на вопросы:**

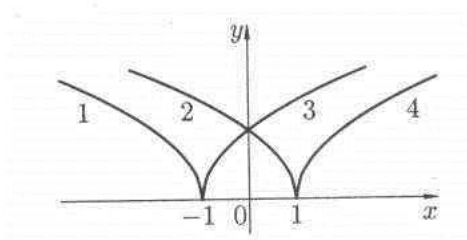
10. Сформулируйте определение функции.
11. Что называется, областью определения функции?
12. Что называется, областью значения функции?
13. Какими способами может быть задана функция?
14. Какие функции называются четными и как они исследуются на четность?
15. Какие функции называются нечетными и как они исследуются на нечетность?
16. Приведите примеры четных и нечетных функций.
17. Какие функции называются возрастающими и убывающими?
18. Какие функции называются обратными?
19. Перечислите основные элементарные функции?
20. Какую функцию называют сложной?
21. Перечислите основные элементарные функции.
22. Какие функции называются элементарными?

**Выполнить тест с последующей взаимопроверкой:**

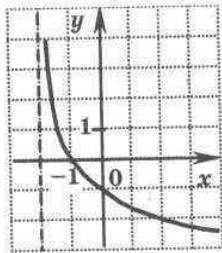
1. На рисунке представлен график функции  $y(x) = (1/2)^x - 1$ . Укажите этот рисунок.



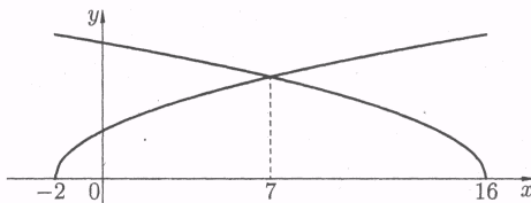
2. На рисунке представлены кривые  $y(x) = 2\sqrt{x-1}$ ,  $y(x) = 2\sqrt{x+1}$ ,  $y(x) = 2\sqrt{1-x}$  и  $y(x) = 2\sqrt{-x-1}$ . Под каким номером нарисован график функции  $y(x) = 2\sqrt{-x-1}$ ?



- 1) 1,                      2) 2,                      3) 3,                      4) 4.  
 3. График, какой из перечисленных функций, изображен на рисунке.

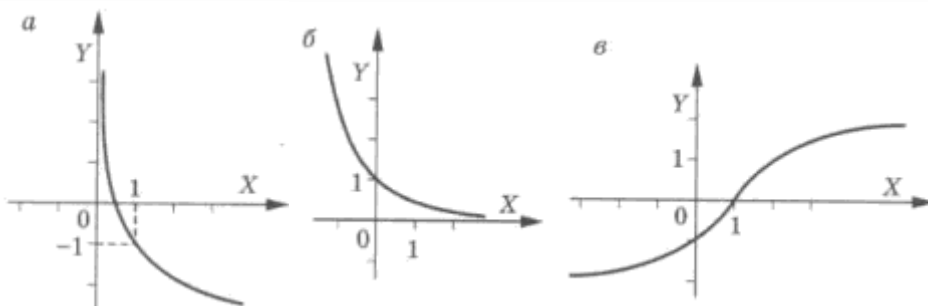


- 1)  $y(x) = \log_{0,5}(x-2)$ ,                      2)  $y(x) = \log_{0,5}(x+2)$ ,  
 3)  $y(x) = \log_{0,5}(x-1)$ ,                      4)  $y(x) = \log_{0,5} x - 1$ .  
 4. На рисунке представлены графики функций  $y(x) = \sqrt{x+2}$  и  $y(x) = \sqrt{16-x}$ . Укажите множество решений неравенства  $\sqrt{x+2} \geq \sqrt{16-x}$ .

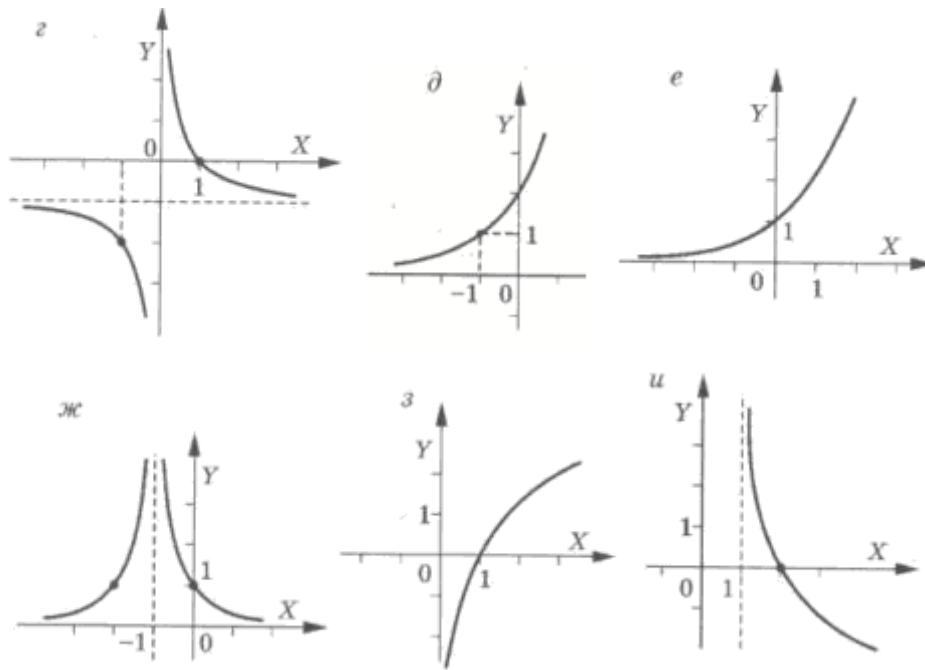


- 1)  $(-\infty; -2]$ ,                      2)  $[7; +\infty)$ ,  
 3)  $[-2; 7]$ ,                      4)  $[7; 16]$ .  
 5. Укажите промежуток, которому принадлежит корень уравнения  $\left(\frac{1}{3}\right)^x = x+2$   
 1)  $[-2; 0]$ ,                      2) (2, 3),  
 3) (0, 1),  
 4)  $[1; 2]$ .

- Ответы:** 1, 1, 2, 4, 1.  
 2. На каком из рисунков,  $a$  – и изображены графики функций:  
 1)  $y = 2^{x+1}$ ,    2)  $y = \log_{\frac{1}{2}} x - 1$ ,    3)  $y = \sqrt[3]{x-1}$ ,    4)  $y = \frac{1}{(x+1)}$ ,    5)  $y = \frac{1}{(x+1)^6}$ ,    6)  $y = (\pi-3)^x$ .







**Самостоятельная работа**  
**Примеры функциональных зависимостей**  
**в реальных процессах и явлениях**

Цель: Использование функциональных зависимостей при решении задач экономического содержания. Развитие интереса к предмету.

Форма самостоятельной деятельности: подготовить реферат по предложенной теме. Реферат должен быть выполнен с соблюдением методических рекомендаций по написанию реферата.

**Введение в анализ**  
**Самостоятельная работа**  
**Способы задания и свойства числовой последовательности.**  
**Понятие о пределе последовательности. Бесконечно убывающая геометрическая последовательность и ее сумма**

Цель: *Знать определение последовательности и способы ее задания. Иметь понятие о пределе последовательности, бесконечно убывающей геометрической последовательности и ее сумме.*

1. Изучив тему, письменно ответьте на вопросы:
  - 1<sup>0</sup>. Сформулируйте определение последовательности.
  - 2<sup>0</sup>. Перечислите способы задания последовательности.
  - 3<sup>0</sup>. Сформулируйте определение предела последовательности.
  - 4<sup>0</sup>. Дайте понятие бесконечно убывающей геометрической прогрессии и ее сумме.

1. Выполните письменно задания

**Пример**

Вычислить  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 5x + 8}{5x^2 + x - 2}$ .

**Решение.**

Числитель и знаменатель дроби неограниченно возрастают при  $x \rightarrow \infty$ . В этом случае говорят, что имеет место неопределенность вида  $\left[ \frac{\infty}{\infty} \right]$ . Разделим числитель и знаменатель дроби на старшую степень переменной, то есть на  $x^2$ :

$$2. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 5x + 8}{5x^2 + x - 2} = \left[ \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 - \frac{5}{x} + \frac{8}{x^2}}{5 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}}$$

Так как при  $x \rightarrow \infty$  каждая из дробей  $\frac{5}{x}$ ,  $\frac{8}{x^2}$ ,  $\frac{1}{x}$ ,  $\frac{2}{x^2}$  стремится к нулю, получим

$$3. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 5x + 8}{5x^2 + x - 2} = \frac{3}{5}$$

**Пример** Вычислить  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 4x + 3}{x^3 + 1}$ .

**Решение.**

При  $x \rightarrow -1$  числитель и знаменатель дроби стремятся к 0. Это неопределенность вида  $\left[ \frac{0}{0} \right]$ . Разложим на множители числитель и знаменатель дроби и выполним сокращение:

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 4x + 3}{x^3 + 1} = \left[ \frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x+3)}{(x+1)(x^2 - x + 1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+3}{x^2 - x + 1} = \frac{2}{3}$$

**Пример** Вычислить предел  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{10-x} - 3}{2 - \sqrt{x+3}}$ .

**Решение.**

В данном случае имеет место неопределенность вида  $\left[ \frac{0}{0} \right]$ . Умножим числитель и знаменатель дроби на выражения, сопряженные к ним, то есть на  $(\sqrt{10-x} + 3)(2 + \sqrt{x+3})$ :

$$4. \quad \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{10-x} - 3}{2 - \sqrt{x+3}} &= \left[ \frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{10-x} - 3)(\sqrt{10-x} + 3)(2 + \sqrt{x+3})}{(2 - \sqrt{x+3})(2 + \sqrt{x+3})(\sqrt{10-x} + 3)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(10-x-9)(2 + \sqrt{x+3})}{(4-x-3)(\sqrt{10-x} + 3)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1-x)(2 + \sqrt{x+3})}{(1-x)(\sqrt{10-x} + 3)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 + \sqrt{x+3}}{\sqrt{10-x} + 3} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

**Пример** Вычислить  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+4x^2)^{3/2} - 1}{x \cdot \ln(1+6x)}$ .

**Решение.** При  $x \rightarrow 0$  числитель и знаменатель – бесконечно малые величины. Заменяем их эквивалентными бесконечно малыми.

