МИНОБРНАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Бузулукский гуманитарно-технологический институт
(филиал) федерального государственного бюджетного образовательного
учреждения высшего профессионального образования
«Оренбургский государственный университет»

Кафедра физики, информатики и математики

Математическая логика
Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

Направление подготовки
Педагогическое образование
(код и наименование направления подготовки)

Профиль подготовки
Информатика
(наименование профиля подготовки)

Квалификация выпускника
бакалавр

Год набора 2015

УДК51
ББК 22.1я73
С 79

Основы математической обработки информации: Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины / сост. О.А. Степунина. – Бузулук: БГТИ (филиал) ОГУ, 2015 – 92 с.

Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины «Математическая логика» предназначены для студентов, обучающихся в высших учебных заведениях по направлению подготовки 44.03.01 Педагогическое образование (профиль Информатика).

УДК51
ББК 22.1я73
С 79

Оглавление

Пояснительная записка

Дисциплина «Математическая логика» относится к обязательным дисциплинам вариативной части блока 1 .

Данная дисциплина является теоретической базой для изучения целого ряда дисциплин: Дискретная математика, Теория алгоритмов, Конечные автоматы и логические сети, Основы искусственного интеллекта, Интеллектуальные информационные системы и сети.

Поэтому главной целью данной дисциплины является овладение студентами теоретическими знаниями в области формализации математического языка, аксиоматическим методом построения математических теорий, его основными частями: языком, аксиомами, правилами вывода; проблемами непротиворечивости, полноты, разрешимости теорий.

1. Виды аудиторной и внеаудиторной самостоятельной работы студентов по дисциплине

Общая трудоемкость дисциплины составляет 3 зачетных единицы (108 академических часов).

Аудиторная работа предусматривает 4 часа лекционных занятий, 6 часов практических занятий.

Промежуточная аттестация проводится в форме зачета.

На самостоятельную работу отводится 97,5 часа. Самостоятельная работа предусматривает самостоятельное изучение вопросов по разделам, самоподготовку к практическим занятиям и зачету.

Контроль результатов самостоятельной работы проходит в письменной форме с представлением обучающимися отчетов о своей деятельности в виде контрольной работы.

Аттестация по дисциплине проходит в форме зачета.

2. Методические рекомендации студентам

2.1 Методические рекомендации по изучению теоретических основ дисциплины

Лекция одна из важных и основных форм обучения и разновидностей информации. Лекция закладывает основы научных знаний, подводит теоретическую базу под изучаемую науку, знакомит студентов с методологией исследования, служит отправным пунктом и указывает направления работы по всем остальным формам и методам учебных занятий. Лекция является экономным по времени способом сообщения значительного объема информации, не умоляя значения других источников учебной информации. Следует заметить, что у лектора есть возможность постоянно улучшать и обновлять содержание лекций. Это делает «живую лекцию» весьма полезной и незаменимой в учебном процессе.

Так, например, в отличие от учебника лекция:

- дает непосредственное общение с лектором;
- представляет разные точки зрения;
- концентрирует внимание обучающихся на наиболее сложных узловых вопросах учебного курса;
- не перезагружена большим объемом справочной и статистической информации, фактическим материалом;
- способствует установлению живой связи студентов с наукой.

Усвоение учебной информации на лекции принципиально важно для последующего усвоения материала. Поэтому для студента очень важно научиться культуре ведения лекционных записей. Конспект лекций полезен тогда, когда изначально ориентирован на одновременную со слушанием лекции мыслительную переработку материала, на выделение и фиксацию в тезисной, аргументированной форме главного содержания лекции.

РЕКОМЕНДАЦИИ ПО РАБОТЕ НА ЛЕКЦИОННЫХ ЗАНЯТИЯХ

1. Обратить внимание на то, как строится лекция. Она состоит, в основном из:

- вводной части, в которой актуализируется сущность вопроса, идет подготовка к восприятию основного учебного материала;
- основной части, где излагается суть рассматриваемой проблемы;
- заключения, где делаются выводы и даются рекомендации, практические советы.

2. Настроиться на лекцию. Настрой предполагает подготовку, которую рекомендует преподаватель. Например, самостоятельно найти ответ на вопрос домашнего задания, читая раздел рекомендуемого литературного источника и выявить суть рассматриваемых положений. Благодаря такой подготовке возникнут вопросы, которые можно будет выяснить на лекции. Кроме того, соответствующая подготовка к лекции облегчает усвоение нового материала, заранее ориентируя на узловые моменты изучаемой темы. Важна и самоподготовка к лекции через стимулирование чувства интереса, желания узнать новое.

3. Всегда записывайте название и номер лекции. Если лектор говорит план лекции и её каркас, то также стоит записать.

4. Каждый студент должен иметь тетрадь для записей лекций, ручку и набор фломастеров, с помощью которых он фиксирует основные положения лекции и делает схемы. В тетради для записей лекции рекомендуется выделить поля, где можно делать различные пометки в виде вопросов, дополнительного материала, формулировать содержание неизвестных понятий и т.п. Работая над текстом конспекта лекции после занятия, поля можно использовать для уточнения и иллюстрации лекционных записей.

5. Отключить до начала лекции мобильный телефон (или поставить его в бесшумный режим), чтобы случайный звонок не отвлекал преподавателя и других студентов.

6. Слушать лекцию внимательно и сосредоточенно. Не отвлекаться. Ваше внимание должно быть устойчивым. В противном случае есть риск не усвоить именно главные положения темы, оставить за кадром вопросы, которые осложнять учебу в дальнейшем.

7. Если Вы в чем-то не согласны (или не понимаете) с преподавателем, то совсем не обязательно тут же перебивать его и, тем более, высказывать свои представления, даже если они и кажутся Вам верными. Перебивание преподавателя на полуслове – это верный признак невоспитанности. А вопросы следует задавать либо после занятий (для этого их надо кратко записать, чтобы не забыть), либо выбрав момент, когда преподаватель сделал хотя бы небольшую паузу, и обязательно извинившись.

8. Помнить, что лекцию лучше конспектировать, независимо есть тема в учебнике или ее нет. Научитесь правильно составлять конспект лекции.

Конспектирование – сложный и своеобразный вид учебной деятельности. В нем сочетаются процессы восприятия устной речи, переработки услышанного, записи информации и массовой коммуникации. И эти процессы не являются механическими.

Первый этап работы на лекции – аудирование, т.е. прослушивание и восприятие речи. Известным специалистом по высшей нервной деятельности человека Н.П. Бехтеревой было установлено, что головной мозг в каждый отдельный момент может быть занят только одной вполне определенной деятельностью. Вот почему наиболее полное восприятие лекционной речи возможно при максимальной сосредоточенности. Разговоры и посторонние занятия во время лекции снижают ваше внимание и качество восприятия информации. Переспрашивание у соседа отвлекает как ваше внимание от восприятия речи лектора, так и внимание соседа и мешает ему воспринимать информацию.

Второй этап работы на лекции – анализ и переформулировка текста. Важно знать, что осознание сказанного происходит в промежутках между произнесенными словами, т.е. тогда, когда мозг не занят восприятием информации. Паузы, которые делает лектор, предназначаются для осмысления сообщенного, поэтому не пытайтесь в этот момент общаться с соседями.

Воспринятые сведения подвергаются в головном мозге анализу. Мозг сопоставляет услышанную информацию с той, которая хранится в личном банке памяти.

Затем внимание переключается на переработку текста. Ваш мозг старается отбросить ненужную для него информацию и сократить ее объем. Происходит переформулировка мысли заново и ее сворачивание, В этот момент осуществляется внутреннее проговаривание – вы формулируете собственную мысль вслед за лекторской. Если в вашем банке памяти нет информации, сопоставимой с той, которую вы слышите на лекции, то вам приходится заимствовать ее из речи лектора целиком без переработки.

Во время микропауз, возникающих между словами при внутреннем проговаривании, вы вновь воспринимаете произнесенные лектором слова и сохраняете их в кратковременной памяти.

Таким образом, процессы второго этапа наиболее сложные и важные, для их осуществления отведены незначительные промежутки времени, они должны произойти в определенной последовательности. Но обратите внимание, что с некоторого момента на них накладываются процессы первого этапа – прослушивание и прием новой информации, их надо осуществить тогда, когда мозг не работает – в промежутках между внутренней речью. Значит, на лекции два говорящих: вслух – лектор и «про себя» – конспектирующий. Их речи должны постоянно сопрягаться. При этом мозг слушающего находится в состоянии чрезвычайной нагрузки.