Так как при  $\gamma \rightarrow 0$   $(1+\gamma)^m - 1 \sim m\gamma$ ,  $\ln(1+\gamma) \sim \gamma$ , то  $(1+4x^2)^{\frac{3}{2}} - 1 \sim 4x^2 \cdot \frac{3}{2} = 6x^2$ ,  $\ln(1+6x) \sim 6x$ .

Теперь можно воспользоваться формулой

$$\lim \frac{\gamma}{\beta} = \lim \frac{\gamma_1}{\beta_1}, \text{ где}$$

$\gamma, \beta, \gamma_1, \beta_1$  - бесконечно малые, причем  $\gamma \sim \gamma_1$ ,  $\beta \sim \beta_1$ .

Тогда

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+4x^2)^{\frac{3}{2}} - 1}{x \cdot \ln(1+6x)} = \left[ \frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x^2}{x \cdot 6x} = 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{7}{6x^2} \right)^{2x^2}.$$

**Пример** Вычислить

**Решение.**

Это неопределенность  $[1^\infty]$ . Раскрываем её с помощью второго замечательного предела

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e.$$

В данном случае  $\alpha = -\frac{7}{6x^2} \rightarrow 0$ . Поэтому

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{7}{6x^2} \right)^{2x^2} &= [1^\infty] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \left( 1 + \left( -\frac{7}{6x^2} \right) \right)^{-\frac{6x^2}{7}} \right]^{-\frac{7}{6x^2} \cdot 2x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-\frac{7 \cdot 2x^2}{6x^2}} = e^{-\frac{7}{3}}. \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (\operatorname{tg} x)^{\arcsin x}.$$

**Пример** Вычислить

**Решение.** При  $x \rightarrow 0$  имеем неопределенность  $[0^0]$ .

Преобразуем выражение, используя свойства логарифмов:

$$\begin{aligned} A &= \lim_{x \rightarrow 0^+} (\operatorname{tg} x)^{\arcsin x} = [0^0] = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\ln(\operatorname{tg} x)^{\arcsin x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\arcsin x \cdot \ln(\operatorname{tg} x)} = \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \arcsin x \cdot \ln(\operatorname{tg} x)} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(\operatorname{tg} x)}{1/\arcsin x}}. \end{aligned}$$

Так как  $\ln(\operatorname{tg} x) \rightarrow -\infty$ ,  $\frac{1}{\arcsin x} \rightarrow \infty$ , имеем неопределенность  $\left[ \frac{\infty}{\infty} \right]$ , которую

раскрываем по правилу Лопиталья:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Тогда

$$\begin{aligned}
 A &= e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(\operatorname{tg} x)}{\frac{1}{\arcsin x}}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{\operatorname{tg} x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x}}{\frac{1}{\arcsin^2 x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\arcsin^2 x \cdot \sqrt{1-x^2}}{\sin x \cdot \cos x}} = \\
 &= e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\arcsin^2 x}{\sin x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{1-x^2}}{\cos x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\arcsin^2 x}{\sin x}}.
 \end{aligned}$$

Так как  $\arcsin^2 x \rightarrow 0$ ,  $\sin x \rightarrow 0$ , получили неопределенность  $\left[ \frac{0}{0} \right]$ . Её можно раскрыть, ещё раз применив правило Лопиталья, но проще использовать таблицу эквивалентных бесконечно малых:

при  $x \rightarrow 0$   $\arcsin x \sim x$ ,  $\sin x \sim x$ .

$$\text{Тогда } A = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\arcsin^2 x}{\sin x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-x^2}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} (-x)} = e^0 = 1.$$

### Самостоятельная работа Первый и Второй замечательные пределы

Цель: Знать основу появления числа  $e$ . Уметь решать пределы с использованием формул

1. Изучив тему, письменно ответьте на вопросы:

1<sup>0</sup>. Сформулируйте теорему о существовании предела:

- а) ограниченной сверху неубывающей последовательности;
- б) ограниченной снизу невозрастающей последовательности.

2<sup>0</sup>. Что такое число  $e$

2. Выполните письменно задание

#### Свойства эквивалентных бесконечно малых

1)  $\alpha \sim \alpha$ ,  $\left( \lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha}{\alpha} = 1 \right)$

2) Если  $\alpha \sim \beta$  и  $\beta \sim \gamma$ , то  $\alpha \sim \gamma$ ,  $\left( \lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha}{\gamma} = \lim_{x \rightarrow a} \left( \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\beta}{\gamma} \right) = 1 \cdot 1 = 1 \right)$

3) Если  $\alpha \sim \beta$ , то  $\beta \sim \alpha$ ,  $\left( \lim_{x \rightarrow a} \frac{\beta}{\alpha} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{\frac{\alpha}{\beta}} = 1 \right)$

4) Если  $\alpha \sim \alpha_1$  и  $\beta \sim \beta_1$  и  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha}{\beta} = k$ , то и  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha_1}{\beta_1} = k$  или  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha}{\beta} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha_1}{\beta_1}$ .

Следствие: а) если  $\alpha \sim \alpha_1$  и  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha}{\beta} = k$ , то и  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha}{\beta} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha_1}{\beta}$

б) если  $\beta \sim \beta_1$  и  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha}{\beta} = k$ , то  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha}{\beta} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha}{\beta_1}$

**Пример.** Найти предел  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 5x}{\sin 7x}$

Так как  $\operatorname{tg} 5x \sim 5x$  и  $\sin 7x \sim 7x$  при  $x \rightarrow 0$ , то, заменив функции эквивалентными бесконечно малыми, получим:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 5x}{\sin 7x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{7x} = \frac{5}{7}$$

**Пример.** Найти предел  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{1 - \cos x}$ .

Так как  $1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2} \sim 2 \left(\frac{x}{2}\right)^2$  при  $x \rightarrow 0$ , то  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{\frac{x^2}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0} 2x = 0$ .

**Пример.** Найти предел  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{\sin x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x^2} = \infty$ .

Если  $\alpha$  и  $\beta$  - бесконечно малые при  $x \rightarrow a$ , причем  $\beta$  - бесконечно малая более высокого порядка, чем  $\alpha$ , то  $\gamma = \alpha + \beta$  - бесконечно малая, эквивалентная  $\alpha$ . Это можно доказать следующим равенством  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\gamma}{\alpha} = \lim_{x \rightarrow a} \left(1 + \frac{\beta}{\alpha}\right) = 1$ .

Тогда говорят, что  $\alpha$  - главная часть бесконечно малой функции  $\gamma$ .

**Пример.** Функция  $x^2 + x$  - бесконечно малая при  $x \rightarrow 0$ ,  $x$  - главная часть этой функции. Чтобы показать это, запишем  $\alpha = x^2$ ,  $\beta = x$ , тогда

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (x + 1) = 1.$$

Кроме трех, изложенных выше, пределов можно записать следующие полезные на практике соотношения:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^m - 1}{x} = m.$$

**Пример.** Найти предел.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} mx}{\sin nx} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{mx}{nx} = \frac{m}{n}$$

**Пример.** Найти предел.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} x_0}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin(x - x_0)}{(x - x_0) \cos x \cos x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin(x - x_0)}{x - x_0} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{\cos x \cos x_0} = 1 \cdot \frac{1}{\cos^2 x_0} = \frac{1}{\cos^2 x_0}$$

**Пример.** Найти предел.

$$\lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\sin x - \cos x}{\pi - 4x} = \lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{-\frac{2}{\sqrt{2}} \sin(\pi/4 - x)}{\pi - 4x} = \lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{-\sin(\pi/4 - x)}{2\sqrt{2}(\pi/4 - x)} = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

**Пример.** Найти предел.

$$\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\cos x}{\pi - 2x} = \left\{ \begin{array}{l} y = \pi/2 - x \\ x = \pi/2 - y \\ \pi - 2x = \pi - \pi + 2y \end{array} \right\} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\cos(\pi/2 - y)}{2y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} = \frac{1}{2}$$