Третий этап работы на лекции – процесс записи переформулированного текста. В ходе мыслительной переработки ваш мозг выбирает способ записи преобразованной информации (план, опорные слова или фразы, подробная запись, граф-схема). Если в вашем арсенале памяти нет алгоритмов составления планов или создания граф-схем, то вы вынуждены записывать мысль полностью.

Однако это вовсе не означает, что вы фиксируете все слова целиком. Большинство из вас прибегает к сокращению слов. Причем каждый сокращает одни и те же слова по-своему. Тем не менее, существуют общепринятые приемы сокращения слов, которые основаны на правилах русского языка.

Использование чужого конспекта – малоэффективное занятие.

Теперь уже понятно, что конспект является результатом сложного аналитико-синтетического процесса – приема, переработки и записи лекторской речи. Мы по-разному записываем известную ранее информацию и совершенно новую для нас: наиболее новую информацию мы записываем подробнее, а уже известную – более кратко. В любом случае мы стремимся записать информацию таким образом, чтобы она составляла единое целое с информацией в нашем банке памяти. Однако не исключено, что новые сведения могут восприниматься и перерабатываться нами неверно из-за непонимания сказанного или недостатка времени. Делая запись в тетради, мы используем собственные приемы сокращений и принципы свертывания информации. Информация может быть свернута до опорных слов, плана, граф-схем или иным способом.

Одноклассник, заимствующий ваш конспект, воспринимает его как незнакомый письменный текст, так как банк памяти и уровень знаний у вас несколько отличаются. Воспользовавшись чужим конспектом, читающий не всегда может полноценно развернуть информацию, обнаружить лишние или недостающие сведения, восстановить целостность изложения и логическую канву лекции. Чужие сокращения трудно расшифровываются, а подчас расшифровываются неверно.

Вот почему конспект, составленный другим человеком, приносит мало пользы.

Советы по конспектированию лекций

Заимствуйте слова и словосочетания, употребляемые лектором. Не пытайтесь заменять профессиональные слова и словосочетания синонимами. Точное употребление терминов важно для передачи истинности мысли. Каждый термин, используемый в дисциплине «Основы математической обработки информации» имеет конкретное, точное значение и подмена его синонимом приводит к потере смысла, или непониманию его назначения в дисциплине.

В то же время, не старайтесь писать все дословно: записывать все высказывания просто не имеет смысла: важно уловить главную мысль и основные факты. Записывая основное, формулируйте мысли кратко и своими словами, подкрепляйте примерами или фактами, которые приводит лектор (иногда для этого достаточно несколько ключевых слов).

Чем больше вы учите наизусть, тем сильнее становится ваша память. Чем сильнее ваша память, тем больше вы будете улавливать на слух при прослушивании лекций и меньше нуждаться в громоздких записях.

Готовясь к лекции, заранее выписывайте опорные слова и словосочетания из учебника. Чтобы на лекции быстро записывать термины, слова и словосочетания, полезно осуществлять просмотровое чтение соответствующих параграфов учебника. Если вы выпишите слова и словосочетания, выделенные в тексте учебника курсивом или вразрядку, это облегчит и ускорит процесс конспектирования.

Сворачивайте ранее известную информацию. Если на лекции излагается известная вам информация, это не означает, что ее не нужно фиксировать. Чтобы сохранить логику изложения лекции, запишите ее в кратком виде (граф-схеме, опорном словосочетании или иначе). В этот момент наступает психическая и физиологическая разрядка в чрезвычайно напряженном ритме конспектирования.

Научившись сворачивать знакомую информацию, постепенно переносите этот навык для фиксации новой информации.

Формулировки законов, правил, гипотез, положения теорий, выводы формул записывайте на лекции полностью.

Пользуйтесь приемом составления граф-схемы. Они очень помогают зрительно освоить материал. Вместо текстовой записи фрагмент лекции может быть зафиксирован в виде граф-схемы.

Делайте соответствующие смысловые выделения значимых мыслей. Определите для себя соответствующие обозначения. Например: «!» - важно; «?» - проверить, уточнить и др.

Оставляйте широкие поля в тетради, которые можно использовать для уточняющих записей, комментариев, дополнений и др.; выделяйте разделы, подразделы темы и подтемы.

Учитесь составлять планы. Прибегать к записи лекции в форме плана разумно только в тех ситуациях, когда излагаемая информация хорошо вам знакома. Важно зафиксировать основное содержание в логической последовательности. Как правило, в виде плана конспектируют не всю лекцию, а лишь ее отдельные фрагменты. Для составления планов на лекции требуется умение качественно и быстро перерабатывать информацию, а также навык скорописи.

Учитесь самостоятельно формулировать фразы. Имейте в виду: самостоятельно сформулированная фраза запоминается лучше, чем фраза, записанная под диктовку. Вначале полезно упражняться в изменении печатного текста. Такие упражнения помогают быстро выявлять главное, подбирать синонимы, сохранять профессиональные словосочетания и термины, сокращать фразы. Умение перерабатывать текст формируется также при использовании приемов усваивающего чтения.

Развивайте скоропись. На первых лекциях при конспектировании, как правило, возникает проблема скоростной записи. Необходимо знать, что скорость письма зависит от тренированности мышц, участвующих в микродвижениях. Тренируя специальными упражнениями мускулатуру руки, необходимо также добиваться автоматизма правильного написания слов. Это означает, что вы не должны отвлекать свое внимание на раздумья, как правильно написать то или иное слово. Многократно прописывая специальные термины, а также слова, которые у вас вызывают замедление темпа конспектирования, вы достигнете автоматизма написания слов и разовьете скоропись.

Учитесь сокращать слова. Сокращение слов – один из эффективных способов увеличения скорости письма. Однако на первых лекциях многие из вас сокращают слова как попало или вместо сокращения не дописывают слова, что нельзя рассматривать как сокращенные. Раздумье над способом сокращения слова во время лекции лишь замедляет процесс конспектирования. Для преодоления психологических и лингвистических трудностей при сокращении слов надо иметь в виду следующее:

1. Наибольшее количество информации приходится на первые буквы слова. Поэтому наиболее часто встречающиеся термины на данной лекции, или основные термины модно обозначить одной заглавной буквой и добавлять только окончание (В-е – воспитание, К-вом – коллективом, П-кий – педагогический)

2. В сокращенном слове должны присутствовать буквы корня.

3. Сокращенная часть слова должна оканчиваться на согласную, после которой ставится точка.

4. Для слов, изменяющихся при склонении или спряжении, важны начало и конечная часть слова. Средняя часть существительных может быть выброшена (вос-е, пед-ка, конц-ция, кол-во, кач-во). Также может опускаться конечная часть прилагательных и причастий, если сохранено окончание существительного (соц. среда, пед. деят-ть, восп. система).

5. У относительных местоимений, стоящих после определяемого слова, окончание не может быть отброшено: пр-с, к-рый; проц., к-рому; проц., к-рым.

6. Сокращение должно быть достаточным для восстановления целого слова. Например, сокращение пред, недостаточно для восстановления, так как от слова осталась только приставка и оно может быть расшифровано и как предупреждает, и как предполагает, и как предшествует или предусматривает. Сокращение предст, уже имеет две буквы от корня и может быть восстановлено как представляет. Однако правильнее сократить представ.

7. Новые и редко употребляемые слова лучше фиксировать полностью, пока они не войдут в ваш активный словарь. Если производить сокращение неусвоенных слов, то через некоторое время они не смогут быть восстановлены, а их смысл забудется.

8. Предварительно познакомьтесь с общепринятыми сокращениями, которые можно найти в энциклопедиях и словарях (м.б. – может быть; т.о. – таким образом, к-рый – который; пед. – педагогика; напр. – например).

Используйте аббревиатуры. При записи лекции удобно использовать аббревиатуры – сокращения словосочетаний, составленные из начальных букв слов, или сокращения сложных слов, составленные из начальных букв корней. Многие аббревиатуры словосочетаний хорошо известны: УВП – учебно-воспитательный процесс, ЛОО – личностно ориентированное обучение, ММ – математические модели, ВМ – вероятностные модели, ДСВ – дискретные случайные величины, НСВ – непрерывные случайные величины. Такие аббревиатуры записываются заглавными буквами и пишутся без точек. Зная, из каких корней состоит сложное слово, можно самим вводить некоторые из них. Например, самовоспитание -сВ, самоанализ - сА. В этом случае вторую или обе буквы можно записывать строчными буквами, между которыми не ставят точки.

Если пополнять свою память знаниями происхождения иностранных слов, вы сможете быстро составлять аббревиатуры. Предварительно следует потренироваться. Вашим помощником может стать словарь иностранных слов.

Используйте при конспектировании общенаучные символы. Для увеличения скорости записи используйте сокращения, применяемые в разных областях знания: => - следует; // — параллельно, $\exists$— существует, $\in$ — принадлежит, N – нормальный закон распределения, V — объем, E — энергия, 1/2 -половина, $\forall$ - любой, всякий, каждый, ! - единственный.

Возьмите за правило работать над конспектами лекции следующим образом:

- повторить изученный материал по конспекту;
- непонятные предложения вынести на поля и уточнить их значение;
- делайте больше отступов: не надо писать все одной сплошной строкой, где ничего не разберёшь. Это будет удобно для повторения и в целом для ваших глаз;
- неоконченные фразы, недописанные слова и предложения устранить, пользуясь данными учебника или других рекомендованных источников;

- завершить техническое оформление лекции: подчеркните главные мысли, отметьте разделы и подразделы, выделите вопросы и подвопросы;

- старайтесь поменьше использовать на лекциях диктофоны, поскольку потом трудно будет «декодировать» неразборчивый голос преподавателя, все равно потом придется переписывать лекцию (а с голоса очень трудно готовиться к ответственным экзаменам). Диктофоны часто отвлекают преподавателя тем, что студент ничего не делает на лекции, а преподаватель чувствует себя неуютно и вместо того, чтобы свободно размышлять над проблемой, читает лекцию намного хуже, чем он мог бы это сделать.

- для пропущенной лекции оставьте несколько страниц в тетради и восстановите ее содержание во время самостоятельной работы. В противном случае вы нарушите целостность изучаемого цикла.

Советы по усовершенствованию конспекта лекции

Дописывайте на полях то, что вспомнилось после лекции и является важным. Спустя 48 ч значительная часть воспринятой информации в памяти теряется. Поэтому поработайте с конспектом в первые 48 ч после чтения лекции. В этот интервал хорошо вспоминается услышанное на лекции. Повторный ввод новой информации в память способствует ее долговременному запоминанию. Во время работы с конспектом дописывайте на полях информацию, которая вам вспомнилась позже и которую вы считаете важным зафиксировать. Вы можете дополнить текст лекции схематичными рисунками и граф-схемами.

Вносите в конспект дополнительную информацию. Если для понимания содержания лекции вы считаете необходимым внести недостающую информацию, записывайте ее на полях или клейких листочках.

Фиксируйте на полях значения новых слов. Работая с конспектом лекции, уточняйте смысл незнакомых: слов в словарях и энциклопедиях. Никогда не пропускайте слов, значения которых вам незнакомы, тогда вы избежите трудностей при понимании и запоминании нового материала. Записывайте на полях лекционной тетради значения новых слов и специальных терминов, это позволит вам быстрее и эффективнее работать с конспектом.

Слагаемые успешной работы на лекции

Некоторые качества, благодаря которым работа на лекциях становится эффективной, мы уже отметили: сосредоточенность, внимание, вдумчивость, умение перерабатывать и быстро записывать текст. Однако для достижения успеха этого мало. Конспектирование возможно в том случае, когда содержащаяся в лекции информация доступна для вас: законспектировать то, что не понимаешь, трудно.

Непреодолимую преграду для понимания содержания лекции могут создать пропущенные лекции и занятия, небрежное отношение к прослушанным ранее лекциям, низкий уровень знаний.

Обратим внимание на то, что владение 50% информации по теме лекции является одной из предпосылок к успешному восприятию новой информации. Вот почему целесообразность подготовки к каждой новой лекции (работа по конспекту предыдущей лекции и просмотровое чтение соответствующего материала по учебной книге) не вызывает сомнений.

Кроме этого, нужно стремиться к расширению словарного запаса и активному использованию слов на практике, повышению культуры речи. Пополнить лексический запас можно, обращаясь к различным словарям (толковому, лингвистическому, иностранных слов и др.) и энциклопедическим изданиям. Повышению культуры речи будет способствовать вдумчивое чтение как художественной, так и научно-популярной литературы, журналов. Целесообразно во время работы с конспектом лекции уточнять значения неизвестных или малопонятных слов в справочниках, энциклопедиях и словарях. При невозможности найти самостоятельно значение непонятного слова следует обратиться за разъяснениями к преподавателю или библиотекарю.

Лекция как особая форма интеллектуальной работы представляет собой также процесс общения лектора и слушателей. Как уже отмечалось, на лекции несколько говорящих, но вслух произносит мысли только лектор. Он не может останавливаться и отвечать на реплики из аудитории и вопросы, не относящиеся к теме лекции. Речь лектора представляет собой, как правило, монолог и ведется в соответствии с интересами всех слушателей и с задачами лекции в целом. В этот момент педагог должен реагировать только на те замечания, которые относятся к темпу и внятности его речи.

Ваше уважительное отношение к лектору и к другим слушателям, предварительная подготовка, систематическая и осознанная работа на лекции предопределяют успех лекционного занятия как особого вида учебной деятельности.

Общие правила работы в тетради для лекций

1. Подпишите тетрадь, указав название читаемого курса, свою фамилию, группу и год обучения.
2. Проведите поля на страницах тетради. Они понадобятся для внесения дополнительных записей.
3. На каждой лекции записывайте дату, номер и тему лекции.
4. Используйте эту тетрадь по назначению.

2.2 Методические рекомендации по работе с учебной литературой

Теоретический материал дисциплины предполагает изучение пяти разделов. Ниже приведено содержание разделов и рекомендации по использованию учебной литературы.

№ 1 Логика высказываний

Определение высказывания. Операции над высказываниями. Алгебра высказываний. Формулы логики высказываний. Равносильность формул. Запись сложного высказывания в виде формулы логики высказываний. Тождественно-истинные и тождественно-ложные формулы. Тавтологии алгебры высказываний. Проблема разрешимости. Формализация рассуждений. Правильные рассуждения. Нормальные формы для формул алгебры высказываний. Логическое следование формул.

1. Триумфгородских, М.В. Дискретная математика и математическая логика для информатиков, экономистов и менеджеров : учебное пособие [Электронный ресурс]/ М.В. Триумфгородских. – Москва : Диалог-МИФИ, 2011. - 180 с. : табл., граф., ил. - Библиогр. в кн. - ISBN 978-5-86404-238-0 ; Режим доступа: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=136106 - пункт 6.1

2 Гурова Л. М. Математическая логика и теория алгоритмов. Учебное пособие [Электронный ресурс] / Гурова Л. М., Зайцева Е. В. - Московский государственный горный университет, 2006 – Режим доступа http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=83721/– глава 2

3. Гладких О. Б. Математическая логика: учебно-методическое пособие [Электронный ресурс] / Гладких О. Б., Белых О. Н. - ЕГУ им. И.А. Бунина, 2011.- Режим доступа - http://biblioclub.ru/index.php?page=book_red&id=272140&sr=1 – глава 1

4. Бояринцева Т. Е. Математическая логика и теория алгоритмов : Методические указания к выполнению типового расчета [Электронный ресурс] / Бояринцева Т. Е., Золотова Н. В., Исмагилов И. Р. - Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011. – Режим доступа - http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=257607– с. 6-13

– Раздел 2.3.1 данного пособия

№ 2 Логика предикатов

Определение предиката. Кванторы. Формулы логики предикатов. Равносильность формул Приведенные и нормальные формулы. Выражение суждения в виде формулы логики предикатов Интерпретация формулы логики предикатов в виде суждения. Выполнимость. Общезначимость.