**Пример.** Найти предел.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+3}{x-1} \right)^{x+3} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x-1+4}{x-1} \right)^{x+3} = \left\{ \begin{array}{l} y = x-1 \\ x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty \end{array} \right\} = \lim_{y \rightarrow \infty} \left( \frac{y+4}{y} \right)^{y+4} = \lim_{y \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{4}{y} \right)^y \cdot \lim_{y \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{4}{y} \right)^4 = \\ &= \left\{ z = \frac{y}{4} \right\} = \lim_{z \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{z} \right)^{4z} = \left( \lim_{z \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{z} \right)^z \right)^4 = e^4 \end{aligned}$$

**Задание.** Вычислите :  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{2x}$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x + x^2}{\sin 5x + 2x^3}$ ,  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 14x - 32}{x^2 - 6x + 8}$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{2x}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 * \sin^2 3x}{1 - \cos x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 * (3x)^2}{\frac{(x^2)^2}{2}} = 18,$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 + \cos x}{(x - \pi)^2} = \left\{ \begin{array}{l} x - \pi = t \\ t \rightarrow 0 \\ x = t + \pi \end{array} \right\} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 + \cos(t + \pi)}{t^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cos t}{t^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{t^2}{2}}{t^2} = \frac{1}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{\sqrt{2x-2}};$$

Вычислить предел  $\lim \left( 1 + \frac{2}{3x} \right)^x$

- 1)  $\infty$
- 2)  $e^{\frac{2}{3}}$
- 3)  $e$
- 4)  $e^3$

Вычислить предел  $\lim \left( 1 + \frac{3}{x} \right)^{-x}$

- 1)  $\infty$
- 2)  $e^2$
- 3)  $e^{-x}$
- 4)  $e^{-3}$

Предел  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{2}{x} \right)^x$  равен:

- 1)  $\infty$
- 2)  $e^2$

3)  $e^{-x}$

4)  $e^3$

Предел  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin^2 4x}{x^2}$  равен:

1)  $\infty$

2) 0

3)  $e$

4) 16

### Самостоятельная работа Предел и непрерывность

Цель: Закрепить понятие непрерывности функции.

Развитие интереса к предмету.

2. Выполните письменно задание

#### Тема: Непрерывность, точки разрыва

ЗАДАНИЕ. Функция  $y = f(x)$  задана различными аналитическими выражениями в различных областях изменения независимой переменной. Найти точки разрыва функции, если они существуют, и построить ее график.

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{при } x < -1, \\ 2 - 2x & \text{при } -1 \leq x < 1, \\ \ln x & \text{при } 1 \leq x. \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ: Функция непрерывна на каждом из интервалов  $(-\infty; -1)$ ,  $(-1; 1)$ ,  $(1; +\infty)$ .

Исследуем на непрерывность точки  $x = -1$ ,  $x = 1$ .

Пусть  $x = -1$ . Найдем пределы слева и справа:

$$\lim_{x \rightarrow -1-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1-0} 2 = 2,$$

$$\lim_{x \rightarrow -1+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1+0} (2 - 2x) = 2 + 2 = 4.$$

Пределы слева и справа конечны, но не равны, поэтому в точке  $x = -1$  функция терпит разрыв первого рода («скачок»).

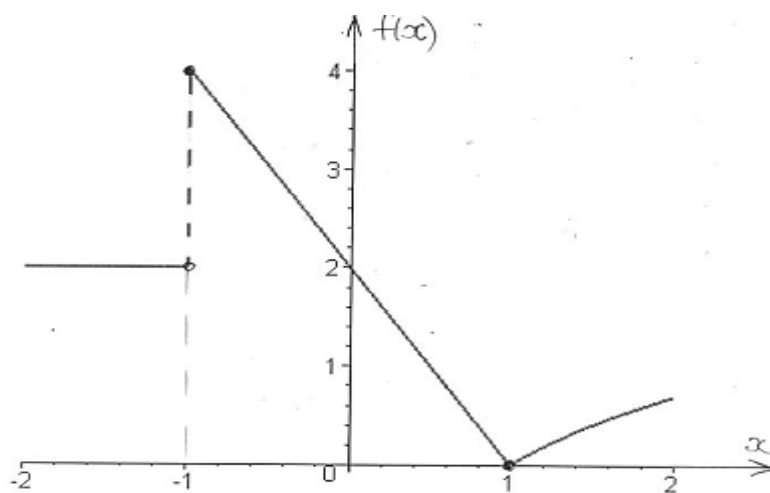
Пусть  $x = 1$ . Найдем пределы слева и справа:

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-0} (2 - 2x) = 2 - 2 = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+0} \ln x = \ln 1 = 0.$$

Пределы слева и справа конечны и равны, поэтому функция непрерывна в  $x = 1$ .

Построим график функции:



## Тема: Непрерывность, точки разрыва

**ЗАДАНИЕ.** *Задана функция  $y = f(x)$  и два значения аргумента  $x_1, x_2$ . Установить: является ли данная функция непрерывной или разрывной для каждого из данных аргументов; в случае разрыва функции найти ее пределы при приближении к точке разрыва справа и слева и определить тип точки разрыва.*

$$f(x) = 10^{\frac{1}{x-3}}, \quad x_1 = 3,5; \quad x_2 = 3$$

**РЕШЕНИЕ:**

Точка  $x_1 = 3,5$ . В данной точке разрыва нет,  $f(3,5) = 10^{\frac{1}{3,5-3}} = 10^{\frac{1}{0,5}} = 10^2 = 100$ .

Точка  $x_2 = 3$ . Знаменатель обращается в нуль, значит, это точка разрыва.

Вычислим пределы справа и слева:

$$\lim_{x \rightarrow 3-0} 10^{\frac{1}{x-3}} = 10^{\frac{1}{(3-0)-3}} = e^{\frac{1}{-0}} = e^{-\infty} = \frac{1}{e^{\infty}} = \frac{1}{\infty} = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow 3+0} 10^{\frac{1}{x-3}} = 10^{\frac{1}{(3+0)-3}} = e^{\frac{1}{+0}} = e^{+\infty} = \infty.$$

Один из пределов равен  $\infty$ , значит  $x_2 = 3$  - точка разрыва второго рода.



## Тема: Точки разрыва функции

ЗАДАНИЕ. Записать все точки разрыва (слева направо), указывая следом за точкой тип разрыва (1; 2; y), для функции

$$f_1(x) = \frac{\sin(x+3)}{\sqrt{(x+3)^2}} + \frac{\sin(x-3)}{x^2 - 4x + 3}.$$

РЕШЕНИЕ. Точки разрыва:  $x_1 = -3(1)$ ,  $x_2 = 1(2)$ ,  $x_3 = 3(y)$ . Точка  $x_1 = -3$  является точкой разрыва первого рода, так как пределы справа и слева существуют, конечны, но не совпадают:

$$\lim_{x \rightarrow -3 \pm 0} \frac{\sin(x+3)}{\sqrt{(x+3)^2}} = \lim_{x \rightarrow -3 \pm 0} \frac{x+3}{|x+3|} = \pm 1.$$

Точка  $x_2 = 1$  является точкой разрыва второго рода, так как предел равен бесконечности

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x-3)}{x^2 - 4x + 3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x-3)}{(x-3)(x-1)} = \frac{\sin 2}{2} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} = \infty.$$

Точка  $x_3 = 3$  является устранимой точкой разрыва, поскольку

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sin(x-3)}{x^2 - 4x + 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{(x-3)(x-1)} = 1/2.$$

## Контрольные задания по теме «Пределы и непрерывность»

1 Значение предела  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x}$  равно

1)  $\infty$  2) 0                      3) -1                      4) 0,5                      5) 1

4 Значение предела  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1})$  равно

1)  $\infty$  2) 0                      3) 1                      4) 0,5                      5)  $-\infty$

5 Значение предела  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{10-x} - 3}{2 - \sqrt{x+3}}$  равно

1)  $\infty$  2) 1                      3) -2/3                      4) 2/3                      5) -3

1 Выберите правильный ответ:

1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + 2n - 7}{n^2 - 3n + 1} = -\frac{2}{3}$                       2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + 2n - 7}{n^2 - 3n + 1} = -7$                       3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + 2n - 7}{n^2 - 3n + 1} = 3$

2 Выберите правильный ответ:

1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+3)^3}{5n^3} = \infty$                       2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+3)^3}{5n^3} = \frac{1}{5}$                       3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+3)^3}{5n^3} = 0$

3 Выберите правильный ответ:

1)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 3}{4x^3 - 5x} = 0$  2)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 3}{4x^3 - 5x} = \infty$  c)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 3}{4x^3 - 5x} = \frac{1}{2}$

4 Выберите правильный ответ:

$$1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 4x + 7}{x} = 12) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 4x + 7}{x} = \infty$$

$$3) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 4x + 7}{x} = 7$$

5 **Выберите правильный ответ:**

$$1) \lim_{n \rightarrow 2} \frac{n^2 - 5n + 6}{n^2 + 2n - 8} = -\frac{3}{4}$$

$$2) \lim_{n \rightarrow 2} \frac{n^2 - 5n + 6}{n^2 + 2n - 8} = -\frac{1}{6}$$

$$3) \lim_{n \rightarrow 2} \frac{n^2 - 5n + 6}{n^2 + 2n - 8} = 1$$

6 **Выберите правильный ответ:**

$$1) \lim_{x \rightarrow \infty} \sin x = -1$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \infty} \sin x \text{ - не существует}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow \infty} \sin x = 1$$