1. Триумфгородских, М.В. Дискретная математика и математическая логика для информатиков, экономистов и менеджеров : учебное пособие [Электронный ресурс]/ М.В. Триумфгородских. – Москва : Диалог-МИФИ, 2011. - 180 с. : табл., граф., ил. - Библиогр. в кн. - ISBN 978-5-86404-238-0 ; Режим доступа: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=136106 - пункт 7.1

3 Гурова Л. М. Математическая логика и теория алгоритмов. Учебное пособие [Электронный ресурс] / Гурова Л. М., Зайцева Е. В. - Московский государственный горный университет, 2006 – Режим доступа http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=83721/– гл. 5

4. Гладких О. Б. Математическая логика: учебно-методическое пособие [Электронный ресурс] / Гладких О. Б., Белых О. Н. - ЕГУ им. И.А. Бунина, 2011.- Режим доступа - http://biblioclub.ru/index.php?page=book_red&id=272140&sr=1– гл. 6

5. Бояринцева Т. Е. Математическая логика и теория алгоритмов : Методические указания к выполнению типового расчета [Электронный ресурс] / Бояринцева Т. Е., Золотова Н. В., Исмагилов И. Р. - Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011. – Режим доступа - http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=257607– с. 16-30

– Раздел 2.3.2 данного пособия

№ 3 Формальные аксиоматические теории (исчисления)

Система аксиом и теория формального вывода. Принципы построения формальных теорий. Формальные теории первого порядка.

Исчисление высказываний. Исчисление предикатов. Автоматическое доказательство теорем. Метод резолюций. Полнота и другие свойства формализованного исчисления высказываний. Независимость системы аксиом формализованного исчисления высказываний.

1. Триумфгородских, М.В. Дискретная математика и математическая логика для информатиков, экономистов и менеджеров : учебное пособие [Электронный ресурс]/ М.В. Триумфгородских. – Москва : Диалог-МИФИ, 2011. - 180 с. : табл., граф., ил. - Библиогр. в кн. - ISBN 978-5-86404-238-0 ; Режим доступа: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=136106 - пункт 6.2 – 6.6, 7.2-7.3

3 Гурова Л. М. Математическая логика и теория алгоритмов. Учебное пособие [Электронный ресурс] / Гурова Л. М., Зайцева Е. В. - Московский государственный горный университет, 2006 – Режим доступа http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=83721/– гл.7

4. Гладких О. Б. Математическая логика: учебно-методическое пособие [Электронный ресурс] / Гладких О. Б., Белых О. Н. - ЕГУ им. И.А. Бунина, 2011.- Режим доступа - http://biblioclub.ru/index.php?page=book_red&id=272140&sr=1

– гл.8

– Раздел 2.3.3 данного издания

№ 4 Нечеткая логика

Нечеткие множества. Основные характеристики нечетких множеств. Операции над нечеткими множествами. Нечеткая и лингвистическая переменная. Нечеткие множества в системах управления. Нечеткие высказывания и нечеткие модели систем. Нечеткие предикаты.

1. Триумфгородских, М.В. Дискретная математика и математическая логика для информатиков, экономистов и менеджеров : учебное пособие [Электронный ресурс]/ М.В. Триумфгородских. – Москва : Диалог-МИФИ, 2011. - 180 с. : табл., граф., ил. - Библиогр. в кн. - ISBN 978-5-86404-238-0 ; Режим доступа: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=136106 - глава 3, 8

2. Бояринцева Т. Е. Математическая логика и теория алгоритмов : Методические указания к выполнению типового расчета [Электронный ресурс] / Бояринцева Т. Е., Золотова Н. В., Исмагилов И. Р. - Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011. – Режим доступа - http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=257607– с. 40-43

– Раздел 2.3.4 данного издания

№ 5 Математическая логика и компьютеры, информатика, искусственный интеллект

Математическая логика и программное обеспечение компьютера. Применение компьютера для теорем математической логики. Математическая логика и логическое программирование. Математическая логика и информатика. Математическая логика и системы искусственного интеллекта.

1. Тимофеева И. Л. Математическая логика. Курс лекций [Электронный ресурс] / Тимофеева И. Л. - Мир и образование, 2007. – режим доступа: http://biblioclub.ru/index.php?page=book_red&id=458253&sr=1– глава 9

2. Гурова Л. М. Математическая логика и теория алгоритмов. Учебное пособие [Электронный ресурс] / Гурова Л. М., Зайцева Е. В. - Московский государственный горный университет, 2006 – Режим доступа http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=83721/– гл. 10

4. Гладких О. Б. Математическая логика: учебно-методическое пособие [Электронный ресурс] / Гладких О. Б., Белых О. Н. - ЕГУ им. И.А. Бунина, 2011.- Режим доступа - http://biblioclub.ru/index.php?page=book_red&id=272140&sr=1 – глава 7

– Раздел 2.3.5 данного издания

2.3 Теоретический материал для самостоятельной работы

Логика - одна из самых древних наук. Как самостоятельная наука логика оформилась в трудах греческого ученого Аристотеля (384 – 322 г. до н. э.) и стала впоследствии называться формальной или Аристотелевой логикой.

С момента своего возникновения и в течение многих веков логика рассматривалась как часть философии. Математическая логика возникла на стыке двух наук: традиционной или философской логики и математики.

Идея построения логики на математической основе была впервые выдвинута Лейбницем (1646 – 1716). Окончательно как раздел математики математическая логика сформировалась в работах Д. Буля (1815 – 1864), Г. Фреге (1848 – 1925), Б. Рассела (1872 – 1970), Д. Гильберта (1862 – 1943).

Математическая логика используется при решении трех групп задач.

Во-первых, это формулировка логических рассуждений с помощью специальных символов и изучение этих рассуждений с использованием математического аппарата.

Во-вторых, это построение формальных теорий (исчислений) для различных математических объектов на основе аксиоматического метода.

В-третьих, это применение аппарата математической логики к различным областям практической деятельности. В настоящее время математическая логика с успехом применяется в радиотехнике, лингвистике, теории автоматического управления, программировании, системах искусственного интеллекта.

2.3.1. ЛОГИКА ВЫСКАЗЫВАНИЙ

Определение 1.1. Высказыванием называется повествовательное языковое предложение, относительно которого можно сказать истинно оно или ложно.

Пример 1.1.

Следующие утверждения являются высказываниями:

а) Москву основал Юрий Долгорукий.

б) В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.

в) $2 \cdot 2 = 5$.

Высказывания а) и б) истинны, а высказывание с) ложно.

Пример 1.2.

Следующие утверждения не являются высказываниями:

а) $a + b = 2$.

б) Математика – интересный предмет.

В логике высказываний нас интересует не суть высказывания, а его истинность или ложность. Мы говорим, что существуют два истинностных значения: истина и ложь (И и Л). Двухэлементное множество {И, Л} есть множество истинностных значений. Высказывания будем обозначать большими буквами: A, B, C, X, Y,.. Выражение A = И означает, что высказывание A истинно, а X = Л означает, что высказывание X ложно.

Операции над высказываниями. Алгебра высказываний

Введем операции над высказываниями так же, как мы это делали для булевых функций.

Отрицанием высказывания A называется высказывание $\neg A$, которое истинно тогда и только тогда, когда высказывание A ложно. Чтобы составить отрицание A достаточно в разговорном языке сказать “неверно, что A”.

Пример 1.3.

A = “Каспаров – чемпион мира по шахматам”.

$\neg A$ = “Неверно, что Каспаров – чемпион мира по шахматам”.

Отрицание определяется следующей таблицей истинности:

A	$\neg A$
Л	И
И	Л

Конъюнкцией двух высказываний A и B называется высказывание A&B, истинное тогда и только тогда, когда истинны оба высказывания A и B. В разговорной речи конъюнкции соответствует союз “и”.

Пример 1.4.

A = “Треугольник прямоугольный”.

B = “Треугольник равнобедренный”.

A&B = “Треугольник прямоугольный и равнобедренный”.

Конъюнкция определяется следующей таблицей истинности:

A	B	A&B
Л	Л	Л
Л	И	Л
И	Л	Л
И	И	И

Дизъюнкцией двух высказываний A и B называется высказывание AVB, ложное тогда и только тогда, когда ложны оба высказывания A и B. В разговорной речи конъюнкции соответствует союз “или”.

Пример 1.5.

A = “Иванов юрист”.

B = “Иванов экономист”.

AVB = “Иванов юрист или экономист”.

Дизъюнкция определяется следующей таблицей истинности:

A	B	AVB
Л	Л	Л
Л	И	И
И	Л	И
И	И	И

Импликацией двух высказываний A и B называется высказывание $A \supset B$, ложное тогда и только тогда, когда A истинно, а B ложно. Импликации соответствуют следующие выражения разговорной речи: “A влечет за собой B”; или “из A следует B”; или “если A, то B”.

Пример 1.6.

A = “Треугольник равносторонний”.

B = “В треугольнике все углы равны”.

$A \supset B$ = “Если треугольник равносторонний, то все углы равны”.

Импликация определяется следующей таблицей истинности:

A	B	$A \supset B$
Л	Л	И
Л	И	И
И	Л	Л
И	И	И

Импликация играет важную роль в логике высказываний. При учете смыслового содержания высказывания (а не только значений истинности), оборот “если, то” подразумевает причинно-следственную связь. Истинность импликации означает лишь то, что, если истинна посылка, то истинно и заключение. При ложной посылке заключение всегда истинно. Так, истинными являются следующие импликации: “Если в доме 5 этажей, то Иванов живет в квартире 50”; “Если идет снег, то $2 \cdot 2 = 5$”.

Пример 1.7.

Рассмотрим четыре высказывания:

A = “Дважды два четыре” = И;

B = “Дважды два пять” = Л;

C = “Снег белый” = И;

D – “Снег черный” = Л.

Образуем четыре импликации:

$A \supset C$ = “Если дважды два четыре, то снег белый” = И $\supset$ И = И;

$B \supset C$ = “Если дважды два пять, то снег белый” = Л $\supset$ И = И;

$A \supset D$ = “Если дважды два четыре, то снег черный” = И $\supset$ Л = Л;

$B \supset D$ = “Если дважды два пять, то снег черный” = Л $\supset$ Л = И.

Эквивалентностью двух высказываний A и B называется высказывание $A \sim B$, истинное тогда и только тогда, когда оба высказывания A и B одновременно истинны или ложны. Говорят, что A эквивалентно B или A имеет место тогда и только тогда, когда имеет место B.

Пример 1.8.

A = “Треугольник равнобедренный”.

B = “В треугольнике углы при основании равны”.

$A \sim B$ = “Треугольник является равнобедренным тогда и только тогда, когда углы при основании равны”.

Эквивалентность определяется следующей таблицей истинности:

A	B	A~B
Л	Л	И
Л	И	Л
И	Л	Л
И	И	И

Высказывания вместе с определенными для них операциями образуют алгебру высказываний.

Формулы логики высказываний. Равносильность формул

Определение 1.2. Формула логики высказываний определяется индуктивно следующим образом:

1. Любая высказывательная переменная, а также константы И, Л есть формула.
2. Если A и B – формулы, то $\neg A$, AVB, A&B, $A \supset B$, $A \sim B$ есть формулы.
3. Ничто, кроме указанного в пунктах 1 – 2, не есть формула.

Две формулы называются равносильными, если на всех одинаковых наборах переменных значения этих формул совпадают.

Равносильность формул A и B будем обозначать следующтм образом: $A \equiv B$.

Для того, чтобы установить равносильность формул, можно составить таблицы значений для каждой формулы и сравнить их. Для равносильных формул эти таблицы совпадают. Другой способ установления равносильности формул заключается в использовании некоторых установленных равносильностей формул логики высказываний.

Все законы равносильности, рассмотренные ранее для логики булевых функций, справедливы и для формул логики высказываний, причем единице соответствует истинностное значение И, а нулю – Л. Приведем эти законы.

Для любых формул A, B, C справедливы следующие равносильности:

1. Коммутативность.

а) A&B ≡ B&A (для конъюнкции);

б) AVB ≡ BVA (для дизъюнкции).

2. Ассоциативность.

а) A&(B&C) ≡ (A&C)&C (для конъюнкции);

б) AV(BVC) ≡ (AVB)VC (для дизъюнкции).

3. Дистрибутивность.

а) A&(BVC) ≡ A&BVA&C (для конъюнкции относительно дизъюнкции);

б) $A \vee (B \& C) \equiv (A \vee B) \& (A \vee C)$ (для дизъюнкции относительно конъюнкции).

4. Закон де Моргана.

а) $\neg(A \& B) \equiv \neg A \vee \neg B$ (отрицание конъюнкции есть дизъюнкция отрицаний);

б) $\neg(A \vee B) \equiv \neg A \& \neg B$ (отрицание дизъюнкции есть конъюнкция отрицаний).

5. Идемпотентность.

а) $A \& A \equiv A$ (для конъюнкции);

б) $A \vee A \equiv A$ (для дизъюнкции).

6. Поглощение.

а) $A \& (A \vee B) \equiv A$ (1– ый закон поглощения);

б) $A \vee A \& B \equiv A$ (2– ой закон поглощения).

7. Расщепление (склеивание).

а) $A \& B \vee A \& (\neg B) \equiv A$ (1–ый закон расщепления);

б) $(A \vee B) \& (A \vee \neg B) \equiv A$ (2–ой закон расщепления).

8. Двойное отрицание.

$\neg(\neg A) \equiv A$.

9. Свойства констант.

а) $A \& И \equiv A$; б) $A \& Л \equiv Л$; в) $A \vee И \equiv И$; г) $A \vee 0 \equiv A$; д) $\neg Л \equiv И$; е) $\neg \cup \equiv Л$.

10. Закон противоречия.

$A \& \neg A \equiv Л$.

11. Закон “исключенного третьего”.

$A \vee \neg A \equiv И$.

12. $A \supset B \equiv \neg A \vee B \equiv \neg(A \& \neg B)$.

13. $A \sim B \equiv (A \supset B) \& (B \supset A) \equiv (A \& B) \vee (\neg A \& \neg B) \equiv (A \vee \neg B) \& (\neg A \vee B)$.

Каждая из перечисленных равносильностей может быть доказана с помощью таблиц значений функций, составленных для выражений, стоящих слева и справа от символа “≡”.

Справедливы также обобщенные законы дистрибутивности и обобщенные законы де Моргана:

14. $(A_1 \vee A_2 \vee ... \vee A_n) \& (B_1 \vee B_2 \vee ... \vee B_m) \equiv$
$A_1 \& B_1 \vee A_1 \& B_2 \vee ... \vee A_1 \& B_m \vee ... \vee A_n \& B_1 \vee A_n \& B_2 \vee ... \vee A_n \& B_m$.

15. $(A_1 \& A_2 \& ... \& A_n) \vee (B_1 \& B_2 \& ... \& B_m) \equiv$
$(A_1 \vee B_1) \& (A_1 \vee B_2) \& ... \& (A_1 \vee B_m) \& ... \& (A_n \vee B_1) \& (A_n \vee B_2) \& ... \& (A_n \vee B_m)$.

16. $\neg(A_1 \& A_2 \& ... \& A_n) \equiv \neg A_1 \vee \neg A_2 \vee ... \vee \neg A_n$.

17. $\neg(A_1 \vee A_2 \vee ... \vee A_n) \equiv \neg A_1 \& \neg A_2 \& ... \& \neg A_n$

В равносильностях 1 – 17 в качестве A, B, A_i, B_i могут быть подставлены любые формулы и, в частности, переменные.

Пример 1.9.

Доказать равносильность формул логики высказываний:

$(A \supset B) \& (A \vee B) \equiv B$.

Преобразуем левую часть, последовательно используя равносильности 12, 14, 10, 5а, 9г, 6б:

$(A \supset B) \& (A \vee B) \equiv (\neg A \vee B) \& (A \vee B) \equiv \neg A \& A \vee \neg A \& B \vee B \& A \vee B \& B \equiv \neg A \& B \vee B \& A \vee B \equiv B$.

Равносильность доказана.

Запись сложного высказывания в виде формулы логики высказываний

Если имеется несколько высказываний, то при помощи логических операций можно образовывать различные новые высказывания. При этом исходные высказывания принято называть простыми, а вновь образованные высказывания – сложными.

Пример 1.10.

Рассмотрим простые высказывания:.

A = "Будет холодное лето".

B = "Будет дождливое лето".

C = "Будет засушливое лето".

D = "Будет хороший урожай".

Формула $(A\&B \vee C) \supset \neg D$ соответствует сложному высказыванию:

"Если будет холодное и дождливое или засушливое лето, урожай будет плохим".