7 **Выберите правильный ответ:**

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{tg} 3x) * \cos 5x = 3$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{tg} 3x) * \cos 5x = \frac{3}{5}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{tg} 3x) * \cos 5x = 0$$

8

**Вычислить**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + 4x^2)^{3/2} - 1}{x \cdot \ln(1 + 6x)}$ .

$$1) 1$$

$$2) 0$$

$$3) \infty$$

$$4) -\infty$$

9

**Вычислить предел**  $\lim_{x \rightarrow 3^+} \left( \frac{2}{x^3 - 3x^2} - \frac{5}{x - 3} \right) = \dots$

$$1) -\infty$$

$$2) 10$$

$$3) \frac{2}{-3} * \frac{5}{-3}$$

$$4) -\frac{10}{9}$$

10 **Выберите правильный ответ:**

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n} + 1} = \frac{1}{n}$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n} + 1} = 0$$

$$3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n} + 1} \text{ не существует}$$

11 **Вычислить предел**  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{15-x}-4}{x+x^2} = \dots$

- 1)  $-\infty$
- 2) 1
- 3) 0
- 4)  $-\frac{1}{8}$

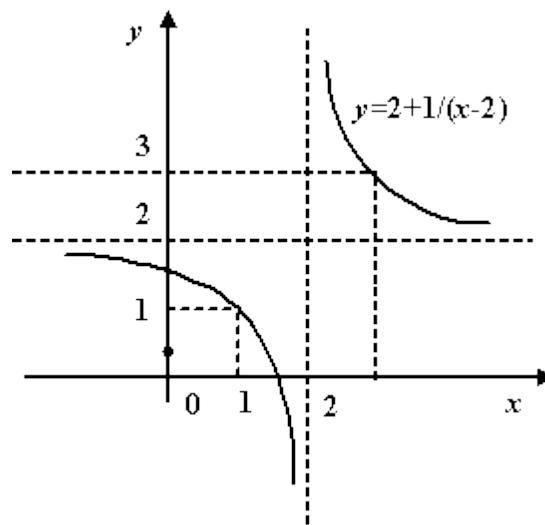
12 **Предел функции**  $\lim_{x \rightarrow ?} \frac{x^2 + 14x - 32}{x^2 - 6x + 8}$  **имеет неопределенность вида**  $\left[ \frac{\infty}{\infty} \right]$  **если**

- 1)  $x \rightarrow 2$
- 2)  $x \rightarrow \infty$
- 3)  $x \rightarrow 0$
- 4)  $x \rightarrow 4$

13 **Вычислить**  $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\operatorname{tg} x)^{\arcsin x}$ .

- 1)  $-\infty$
- 2) 1
- 3) 0
- 4)  $\infty$

14

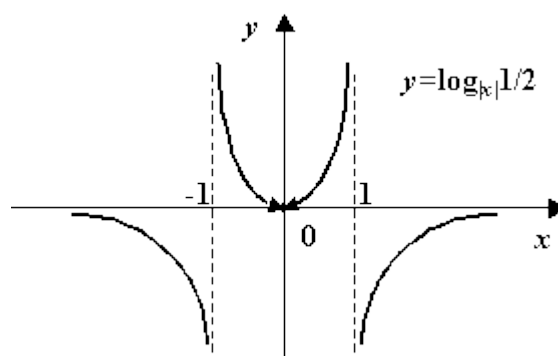


Функция  $f(x) = 2 + \frac{1}{x-2}$  имеет график

тогда  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$

- 1)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$
- 2)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$
- 3)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  нельзя определить
- 4)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$

15

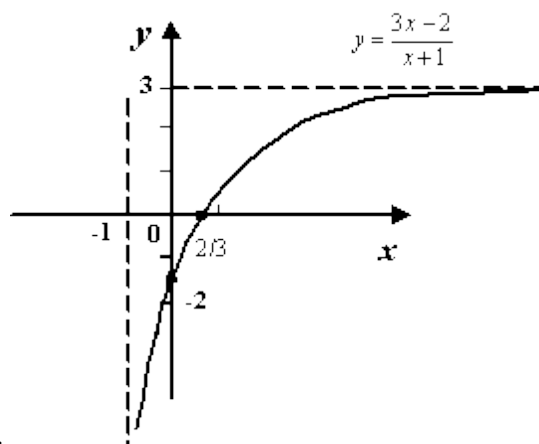


Функция  $f(x) = \log_{|x|} \frac{1}{2}$  имеет график

тогда

- 1)  $\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = -1$
- 2)  $\lim_{x \rightarrow -1-0} f(x) = -\infty$
- 3)  $\lim_{x \rightarrow 1+0} f(x)$  нельзя определить
- 4)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

16



Функция  $f(x) = \frac{3x-2}{x+1}$  имеет график

, тогда

- 1)  $\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = -1$
- 2)  $\lim_{x \rightarrow -1+0} f(x) = -\infty$
- 3)  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = +\infty$
- 4)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$

### Самостоятельная работа Производная и ее применение

Цель: Развитие интереса к предмету.

Знать основные понятия по теме «Производная и ее применение»

Форма самостоятельной деятельности: создание презентации по заявленной теме. Работа должна соответствовать методическим рекомендациям по созданию презентации.

### Самостоятельная работа Решение прикладных задач

Цель: *Уметь применять определение производной и ее механический смысл к решению прикладных задач.*

### **Требования к знаниям и умениям**

**Студент должен:**

**иметь представление:**

- о мгновенной скорости неравномерного прямолинейного движения, о скорости изменения функции;
- о производные высшие порядки;
- о дифференциале функции, о применении дифференциала к приближённым вычислениям;
- о наибольшем и наименьшем значении функции на отрезке, о применении экстремумов к решению прикладных задач;
- о пределе последовательности.

**Знать:**

- определение производной, её геометрический и физический смысл;
- алгоритм нахождения производной в общем виде;
- правила и формулы дифференцирования функций, перечисленных в содержании учебного материала;
- формулу для нахождения производной сложной функции;
- уравнение касательной, углового коэффициента касательной;
- определение дифференциала функции;
- определение второй производной, её физический смысл;
- правила нахождения интервалов монотонности, экстремумов функции, промежутков выпуклости и вогнутости графиков функций;
- общую схему построения графиков функций с помощью производной;
- правило нахождения наибольшего и наименьшего значения функций на промежутке;
- определение первообразной функции, неопределённого интеграла, свойства неопределённого интеграла;
- таблицу основных формул интегрирования;
- определение определённого интеграла, его свойства, геометрический смысл определённого интеграла;
- формулу Ньютона-Лейбница.

**Уметь и владеть:**

- находить сумму бесконечно-убывающей геометрической прогрессии;
- вычислять производные и первообразные элементарных функций, применяя правила вычисления производных и первообразных, используя справочные материалы;
- использовать производную для изучения свойств функций и построения графиков;
- решать задачи с применением уравнения касательной к графику функции;
- применять производную для проведения приближенных вычислений;
- решать задачи прикладного характера на нахождение наибольшего и наименьшего значения, на нахождение скорости и ускорения;
- вычислять определённый интеграл с помощью основных свойств и по формуле Ньютона-Лейбница;
- решать простейшие прикладные задачи, сводящиеся к нахождению интеграла;
- вычислять в простейших случаях площади и объёмы с использованием определённого интеграла.

### **Методические рекомендации**

***Правила дифференцирования и таблица производных основных функций***

1.  $C' = 0$

2.  $x' = 0$

3.  $(U \pm g)' = U' \pm g'$

4.  $(U \cdot g)' = U' \cdot g + U \cdot g'$

5.  $(C \cdot f(x))' = C \cdot f'(x)$

6.  $\left(\frac{U}{g}\right)' = \frac{U' \cdot g - U \cdot g'}{g^2}$

**Производные основных элементарных функций.**

1.  $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}, n \neq 0$

2.  $(e^x)' = e^x$

3.  $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

4.  $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$

5.  $(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$

6.  $(\sin x)' = \cos x$

7.  $(\cos x)' = -\sin x$

8.  $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$

9.  $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

10.  $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

11.  $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

12.  $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$

13.  $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

*Физический смысл первой производной.*

Физический смысл производной заключается в том, что мгновенная скорость движения  $g(t)$  в момент времени  $t$  есть производная пути по времени, т.е.

$$g(t) = \frac{dS(t)}{dt} = S'(t)$$

*Физический смысл второй производной.*

Ускорение прямолинейного движения в данный момент времени есть первая производная скорости по времени или вторая производная пути по времени.

$$a(t) = g'(t) = S''(t)$$

**Пример**

1. Зависимость пути от времени при прямолинейном движении точки задана уравнением

$$S = t^3 - 6t^2 - 12t + 3.$$

В какой момент времени ускорение движения точки будет равно  $24 \text{ м/с}^2$ ?

Решение.

а) Найдем скорость движения точки по формуле:  $g(t) = S'(t)$

$$g(t) = (t^3 - 6t^2 - 12t + 3)' = 3t^2 - 12t - 12$$

б) Найти ускорение движения точки по формуле:  $a(t) = g'(t)$

$$a(t) = (3t^2 - 12t - 12)' = 6t - 12$$

в) Из условия  $a = 24 \text{ м/с}^2$ , найти момент времени:

$$6t - 12 = 24$$

$$6t = 36$$

$$t = 6 \text{ с}$$

Ответ: 6 с.