Язык логики высказываний удобен для записи математических утверждений. Всякая теорема имеет вид импликации: $A \supset B$ (прямая теорема); $B \supset A$ (обратная теорема); $\neg B \supset \neg A$ (противоположная теорема).

Пример 1.11.

A = "Треугольник прямоугольный".

B = "Квадрат одной стороны равен сумме квадратов двух других сторон"

$A \supset B$ (прямая теорема) = "Если треугольник прямоугольный, то квадрат одной стороны равен сумме квадратов двух других сторон".

$B \supset A$ (обратная теорема) = "Если квадрат одной стороны равен сумме квадратов двух других сторон, то треугольник прямоугольный".

$\neg B \supset \neg A$ (противоположная теорема) = "Если квадрат одной стороны не равен сумме квадратов двух других сторон, то треугольник не прямоугольный".

В данном случае все три теоремы верны.

Равносильность $A \supset B \equiv \neg B \supset \neg A$ есть основание метода доказательства от противного. Например, для доказательства теоремы : "Если треугольник равнобедренный, то углы при основании равны" ($A \supset B$) достаточно доказать теорему: "Если углы при основании не равны, то треугольник не равнобедренный" ($\neg B \supset \neg A$).

Используя равносильные преобразования, можно получать различные формулировки одного и того же суждения, а также отрицаний суждений.

Пример 1.12.

Дано высказывание "Если политик обещает невыполнимое, то он обманывает людей":

а) записать его в виде формулы логики высказываний;

б) произвести отрицание данного высказывания, так, чтобы результат не содержал внешних знаков отрицания; полученную при этом формулу записать на естественном языке.

Введем следующие высказывания:

A = "Политик обещает невыполнимое".

B = "Политик обманывает людей".

Данное нам высказывание может быть записано в виде формулы: $A \supset B$.

Построим отрицание высказывания, воспользовавшись равносильностью 12:

$\neg(A \supset B) \equiv A\&\neg B$.

На естественном языке это может быть выражено следующим образом:

"Политик обещает невыполнимое, но он не обманывает людей".

Тождественно-истинные и тождественно-ложные формулы. Проблема разрешимости

Определение 1.3. Формула называется тождественно-истинной (тавтологией), если для любых наборов переменных она принимает значение И.

Определение 1.4. Формула называется тождественно-ложной, если для любых наборов переменных она принимает значение Л.

Определение 1.5. Формула называется выполнимой, если для некоторых наборов переменных она принимает значение И.

Проблема разрешимости для логики высказываний заключается в том, чтобы установить, является ли произвольная формула тождественно-истинной.

Теорема 1.1. Формула является тождественно-истинной тогда и только тогда, когда в ее КНФ в любую из элементарных дизъюнкций одновременно входят какая-либо переменная и ее отрицание.

Теорема 1.2. Формула является тождественно-ложной тогда и только тогда, когда в ее ДНФ в любую из элементарных конъюнкций одновременно входят какая-либо переменная и ее отрицание.

Следовательно, приведя формулу равносильными преобразованиями к КНФ, можно установить, является ли она тождественно-истинной, а приведя ее к ДНФ, можно установить, является ли она тождественно-ложной.

Пример 1.13.

Доказать, что формула $F = (A \supset B) \supset ((C \vee A) \supset (C \vee B))$ является тождественно-истинной.

Последовательно применяя равносильные преобразования, приведем нашу формулу к КНФ:

$(A \supset B) \supset ((C \vee A) \supset (C \vee B)) \equiv \neg(A \supset B) \vee ((C \vee A) \supset (C \vee B)) \equiv (A \& \neg B) \vee \neg(C \vee A) \vee (C \vee B) \equiv (A \& \neg B) \vee (\neg C \& \neg A) \vee (C \vee B) \equiv (A \vee \neg C) \& (A \vee \neg A) \& (\neg B \vee \neg C) \& (\neg B \vee \neg A) \vee (C \vee B)$
$\equiv (A \vee \neg C) \& (\neg B \vee \neg C) \& (\neg B \vee \neg A) \vee (C \vee B)$
$\equiv (A \vee \neg C \vee C \vee B) \& (\neg B \vee \neg C \vee C \vee B) \& (\neg B \vee \neg A \vee C \vee B)$.

В первую дизъюнкцию входят C и ¬C. Во вторую – B и ¬B, C и ¬C. в третью – B и ¬B. Следовательно, на основании теоремы 1.1 можно утверждать, что исходная формула является тождественно-истинной.

Так как всякой формуле соответствует таблица истинности, то тождественная истинность или тождественная ложность формулы может быть установлена двумя путями:

1) приведением с помощью равносильных преобразований к КНФ или ДНФ;

2) составлением таблицы истинности.

Пример 1.14.

Установить, является ли тождественно-истинной данная формула логики высказываний: $f(A, B) = (A \& (A \supset B)) \supset B$.

1) Последовательно применяя равносильные преобразования, приведем нашу формулу к КНФ:

$(A \& (A \supset B)) \supset B \equiv (A \& (\neg A \vee B) \supset B \equiv \neg(A \& (\neg A \vee B) \supset B \equiv \neg A \vee \neg(\neg(A \vee B) \vee B$
$\equiv \neg A \vee (A \& B) \vee B \equiv (\neg A \vee B) \vee A \& \neg B \equiv (\neg A \vee B \vee A) \& (\neg A \vee B \neg B)$.

В первую дизъюнкцию входят A и ¬A. Во вторую – B и ¬B, поэтому формула является тождественно истинной, $f(A, B) \equiv$ И.

2) Составим таблицу истинности f(A, B):

A	B	A⊃B	A&(A⊃B)	(A&(A⊃B))⊃B
Л	Л	И	Л	И
Л	И	И	Л	И
И	Л	Л	Л	И
И	И	И	И	И

Из таблицы видно, что $f(A, B) \equiv$ И.

Формализация рассуждений. Правильные рассуждения

Рассуждение – это построение нового высказывания D на основании уже имеющихся высказываний $P_1, P_2, \ldots, P_n$. Высказывания $P_1, P_2, \ldots, P_n$ называются посылками, а высказывание D – заключением.

Определение 1.6. Рассуждение называется правильным, если из конъюнкции посылок следует заключение, т. е. формула $P_1 \& P_2 \& \ldots \& P_n \supset D$ тождественно-истинна.

Таким образом, если все посылки истинны (т. е. их конъюнкция равна И), то истинное заключение соответствует правильному рассуждению, а ложное заключение – неправильному. При ложности хотя бы одной из посылок независимо от истинностного значения заключения рассуждение будет правильным.

Схематически рассуждение изображается следующим образом:

$$\frac{P_1, P_2, \ldots, P_n}{D}$$

Пример 1.15.

Проверить правильность следующих рассуждений:

а) "Если книга сложная, то она неинтересная. Эта книга интересная. Значит, она несложная".

Введем высказывания: А = "Книга сложная"; В = "Книга интересная". Схема рассуждения имеет вид:

$$\frac{A \supset \neg B,\ B}{\neg A}$$

Докажем, что формула $((A \supset \neg B) \& B) \supset \neg A$ является тождественно-истинной. Приведем эту формулу к КНФ и воспользуемся теоремой 1.1:

$((A \supset \neg B) \& B) \supset \neg A \equiv \neg((A \supset \neg B) \& B) \vee \neg A \equiv (A \& B) \vee \neg B \vee \neg A \equiv (\neg A \vee \neg B \vee A) \& (\neg A \vee \neg B \vee B) \equiv$ И.

Значит, рассуждение правильное.

б) "Если будет хорошая погода, я пойду гулять. Если будет плохая погода, я буду читать книгу. Погода будет хорошая. Следовательно, я не буду читать книгу".

Введем высказывания: А = "Будет хорошая погода"; В = "Я пойду гулять". С = "Я буду читать книгу". Схема рассуждения имеет вид:

$$\frac{A \supset B,\ \neg A \supset C,\ A}{\neg C}$$

Найдем КНФ формулы $((A \supset B) \& (\neg A \supset C) \& A) \supset \neg C$:

$((A \supset B) \& (\neg A \supset C) \& A) \supset \neg C \equiv \neg((A \supset B) \& (\neg A \supset C) \& A) \vee \neg C \equiv \neg(A \supset B) \vee \neg(\neg A \supset C) \vee \neg A) \vee \neg C \equiv A \& \neg B \vee \neg A \& \neg C \vee \neg A \vee \neg C \equiv A \& \neg B \vee \neg A \vee \neg C \equiv (A \vee \neg A \vee \neg C) \& (\neg B \vee \neg A \vee \neg C) \equiv \neg B \vee \neg A \vee \neg C$.

Полученная КНФ нашей формулы не содержит одновременно какой-либо переменной и ее отрицания. Следовательно, формула не является тождественно-истинной, а рассуждение не является правильным.

2.3. 2. ЛОГИКА ПРЕДИКАТОВ

Определение предиката. Кванторы

Определение 2.1. Предикатом $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется функция, аргументы которой определены на некотором множестве М, $x_1, x_2, \ldots, x_n \in M$, а сама она принимает два значения: И (истина) и Л (ложь). Таким образом, предикат осуществляет отображение $M \to$ {И, Л}.

Переменные $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называются предметными переменными, а множество М – предметной областью.

Если все переменные $x_1, x_2, \ldots, x_n$ принимают конкретные значения, то предикат есть не что иное, как высказывание, Таким образом, высказывание является частным случаем предиката. Можно сказать, что предикат есть высказывание, зависящее от параметров.

Пример 2.1.

а) $P(x)$ = "x – четное число". Здесь М – множество целых чисел, $x \in M$.

б) A(x, y, z) = “x, y, z лежат на одной окружности”. Здесь M – множество точек плоскости, $x, y, z \in M$

в) B(x, y) = “x старше y”. Здесь M – множество людей, $x, y \in M$.

Предикат от n переменных называется n-местным предикатом. Высказывание есть 0-местный предикат.

Как видно из примера 2.1, одноместный предикат отражает свойство некоторого объекта, а многоместный предикат выражает отношение между многими объектами.

Над предикатами можно производить обычные логические операции и получать при этом другие предикаты. Таким образом можно говорить об алгебре предикатов.

Пример 2.2.

Пусть A(x) – предикат “x делится на 3”, а B(x) – предикат “x делится на 2”. Тогда A(x) V B(x) – предикат “x делится на 3 или на 2”, а A(x) & B(x) – предикат “x делится на 3 и на 2”.

Кроме операций логики высказываний, в логике предикатов используются особые логические символы – кванторы (были введены немецким математиком Г. Фреге).

Квантор общности. Пусть P(x) – некоторый предикат, определенный для каждого $x \in M$. Тогда выражение $\forall xP(x)$ является истинным высказыванием, если P(x) истинно для <u>всякого</u> $x \in M$ и ложным в противном случае. Символ $\forall x$ называется квантором общности. Выражение $\forall xP(x)$ читается: “Для всех x имеет место P(x)”. В обычной речи квантору общности соответствуют слова: все, всякий, каждый, любой. Возможно отрицание квантора общности: $\neg\forall xP(x)$: “Не для всех x имеет место P(x)”.

Пример 2.3.

Пусть P(x) – предикат “x – четное число”. Тогда $\forall xP(x)$ есть высказывание “Всякое x – четное число" = “Все числа – четные", которое истинно на множестве M четных чисел и ложно, если M содержит хотя бы одно нечетное число, например, если M – множество целых чисел. Отрицание $\neg\forall xP(x)$ есть высказывание “Не всякое x – четное число" = “Не все числа – четные", которое истинно на множестве целых чисел и ложно на множестве четных чисел.

Квантор существования. Пусть P(x) – некоторый предикат, $x \in M$. Тогда выражение $\exists xP(x)$ является истинным высказыванием, если P(x) истинно <u>хотя бы для одного</u> $x \in M$ и ложным в противном случае. Символ $\exists x$ называется квантором существования. Выражение $\exists xP(x)$ читается: “Существует x, для которого имеет место P(x)”. В обычной речи квантору существования соответствуют слова: некоторый, несколько. Возможно отрицание квантора существования: $\neg\exists xP(x)$: “Не существует x, для которого имеет место P(x)”.

Кванторы существования и общности называются двойственными кванторами.

Пример 2.4.

Пусть, как и в примере 2.3, P(x) – предикат “x – четное число”. Тогда $\exists xP(x)$ есть высказывание “Некоторые x – четные числа” = “Существуют четные числа”, которое истинно на множестве M, содержащем хотя бы одно четное число и ложно, если M содержит только нечетные числа. Высказывание $\neg\exists xP(x)$ = “Неверно, что некоторые x – четные числа” = “Не существует четных чисел” истинно на множестве M, содержащем только нечетные числа и ложно, если M содержит хотя бы одно четное число.

Буква x, стоящая справа от квантора, называется кванторной переменной и должна присутствовать обязательно. Переменная, стоящая под знаком квантора, называется также связанной переменной. Несвязанная переменная называется свободной. Выражения $\forall xP(x)$ и $\exists xP(x)$ не зависят от x и имеют вполне определенные значения. Поэтому переименование связанной переменной, т. е. переход, например, от выражения $\forall xP(x)$ к $\forall yP(y)$ не меняет его истинностного значения.

Кванторы могут применяться и к многоместным предикатам. При этом число свободных переменных уменьшается на единицу. Одноместный предикат при связывании переменной квантором становится 0-местным предикатом, т. е. высказыванием.

Формулы логики предикатов. Равносильность формул

Определение 2.2. Формула логики предикатов определяется индуктивно следующим образом:

1. Любая формула логики высказываний есть формула логики предикатов.

К новым формулам логики предикатов относятся следующие выражения:

2. Предметные переменные x, y, z, ... есть формулы.

3. Предикаты $P(x)$, $Q(x, y)$, ... , а также выражения с кванторами $\forall xP(x)$, $\exists xR(x)$, $\forall x\exists yQ(x, y)$,... есть формулы.

4. Если A и B – формулы, то $\neg A$, $A \vee B$, $A \& B$, $A \supset B$, $A \sim B$ есть формулы, в которых свободные переменные формул A и B остаются свободными, а связанные переменные формул A и B остаются связанными.

5. Ничто, кроме указанного в пунктах 1 – 4, не есть формула.

Пусть A – формула, содержащая свободную переменную x. Тогда $\forall xA$, $\exists xA$ – формулы, причем в первом случае A является областью действия квантора общности, а во втором – областью действия квантора существования.

Пример 2.5.

1. Следующие выражения являются формулами логики предикатов:

а) $A \& B \supset C$, где A, B, C – высказывания.

б) $\forall x\exists yQ(x, y, z) \& \forall x\exists yP(x, y, u)$.

Проанализируем последовательно это выражение.

Предикат $Q(x, y, z)$ – формула;

Выражение $\forall x\exists yQ(x, y, z)$ – формула; переменные x, y – связанные, переменная z – свободная.

Предикат $P(x, y, u)$ – формула.

Выражение $\forall x\exists yP(x, y, u)$ – формула; переменные x, y – связанные, переменная u – свободная.

Выражение $\forall x\exists yQ(x, y, z) \& \forall x\exists yP(x, y, u)$ – формула; переменные x, y – связанные, переменные z, u – свободные.

2. Выражение $\forall x\exists yP(x, y, z) \supset Q(x, y, z)$ формулой не является. Действительно, выражение $\forall x\exists yP(x, y, z)$ есть формула, в которой переменные x и y связанные, а переменная z свободная. Выражение $Q(x, y, z)$ также формула, но в ней все переменные x, y, z свободные.

Определение 2.3. Формулы F и G, определенные на некотором множестве M, называются равносильными на этом множестве, если при любых подстановках констант вместо переменных они принимают одинаковые значения.

Определение 2.4. Формулы, равносильные на любых множествах, будем называть просто равносильными.

Переход от одних формул к равносильным им другим формулам логики предикатов может быть произведен по следующим правилам:

1. Все равносильности, имеющие место для логики высказываний, переносятся на логику предикатов.

Пример 2.6.

а) $\exists x(A(x) \supset \forall yB(y)) \equiv \exists x(\neg A(x) \vee \forall yB(y))$.

б) $\forall xA(x) \supset (B(z) \supset \forall xC(x)) \equiv \neg(\forall xA(x)) \vee \neg B(z) \vee \forall xC(x)$.

в) $(\exists xA(x) \supset \forall yB(y)) \supset C(z) \equiv \neg(\exists xA(x) \supset \forall yB(y)) \vee C(z) \equiv \neg(\neg(\exists xA(x)) \vee \forall yB(y) \vee C(z) \equiv \exists xA(x) \& \neg(\forall yB(y)) \vee C(z)$.