Используя методические рекомендации, выполните задания:

1 вариант

1. Тело движется вверх по закону

$$S(t) = v_0 t - \frac{gt^2}{2} \text{ с начальной скоростью}$$

$v_0 = 30 \text{ м/с}$ ,  $g = 9,8 \text{ м/с}^2$ . Через сколько секунд скорость станет равной  $10 \text{ м/с}$ ?

2. Найдите силу, действующую на тело массой  $5 \text{ кг}$ , движущееся по закону

$$S(t) = \frac{1}{3} t^3 - 2t + 1 \text{ в момент времени } t = 3 \text{ с}$$

3. Определить кинетическую энергию точки, массой  $m = 2 \text{ кг}$ , движущейся по закону  $S(t) = 3t^2 + 4$  в момент времени  $t = 2 \text{ с}$ .

4. Точка движется по прямой по закону  $S(t) = 2t^2 - 3t - 1$ . Найти ускорение точки в момент времени  $t = 2 \text{ с}$ .

2 вариант

1. Тело движется вверх по закону

$$S(t) = v_0 t - \frac{gt^2}{2} \text{ с начальной скоростью}$$

$v_0 = 50 \text{ м/с}$ ,  $g = 9,8 \text{ м/с}^2$ . Через сколько секунд скорость станет равной  $20 \text{ м/с}$ ?

2. Тело массой  $3 \text{ кг}$  движется по прямой согласно уравнению  $S(t) = 2t^3 - 2t + 3$ .

Найдите действующую на него силу в момент времени  $t = 5 \text{ с}$ .

3. Определить кинетическую энергию точки, массой  $m = 3 \text{ кг}$ , движущейся по закону  $S(t) = 5t^2 + 2$  в момент времени  $t = 3 \text{ с}$ .

4. Точка движется по прямой по закону  $S(t) = 3t^2 + 4t - 2$ . Найти ускорение точки в момент времени  $t = 1 \text{ с}$ .

**Выполнить задания:** Исследовать функцию по предложенной схеме и построить ее график

$$y = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

$$y = x^2 e^{-x^2}$$

$$y = x - \ln x \quad y = x \ln^2 x$$

$$y = \frac{x}{\ln x}$$

$$y = \frac{x^2 + 1}{x}$$

$$y = \frac{2x^3 - 5x^2 + 14x - 6}{4x^2}$$

$$y = \frac{x^3}{1 + x^2}$$

$$y = \frac{(1+x)^{3/2}}{\sqrt{x}}$$

$$y = \frac{x^4}{(1+x)^3}$$

$$y = \frac{2}{e^x(x+3)}$$

$$y = \frac{1 + \ln x}{x}$$

$$y = x^2 \ln^2 x$$

$$y = \frac{\ln(x-1)}{(x-1)^2}$$

$$y = \frac{x^2}{x-2}$$

$$y = \frac{x}{2} + \frac{2}{x}$$

$$y = 2x + \frac{1}{x^2}$$

$$y = \frac{x^3}{1-x^2}$$

$$y = \frac{x^3}{(x-1)^2}$$

$$y = x + \arctg x$$

$$y = x^3 - \arctg 2x$$

$$y = \frac{\ln(x-1)}{(x-1)^2}$$

$$y = \frac{x^2}{x-2}$$

Схема исследования функции:

1. Найти область определения и область значения функции.
2. Исследовать на четность и нечетность, периодичность.
3. Исследовать на непрерывность, найти точки разрыва и определить их характер.
4. Найти точки пересечения графика функции с осями координат, нули функции, промежутки знакопостоянства.
5. Выяснение поведения функции в бесконечности.
6. Нахождение промежутков возрастания и убывания функции.
7. Исследовать функцию на экстремум.
8. Найти промежутки выпуклости графика функции, точки перегиба и значение функции в этих точках.
9. Определить асимптоты (вертикальные, горизонтальные, наклонные).
10. Найти дополнительные точки, если это необходимо, и построить график функции.

### **Контрольные вопросы**

1. Что называется, мгновенной скоростью изменения функции?
2. Дайте определение производной функции.
3. Сформулируйте общее правило нахождения производной функции.
4. Объясните геометрический смысл производной.
5. Сформулируйте основные правила дифференцирования.
6. Чему равна производная постоянной?
7. Какую функцию называют сложной? Приведите примеры.
8. Как вычисляется производная сложной функции?
9. Как найти угловой коэффициент касательной к графику данной функции?
10. Какие физические задачи решаются с применением производной?
11. Что называется, производной второго порядка?
12. В чем заключается физический смысл второй производной?
13. Объясните, как применяется производная для исследования функции на возрастание и убывание?
14. Дайте определение максимума и минимума функции.
15. Укажите необходимое и достаточное условие максимума и минимума.
16. Изложите правило исследования функции на максимум и минимум.
17. Как определяется с помощью производной выпуклость функции вверх и вниз?

### **Самостоятельная работа Интеграл и его применение**

Цель: Показать применение определенного интеграла при решении задач. Развитие интереса к предмету.

Знать методы применения интегральных исчислений при решении задач

**Форма самостоятельной деятельности:** создание презентации по заявленной теме.

Работа должна соответствовать методическим рекомендациям по созданию презентации.

### **Образец выполнения практических заданий**

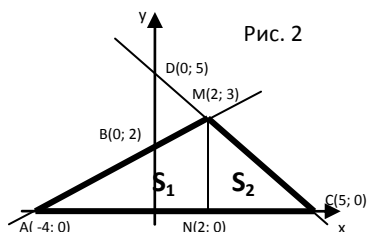


2. Вычислить площади фигур, ограниченных линиями  $x - 2y + 4 = 0$ ,  $y = 0$  и  $x + y - 5 = 0$ .

**Решение.** Выполним построение фигуры. Построим прямую  $x - 2y + 4 = 0$ :  $y = 0$ ,  $x = -4$ ,  $A(-4; 0)$ ;  $x = 0$ ,  $y = 2$ ,  $B(0; 2)$ . Построим прямую  $x + y - 5 = 0$ :  $y = 0$ ,  $x = 5$ ,  $C(5; 0)$ ;  $x = 0$ ,  $y = 5$ ,  $D(0; 5)$ .

Найдем точку пересечения прямых, решив систему уравнений:

$$\begin{cases} x - 2y + 4 = 0, \\ x + y - 5 = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2y - 4, \\ 2y - 4 + y - 5 = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2y - 4, \\ 3y = 9. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2y - 4, \\ y = 3. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2, \\ y = 3. \end{cases} \Rightarrow M(2; 3)$$



Для вычисления искомой площади разобьем треугольник  $AMC$  на два треугольника  $AMN$  и  $NMC$ , так как при изменении  $x$  от  $A$  до  $N$  площадь ограничена прямой  $x - 2y + 4 = 0$ , а при изменении  $x$  от  $N$  до  $C$  — прямой  $x + y - 5 = 0$ .

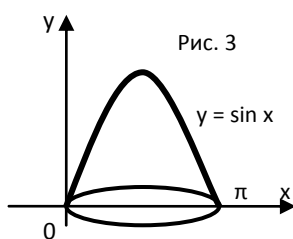
Для треугольника  $AMN$  имеем:  $x - 2y + 4 = 0$ ;  $y = 0,5x + 2$ , т.е.  $f(x) = 0,5x + 2$ ,  $a = -4$ ,  $b = 2$ . Для треугольника  $NMC$  имеем:  $x + y - 5 = 0$ ,  $y = 5 - x$ , т.е.

$$f(x) = 5 - x, a = 2, b = 5.$$

$$S = S_1 + S_2 = \int_{-4}^2 (0,5x + 2) dx + \int_2^5 (5 - x) dx = \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} + 2x \right) \Big|_{-4}^2 + \left( 5x - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_2^5 = \left( \left( \frac{2^2}{4} + 2 \cdot 2 \right) - \left( \frac{(-4)^2}{4} + 2 \cdot (-4) \right) \right) + \left( \left( 5 \cdot 5 - \frac{5^2}{2} \right) - \left( 5 \cdot 2 - \frac{2^2}{2} \right) \right) = (1 + 4 - 4 + 8) + (25 - 12,5 - 10 + 2) = 9 + 4,5 = 13,5$$

Ответ.  $S = 13,5$  кв. ед.

3. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси  $Ox$  фигуры, ограниченной осью  $Ox$  и полувольной синусоиды  $y = \sin x$  ( $0 \leq x \leq \pi$ ).



**Решение.** Выполним построение. По формуле  $V = \pi \int_a^b y^2 dx$ ,

получим

$$V = \pi \int_0^{\pi} \sin^2 x dx = \pi \int_0^{\pi} \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \frac{\pi}{2} \left( x - \frac{\sin 2x}{2} \right) \Big|_0^{\pi} = \frac{\pi}{2} \left( \pi - \frac{\sin 2\pi}{2} \right) - \frac{\pi}{2} \left( 0 - \frac{\sin 0}{2} \right) = \frac{\pi}{2} \cdot \pi - \frac{\pi}{2} \cdot 0 = \frac{\pi^2}{2}$$

Ответ:  $V = \frac{\pi^2}{2}$  (куб. ед.)

**Выполнить задания:**

В задачах 1 – 4 найти площадь плоской фигуры, ограниченной линиями:

- 1)  $x - y + 2 = 0$ ,  $y = 0$ ,  $x = -1$ ,  $x = 2$ .
- 2)  $x - y + 3 = 0$ ,  $x + y - 1 = 0$ ,  $y = 0$ .
- 3)  $y = x^2$ ,  $y = 0$ ,  $x = 0$ ,  $x = 3$ .
- 4)  $y = \cos x$ ,  $y = 0$ ,  $x = 0$ ,  $x = \pi/2$ .

В задачах 5 – 8 найти объемы тел вращения, образованных вращением вокруг оси  $Ox$  площадей, ограниченных линиями:

- 5)  $y^2 - 4x = 0$ ,  $x - 2 = 0$ ,  $x - 4 = 0$ ,  $y = 0$ .
- 6)  $y^2 - x + 1 = 0$ ,  $x - 2 = 0$ ,  $y = 0$ .
- 7)  $y = -x^2 + 2x$ ,  $y = 0$ .
- 8)  $y^2 = 2x$ ,  $x - 2 = 0$ .

**Самостоятельная работа**

## Приближенные методы вычисления определенного интеграла

Цель: Знать метод прямоугольников и метод трапеций вычисления определенного интеграла. Уметь пользоваться формулами прямоугольников и трапеций при нахождении приближенного значения определенного интеграла.

Ответьте на контрольные вопросы

1. Какое действие называется интегрированием?
2. Что называется первообразной функции?
3. Дайте определение неопределенного интеграла.
4. Как проверить результат интегрирования?
5. Сформулируйте основные свойства неопределенного интеграла.
6. Напишите формулу Ньютона-Лейбница и объясните ее смысл.
7. Сформулируйте основные свойства определенного интеграла.
8. Объясните геометрический смысл определенного интеграла.

1. Подготовка презентаций по использованию производной и интеграла.

- «Физический смысл производной. Решение физических задач с применением производной»
- «Исследование функций с помощью производной»
- «Применение производной при решении задач на нахождение наибольшего и наименьшего значений»
- «Использование интеграла для вычисления площадей фигур»
- «Использование интеграла для нахождения объемов тел вращения»

### Самостоятельная работа

#### Решение экономических задач Предельный анализ экономических процессов

**Цель:** Отработать приемы применения знаний, умений и навыков при решении прикладных задач

**1.** Функция издержек производства продукции некоторой фирмой имеет вид:  $y(x)=0,1x^3-1,2x^2+5x+250$  (ден.ед). найти средние и предельные издержки производства и вычислить их значение при  $x=10$ .

Решение. Найдем производную  $y'(x)$  и ее значение  $y'(10)$  – предельные издержки производства:

$$y'(x)=0,3x^2-2,4x+5; y'(10)=30-24+5=11.$$

Средние издержки:

$$y_1(x)=\frac{0,1x^3-1,2x^2+5x+250}{x}=0,1x^2-1,2x+5+\frac{250}{x};$$

$$y_1(10)=10-12+5+25=28$$

Это означает, что при данном уровне производства средние затраты на производство одной единицы продукции составляют 28 ден.ед., а увеличение объема на одну единицу продукции обойдется фирме приблизительно в 11 ден.ед.

**2.** Функция потребления некоторой страны имеет вид  $C(x)=15+0,25x+0,36x^{4/3}$ , где  $x$  – совокупный национальный доход (ден.ед.). Найти: а) предельную склонность к потреблению; б) предельную склонность к сбережению, если национальный доход составляет 27 ден.ед.

Решение. Предельная склонность к потреблению:

$C'(x)=0,25+0,48x^{1/3}$ ; ее значение:  $C'(27)=0,25+0,48*^3\sqrt{27}=1,69$ .

Предельная склонность к сбережению:

$S'(x)=1-C'(x)=0,75-0,48x^{1/3}$ ; ее значение:  $S'(27)=1-1,69=-0,69$ .

**3.** Объем производства зимней обуви  $u$ , выпускаемой некоторой фирмой, может быть описан уравнением  $u=\frac{1}{3}t^3 - \frac{7}{2}t^2+6t+2100$  (ед.), где  $t$  – календарный месяц года. Вычислить производительность труда, скорость и темп ее изменения: а) в начале года ( $t=0$ ); б) в середине года ( $t=6$ ); в) в конце года ( $t=12$ ).

**4.** Функция спроса  $q=\frac{3p+14}{p+3}$  и предложения  $s=p+2$ , где  $q$  и  $s$  – количество товара, соответственно покупаемого и предлагаемого на продажу в единицу времени,  $p$  – цена единицы товара. Найти: а) равновесную цену, т.е. цену, при которой спрос и предложение уравниваются; б) эластичность спроса и предложения; в) изменение дохода при увеличении цены на 10% от равновесной.

Решение: а) Равновесная цена определяется из условия  $q=s$ , т.е.

$\frac{3p+14}{p+3}=p+2$ , откуда  $p=2$ , т.е. равновесная цена равна 2 ден.ед.

б) найдем эластичности по спросу и предложению по формуле(5):

$$E_p(q) = - \frac{5p}{(p+3)(3p+14)}$$

$$E_p(s) = \frac{p}{p+2}$$

Для равновесной цены  $p=2$  имеем  $E_p(q)=-0,1$ ;  $E_p(s)=0,5$ .

Т.к. полученные значения эластичности меньше 1, то спрос и предложение данного товара при равновесной цене неэластичны относительно цены. Это значит, что изменение цены не приведет к резкому изменению спроса и предложения.

в) При увеличении цены  $p$  на 10% от равновесной спрос уменьшается на  $0,1*10=1\%$ , следовательно, доход  $pq$  возрастет приблизительно на 9%.

**5.** Зависимость между спросом  $q$  и ценой  $p$  за единицу продукции, выпускаемой некоторым предприятием, дается соотношением  $q=18-\sqrt{p}$ . Найти эластичность спроса. Выяснить, при каких значениях цены спрос является эластичным, нейтральным и неэластичным. Какие рекомендации о цене за единицу продукции можно дать руководителям предприятия при  $p=100$   $p=150$  ден.ед.?

Решение: Эластичность спроса по формуле есть

$$E_p(q) = \frac{p}{18-\sqrt{p}} (18-\sqrt{p})' = -\frac{\frac{1}{2}\sqrt{p}}{2(18-\sqrt{p})}$$

Спрос нейтрален, если  $|E_p(q)|=1$ . Решая это уравнение, имеем  $p=144$ . Далее, принимая во внимание, что  $p > 0$  и  $q > 0$  (т.е.  $p < 324$ ), получим, что если  $0 < p < 144$  – спрос является неэластичным; при  $144 < p < 324$  – спрос эластичен.

Рекомендации. Если цена единицы продукции составляет 100 ден.ед., то спрос является неэластичным и можно повысить цену продукции, выручка при этом будет расти. При стоимости продукции 150 ден.ед. спрос является эластичным. В данном случае целесообразно рассмотреть предложение о снижении цены, выручка от реализации будет рати в результате увеличения спроса на продукцию.

**6.** Задана функция  $y=f(x)$  полных затрат предприятия на производство  $x$  единиц продукции. Определить связь между коэффициентом эластичности полных и средних затрат.

Решение. Средние затраты на единицу продукции равны:  $y_l = \frac{y}{x}$ .

По формуле (5) коэффициенты эластичности полных и средних затрат равны:  $E_x(y) = \frac{x}{y} * y'$ ;

$$E_x(y) = \frac{x}{y} * y' = x \frac{y'}{y} = \frac{x^2 xy' - y}{x^2} = \frac{x}{y} y' - 1 = E_x(y) - 1,$$

т.е. коэффициент эластичности средних затрат на единицу меньше коэффициента эластичности полных затрат.

**Решите самостоятельно:**

**7.** Зависимость между издержками производства  $y$  и объемом выпускаемой продукции  $x$  на предприятии выражается функцией  $y = 50x - 0,05x^3$ . Определить средние и предельные издержки при объеме продукции 10 ед.

**8.** Выручка от продажи конфет составляет  $p = 100x - 0,5x^2$ , где  $x$  – объем проданной продукции (тыс. ед.). найти среднюю и предельную выручку, если продано: а) 10 тыс. ед.; б) 60 тыс. ед.

**9.** Функция издержек производства  $y$  от объема выпускаемой продукции  $x$  имеет вид  $y = 100x - 0,2x^3$ . Определить средние и предельные издержки при объеме продукции 10 ед.

**10.** Себестоимость продукции  $y$  связана с объемом выпускаемой продукции  $x$  уравнением:  $y = 6 \ln(1 + 3x)$ . Определить среднюю и предельную себестоимость выпускаемой продукции при объеме, равном 10 ед.

**11.** Производительность труда бригады может быть описана уравнением  $y = -2,5t^2 + 15t + 100$ , где  $0 \leq t \leq 8$  – рабочее время в часах. Вычислить скорость и темп изменения производительности труда при  $t=2$  и  $t=7$ .

**12.** Себестоимость производства телевизоров  $y$  (в тыс. руб.) описывается функцией  $y = 0,01x^2 - 0,5x + 12$ ,  $5 \leq x \leq 50$ , где  $x$  – объем выпускаемой продукции в месяц (тыс. ед.). Определить скорость и темп изменения себестоимости при выпуске 20 и 40 тыс. ед. продукции.

**13.** Функция потребления некоторой страны имеет вид:  $C(x) = 13 + 0,25x + 0,37x^{4/5}$ , где  $x$  – совокупный национальный доход. Найти: а) предельную склонность к потреблению; б) предельную склонность к сбережению, если национальный доход составляет 32.

**14.** Функция сбережения некоторой страны имеет вид:  $S(x) = 25 - 0,53x - 0,41x^{2/3}$ , где  $x$  – совокупный национальный доход. Найти: а) предельную склонность к потреблению; б) предельную склонность к сбережению, если национальный доход составляет 27.

**15.** Зависимость между себестоимостью готовой продукции предприятия  $y$  (млн. руб.) и объемом выпускаемых изделий  $x$  (тыс. шт.) выражается уравнением  $y = \sqrt{x+4} - 2$ . Найти эластичность себестоимости продукции предприятия, выпускающего 12 тыс. шт. изделий. Какие рекомендации можно дать руководителям предприятий об изменении величины объема выпускаемой продукции?

**16.** Функция полных затрат в зависимости от объема выпускаемой продукции задана соотношением:  $y = x^3 - 2x^2 + 96$ . При каком объеме производства предельные и средние затраты совпадают? Найти коэффициенты эластичности полных и средних затрат при данном объеме.

**17.** Зависимость между объемом выпуска готовой продукции  $y$  (млн. руб.) и объемом производственных фондов  $x$  (тыс. шт.) выражается уравнением  $y = 0,6x - 4$ . Найти эластичность выпуска продукции для предприятия, имеющего фонды в размере 40 млн. руб.

**18.** Зависимость между себестоимостью единицы продукции предприятия  $y$  (руб.) и выпуском продукции  $x$  (млн. руб.) выражается уравнением  $y = -0,5x + 80$ . Найти эластичность себестоимости при выпуске продукции на 30 млн. руб.

**19.** Зависимость между количеством выпускаемых деталей в партии  $x$  (тыс. ед.) и затратами на изготовление  $y$  (тыс. руб.) для предприятий отрасли выражается уравнением

$y = \frac{27}{x} + 6$ . Найти эластичность затрат для предприятий, выпускающих по 10 тыс. деталей в партии.

**20.** Найти эластичность функции спроса при заданной стоимости  $p$ : а)  $q + 10p = 50$ ; б)  $5q + 3p = 10$ ; в)  $p^2 + p + 4q = 26$ ;  $p=2$  и  $p=4$ .

**21.** Для следующих функций спроса найти значение  $p$ , при которых спрос является эластичным:

а)  $2p + 3q = 12$ ; б)  $q = 50(15 - \sqrt{p})$ ; в)  $q = \sqrt[3]{3600 - p^2}$ .

**22.** Заданы функции спроса  $q$  и предложения  $s$  от цены  $x$ :  $q = 10 - x, s = 3x - 6$ . Найти: а) равновесную цену; б) эластичность спроса и предложения для равновесной цены; в) изменение дохода при изменении равновесной цены на 5 %.

**23.** Функция спроса  $q$  и предложения  $s$  на некоторый товар от его цены  $x$  задаются уравнениями:  $q = \frac{2x+15}{x+5}, s = \frac{3x+15}{x+10}$ . Найти:

а) равновесную цену; б) эластичность спроса и предложения для равновесной цены; в) изменение дохода при изменении равновесной цены на 5 %.

**24.** Зависимость потребления  $y$  от дохода  $x$  задается функцией  $y = \frac{ax}{x+b}$ . Показать, что эластичность функции потребления от дохода не зависит от параметра  $a$  и стремится к нулю при ограниченном возрастании дохода.

### Условия итоговой домашней контрольной работы для очной формы обучения и заочной формы обучения.

**Задание 1** Построить график функции (а) способом сдвига и деформации графика функции (б). Найти область определения и значения функции (а) :

**1в.** а)  $y = -2\cos(x + 3)$ ; б)  $y = \cos x$ ;

**Задание 2** Найдите пределы функций, не пользуясь правилом Лопиталья:

**1в.** а)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 - 4x + 2}{4 + 2x^2 - 5x^3}$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{2x^2 + 5x - 3}{x^2 - 9}$ ;

г)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos^2 x}{3x \sin x}$ ; д)  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - 3x)^{\frac{2+x}{x}}$

**Задание 3** Найти точки разрыва функции  $f(x)$  и установить их характер. Указать односторонние пределы в точках разрыва. Построить график функции:

$\mathbf{1 в} \quad f(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & x < 0 \\ 1, & 0 \leq x \leq 3, \\ x, & x > 3 \end{cases}$	$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \frac{x^2}{25}, & 0 \leq x < 5, \\ 1, & x > 5 \end{cases}$
---	---

**Задание 4** Найти производные  $\frac{dy}{dx}$  первого порядка данных функций:

$\mathbf{1 в} \quad y = 2\sqrt{4x+3} - \frac{3}{\sqrt{x^3+x+1}}$	$y = \sin^4 \frac{x}{4}$	$y = 4^{-x} \ln x - \ln 2$
$y = 1/2tg^2 x + \ln \cos x$	$y = x^{\ln x}$	$(e^x - 1)(e^y - 1) - 1 = 0$

**Задание 5** Построить график функции  $y=f(x)$ , используя общую схему исследования функции.

$$1в \text{ а) } y = x^3 + 12x^2 + 45x + 50$$

**Задание 6** Исследовать на экстремум функцию  $z = f(x_1, y_1)$ :

$$1в \text{ } z = 2x - 8y - x^2 - y^2 - 9$$

**Задание 7** Выполните действия в алгебраической форме. Результаты запишите в тригонометрической и показательной формах:

$$1в \frac{1+i}{1-2i} - \left( \frac{4}{5} - \frac{2}{5}i \right) \quad \frac{(1-3i)(1+3i)}{-3-i} - 2i^{19}$$

**Условие итоговой домашней контрольной работы для очной формы обучения и заочной формы обучения. 2 семестр**

**Задание 1** Найти неопределенные интегралы. Правильность полученных результатов проверить дифференцированием:

$$1в \int (2x^3 + 5x^2 - 7x - 3) dx; \quad \int \sin 4xe \, dx \quad \int \frac{\ln 2x}{x^5} dx$$

**Задание 2** Найти неопределенные интегралы

$$1в \int \frac{\cos x dx}{1 + \cos x} \quad \int \frac{x^3 + 1}{x^2 - 3x + 2} dx \quad \int \frac{dx}{\sqrt{4x^2 - 6x - 3}}$$

**Задание 3** Вычислить определенный интеграл

$$1в \int_0^2 (3x^2 - 1) dx \quad \int_{25}^{49} \frac{\sqrt{x} dx}{x - 6} \quad \int_0^1 x * e^{-2x} dx$$

**Задание 4** Вычислить несобственный интеграл или определить его расходимость.

$$1в \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 - 4x + 13}$$
$$\int_0^{\infty} \frac{1}{x^2 + 2x + 5} dx$$

**Задание 5** Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями /площадь области D/:

$$1в D: \begin{cases} y = \sqrt{x}, & y = 0 \\ x = 1, & x = 4 \end{cases}$$

**Задание 6** Найти частное решение дифференциального уравнения.

$$1в \text{ } y'' - 5y' + 6y = (12x - 7)e^{-x}, \quad y(0) = y'(0) = 0$$

**Задание 7** а) Исследовать на сходимость с помощью признака Даламбера знакоположительный ряд;

- б) Исследовать на сходимость с помощью признака Лейбница знакочередующий ряд;  
 в) Найти радиус сходимости степенного ряда и область сходимости степенного ряда.

$1в а) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2}$	$1в б) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2}{n+2}$	$1в в) \sum_{n=1}^{\infty} n x^n$
$10в а) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2^n}$	$10в б) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n^2+3}$	$10в в) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{5^n} x^n$

**Задание 8** Вычислить определенный интеграл с точностью до  $\varepsilon = 10^{-3}$ , разложив подынтегральную функцию в степенной ряд и затем почленно проинтегрировав.

$$1в \quad \int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx \quad \int_0^{1/\sqrt{3}} x^2 \arctg x dx$$

### Варианты вопросов к контролю знаний

#### I семестр

1. Понятие множества.
2. Постоянные и переменные величины. Определение функции. Область определения функции. Способы задания.
3. Понятие функции. Основные свойства функции
4. Элементарные функции. Классификация функций. Преобразование графиков.
5. Числовые последовательности. Классификация последовательностей
6. Предел числовой последовательности. Основные теоремы о пределах последовательности.
7. Предел функции в точке. Односторонние пределы функции в точке.
8. Бесконечно большие и бесконечно малые величины. Связь между бесконечно малыми и бесконечно большими величинами.
9. Предел функции в бесконечности.
10. Основные теоремы о пределах функции.
11. Первые и второй замечательные пределы.
12. Раскрытие неопределенностей вида  $0/0, \infty/\infty, 0*\infty, \infty-\infty, 0^0, 1^\infty, \infty^0$ .
13. Непрерывность функции в точке и на интервале. Точки разрыва функции.
14. Комплексные числа Исходные определения. Геометрическое изображение комплексных чисел. Комплексная плоскость.
15. Основные действия над комплексными числами.
16. Возведение комплексного числа в степень.
17. Извлечение корня из комплексного числа.
18. Показательная и тригонометрическая формы комплексного числа.
19. Задачи, приводящие к понятию производной. Производная функции: ее геометрический и механический смысл.
20. Производная сложной функции. Производная обратной функции. Производная функции, заданной неявно.
21. Производная степенно-показательной функции. Производная функции заданной параметрически.
22. Производные высших порядков. Механический смысл производной второго порядка.
23. Дифференциал функции: его геометрический смысл.
24. Основные теоремы дифференциального исчисления (теорема Ферма).
25. Основные теоремы дифференциального исчисления (теорема Ролля).
26. Основные теоремы дифференциального исчисления (теорема Лагранжа).
27. Правило Лопиталья (применение производной к вычислению пределов).
28. Возрастание и убывание функций. Экстремумы функций

29. Наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке.
30. Выпуклость функции. Точки перегиба.
31. Асимптоты графика функции.
32. Общая схема исследования функций и построения их графиков.
33. Множества в  $n$ -мерном пространстве.
34. Функции нескольких переменных. Геометрическое изображение функции двух переменных.
35. Предел и непрерывность функции нескольких переменных. Свойства непрерывных функций.
36. Дифференцируемость функции нескольких переменных.
37. Частные производные функции нескольких переменных.
38. Дифференциал функции нескольких переменных.
39. Дифференцирование неявных и сложных функций.
40. Производная по направлению Градиент.
41. Частные производные и дифференциалы высших порядков.
42. Экстремумы функции двух переменных.
43. Наибольшее и наименьшее значение функции нескольких переменных.

## II семестр

44. Неопределенный интеграл, его свойства.
45. Таблица основных интегралов.
46. Интегрирование заменой переменной.
47. Интегрирование по частям.
48. Интегрирование рациональных дробей.
49. Интегрирование тригонометрических функций:  $\int R(\sin x, \cos x)dx$
50. Интегрирование некоторых видов иррациональностей:  $\int R(x, \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}})dx$ ,  
 $\int R(x, \sqrt[m]{ax^2+bx+c})dx$
51. Определенный интеграл, его свойства. Криволинейная трапеция.
52. Формула Ньютона – Лейбница.
53. Вычисление определенных интегралов способом подстановки и по частям.
54. Приближенное вычисление определенных интегралов.
55. Геометрические приложения определенного интеграла: вычисление площадей фигур, объемов тел.
56. Несобственные интегралы с бесконечными пределами интегрирования.
57. Несобственные интегралы от неограниченных функций.
58. Несобственные интегралы от разрывных функций.
59. Дифференциальные уравнения (общие понятия). Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям.
60. Дифференциальные уравнения первого порядка (общие понятия). Изоклины.
61. Теорема существования и единственности решения задачи Коши.
62. Задачи Коши.
63. Дифференциальные уравнения с разделяющимися и разделенными переменными.
64. Однородные дифференциальные уравнения первого порядка.
65. Дифференциальные уравнения, приводящиеся к однородным.
66. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка.
67. Уравнение Бернулли.
68. Дифференциальные уравнения высших порядков (общие понятия). Задача Коши.
69. Понятия о краевых задачах для дифференциальных уравнений. Уравнения, допускающие понижение порядка.



70. Теорема о существовании и единственности решения дифференциального уравнения  $n$ -го порядка.
71. Дифференциальные уравнения вида  $y^{(n)} = f(x)$ .
72. Дифференциальные уравнения второго порядка, приводимые к уравнению первого порядка.
73. Однородные линейные уравнения (определения и общие свойства).
74. Однородные линейные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.
75. Неоднородные линейные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.
76. Понятие числового ряда. Сумма ряда, частичная сумма, остаток ряда,
77. Сходимость и расходимость числового ряда.
78. Необходимые условия сходимости. Свойства сходящихся рядов.
79. Признаки сравнения рядов. Эталонные ряды.
80. Ряды с положительными членами. Признак Даламбера и Коши.
81. Интегральный признак Коши - Маклорена.
82. Знакопередающиеся ряды. Признак Лейбница.
83. Абсолютная и условная сходимость.
84. Ряды с комплексными членами.
85. Функциональные ряды. Степенные ряды. Теорема Абеля.
86. Радиус сходимости. Интервал сходимости. Область сходимости.
87. Приложение степенных рядов к приближенным вычислениям.
88. Ряды Тейлора и Маклорена.
89. Разложение в степенной ряд элементарных функций.

### **3 Учебно-методическое обеспечение дисциплины**

#### **Основная литература**

- Высшая математика для экономистов : учебник [Электронный ресурс] / Н.Ш. Кремер, Б.А. Путко, И.М. Тришин, М.Н. Фридман ; ред. Н.Ш. Кремер. - 3-е изд. - Москва : Юнити-Дана, 2015. - 482 с. : граф. - («Золотой фонд российских учебников»). - ISBN 978-5-238-00991-9; - Режим доступа: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=114541>
- Кудрявцев, Л.Д. Краткий курс математического анализа : учебник : в 2-х т. [Электронный ресурс]. / Л.Д. Кудрявцев. - 3-е изд., перераб. - Москва : Физматлит, 2009. - Т. 1. Дифференциальное и интегральное исчисления функций одной переменной. Ряды. - 400 с. - ISBN 978-5-9221-0184-4; - Режим доступа: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=82814>
- Кузнецов, Б.Т. Математика : учебник [Электронный ресурс]. / Б.Т. Кузнецов. - 2-е изд., перераб. и доп. - Москва : Юнити-Дана, 2015. - 719 с. : ил., табл., граф. - (Высшее профессиональное образование: Экономика и управление). - Библиогр. в кн. - ISBN 5-238-00754-X ;  
- Режим доступа: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=114717>

#### **Дополнительная литература**

- Ганиев, В.С. Математический анализ : учебное пособие [Электронный ресурс]. / В.С. Ганиев ; Министерство образования и науки РФ, Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Самарский государственный архитектурно-строительный университет». - Самара : Самарский государственный архитектурно-строительный университет, 2013. - Ч. 1. - 172 с. : ил. - Библиогр. в кн. - ISBN 978-5-9585-0487-9 ; - Режим доступа: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=256106>

– Асланов, Р.М. Математический анализ: краткий курс : учебное пособие для студентов высших учебных заведений [Электронный ресурс]./ Р.М. Асланов, О.В. Ли, Т.Р. Мурадов ; Министерство образования и науки Российской Федерации, ФГБОУ ВПО Московский педагогический государственный университет, Международная академия наук педагогического образования. - Москва : Прометей, 2014. - 284 с. : схем., ил., табл. - Библиогр. в кн. - ISBN 978-5-99058886-5-3 ; - Режим доступа: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=426687>

– Шевалдина, О.Я. Начала математического анализа : учебное пособие [Электронный ресурс]. / О.Я. Шевалдина, Е.В. Стрелкова ; науч. ред. В.Т. Шевалдин ; Министерство образования и науки Российской Федерации, Уральский федеральный университет им. первого Президента России Б. Н. Ельцина. - Екатеринбург : Издательство Уральского университета, 2014. - 100 с. - Библиогр. в кн. - ISBN 978-5-7996-1191-0 ;

Режим доступа: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=276483>

– Тер-Крикоров, А.М. Курс математического анализа : учебное пособие [Электронный ресурс]. / А.М. Тер-Крикоров, М.И. Шабунин. - 6-е изд. (эл.). - Москва : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2015. - 675 с. - ISBN 978-5-9963-2987-8 ;

Режим доступа: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=120555>

– Чуешева, Н.А. Введение в математический анализ : учебное пособие [Электронный ресурс]. / Н.А. Чуешева ; Министерство образования и науки РФ, Кемеровский государственный университет. - Кемерово : Кемеровский государственный университет, 2015. - 112 с. : схем. - Библиогр. в кн. - ISBN 978-5-8353-1672-4 ;

Режим доступа: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=481496>

### **Периодические издания**

– Высшее образование в России: журнал. – Москва : Московский госуд. Университет печати им. И. Федорова, 2015

– Высшее образование сегодня: журнал. – Москва : Логос, 2015

– Экономист: журнал. – Москва : Издательство Экономист, 2015

### **Интернет-ресурсы**

– <http://www.biblioclub.ru> – ЭБС «Университетская библиотека он-лайн» » / (принадлежность Общество с ограниченной ответственностью «НексМедиа»).

– <http://e.lanbook.com/> – ЭБС «Лань» (принадлежность (Общество с ограниченной ответственностью «ЭБС ЛАНЬ»))

– <http://rucont.ru/> – ЭБС Руконт (принадлежность ООО Центральный коллектор библиотек «БИБКОМ», ООО «Агентство «Книга-Сервис»).

– Научная электронная библиотека eLIBRARY <http://elibrary.ru/defaultx.asp> Режим свободного доступа

#### **Ресурс свободного доступа:**

– <http://www.vilenin.narod.ru/Books/Books.htm> – Математическая библиотека

– <http://www.exponenta.ru> – «Образовательный математический сайт Exponenta.ru».

– <http://www.matclub.ru> – Лекции, примеры решения задач, интегралы и производные, дифференцирование, ТФКП, Электронные учебники. Типовой расчет из задачника Кузнецова.

<http://www.mathelp.spb.ru> – «Высшая математика» (помощь студентам) – Лекции, электронные учебники, решение контрольных работ.