2. Перенос квантора через отрицание.

Пусть A – формула, содержащая свободную переменную x. Тогда

$\neg(\forall xA(x) \equiv \exists x(\square A(x))$. (2.1)

$\neg(\exists xA(x)) \equiv \forall x\square(A(x))$. (2.2)

Правило переноса квантора через знак отрицания можно сформулировать так: знак отрицания можно ввести под знак квантора, заменив квантор на двойственный.

Справедливость равносильностей (2.1) и (2.2) вытекает из смысла кванторов. Так, левая часть (2.1) может быть прочитана следующим образом: “Неверно, что для всякого x имеет место A(x). В правой же части (2.1) утверждается: “Существует x, для которого A(x) не имеет места”. Очевидно, что оба утверждения одинаковы. В левой и правой частях (2.2) соответственно содержатся одинаковые утверждения: “Неверно, что существует x, для которого имеет место A(x)” и “Для всех x не имеет места A(x)”.

Пользуясь равносильностями (2.1) и (2.2), а также равносильностями логики высказываний, можно для каждой формулы найти такую равносильную ей формулу, в которой знаки отрицания относятся к элементарным высказываниям и элементарным предикатам.

Пример 2.7.

$\neg(\exists x(A(x) \supset \forall yB(y)) \equiv \neg(\exists x(\neg A(x) \vee \forall yB(y)) \equiv \forall x(\neg(\neg A(x) \vee \forall yB(y))) \equiv \forall x(A(x) \ \& \ \neg\forall yB(y)) \equiv \forall x(A(x) \ \& \ \exists y\neg B(y))$.

3. Вынос квантора за скобки.

Пусть формула A(x) содержит переменную x, а формула B не содержит переменной x, и все переменные, связанные в одной формуле, связаны в другой. Тогда

$\forall xA(x) \vee B \equiv \forall x(A(x) \vee B)$. (2.3)

$\forall xA(x) \& B \equiv \forall x(A(x) \& B)$. (2.4)

$\exists xA(x) \vee B \equiv \exists x(A(x) \vee B)$. (2.5)

$\exists xA(x) \& B \equiv \exists x(A(x) \& B)$. (2.6)

Докажем формулу (2.3). Пусть формула $\forall xA(x) \vee B$ истинна на некотором множестве изменения переменных M и при некоторых фиксированных значениях свободных переменных. Тогда либо формула $\forall xA(x)$, либо формула B истинна. Если истинна формула $\forall xA(x)$, то формула A(x) истинна для всякого x, принадлежащего M и, следовательно, формула $A(x) \vee B$ тоже истинна для всякого x из M. Но тогда истинна формула $\forall x(A(x) \vee B)$.

Если формула $\forall xA(x) \vee B$ ложна, то ложны формулы $\forall xA(x)$ и B. Следовательно, так как B не зависит от x, для всякого $x \in M$ формула $A(x) \vee B$ ложна. Но тогда ложна формула $\forall x(A(x) \vee B)$.

Равносильности (2.4) – (2.6) доказываются аналогично.

4. Дистрибутивность квантора общности относительно конъюнкции и квантора существования относительно дизъюнкции.

Пусть формула B, так же, как и формула A, зависит от x. Тогда

$\forall xA(x) \ \& \ \forall xB(x) \equiv \forall x(A(x) \& B(x))$. (2.7)

$\exists xA(x) \vee \exists xB(x) \equiv \exists x(A(x) \vee B(x))$. (2.8)

Докажем (2.7). Пусть правая часть (2.7) истинна, т. е. $\forall x(A(x) \ \& \ B(x)) =$ И. Тогда для любого $x_0 \in M$ истинно значение $A(x_0) \ \& \ B(x_0)$. Поэтому значения $A(x_0)$ и $B(x_0)$ одновременно истинны для любого x_0. Следовательно, истинна формула $\forall xA(x) \ \& \ \forall xB(x)$.

Если же правая часть (2.7) ложна, то для некоторого $x_0 \in M$ либо значение $A(x_0)$, либо значение $B(x_0)$ ложно. Значит, ложно либо $\forall xA(x_0)$, либо $\forall xB(x_0)$. Следовательно, $\forall xA(x) \ \& \ \forall xB(x)$ ложно.

Равносильность (2.8) доказывается аналогично.

Дистрибутивные законы для квантора общности относительно дизъюнкции и квантора существования относительно конъюнкции, вообще говоря, не имеют места, т. е. формулы

$\forall xA(x) \vee \forall xB(x)$ и $\forall x(A(x) \vee B(x))$, а также $\exists xA(x) \ \& \ \exists xB(x)$ и $\exists x(A(x) \ \& \ B(x))$

не являются равносильными, хотя они могут быть равносильными на некоторых множествах M.

Пример 2.8.

Показать, что формулы $\forall x(A(x) \vee B(x))$ и $\forall xA(x) \vee \forall xB(x))$ не равносильны.

Пусть M – множество натуральных чисел, A(x) = “x – четное число”, B(x) = “x – нечетное число”. Тогда

$\forall x(A(x) \vee B(x))$ = “Всякое натуральное число четное или нечетное” = И.

$\forall xA(x)$ = “Всякое натуральное число – четное” = Л,

$\forall xB(x)$ = “Всякое натуральное число – нечетное” = Л,

$\forall xA(x) \vee \forall xB(x)$ = “Всякое натуральное число четное или всякое натуральное число нечетное” = Л,

т. е. формулы $\forall x(A(x) \vee B(x))$ и $\forall xA(x) \vee \forall xB(x)$ не равносильны.

Пример 2.9.

Показать, что формулы $\exists x(A(x) \& B(x))$ и $\exists xA(x) \& \exists xB(x)$ не равносильны.

Пусть A(x) = “У x голубые глаза”, B(x) = “У x черные глаза”. Тогда

$\exists x(A(x) \& B(x))$ = “У некоторых голубые и черные глаза” = Л,

$\exists xA(x)$ = “У некоторых голубые глаза” = И,

$\exists xB(x)$ = “У некоторых черные глаза” = И,

$\exists xA(x) \& \exists xB(x)$ = “У некоторых голубые, и у некоторых черные глаза” = И

т. е. формулы $\exists x(A(x) \& B(x))$ и $\exists xA(x) \& \exists xB(x)$ не равносильны.

5. Перестановка одноименных кванторов.

$$\forall x\forall yA(x,y) \equiv \forall y\forall xA(x,y). \qquad (2.9)$$

$$\exists x\exists yA(x,y) \equiv \exists y\exists xA(x,y). \qquad (2.10)$$

Разноименные кванторы переставлять, вообще говоря, нельзя.

Пример 2.10.

Пусть M – множество натуральных чисел, A(x, y) = “x > y”.

а) $\forall x\forall yA(x, y)$ = “Для всех x и y имеет место x > y” = Л;

$\forall y\forall xA(x, y)$ = “Для всех y и x имеет место x > y” = Л;

$\forall x\forall yA(x, y) \equiv \forall y\forall xA(x, y)$.

б) $\exists x\exists yA(x, y)$ = “Существуют такие x и y, что x > y” = И;

$\exists y\exists xA(x, y)$ = “Существуют такие y и x, что x > y” = И;

$\exists x\exists yA(x, y) \equiv \exists y\exists xA(x, y)$.

в) $\exists x\forall yA(x, y)$ = “Существует такое x, что для всякого y имеет место x > y” = Л (утверждается существование максимального числа на множестве натуральных чисел);

$\forall y\exists xA(x, y)$ = “Для всякого y существует такое x, что x > y” = И;

$\exists x\forall yA(x, y) \neq \forall y\exists xA(x, y)$.

г) A(x, y) = “Книгу x читал человек y”.

$\forall x\exists yA(x, y)$ = “Каждую книгу читал кто-нибудь” = И (например автор книги читал свою книгу);

$\exists y\forall xA(x, y)$ = “Существует человек, который читал все книги” = Л;

$\forall x\exists yA(x, y) \neq \exists y\forall xA(x, y)$.

6. Переименование связанных переменных.

Заменяя связанную переменную формулы A другой переменной, не входящей в эту формулу, всюду: в кванторе и в области действия квантора, получим формулу, равносильную A.

Пример 2.11.

$A = \forall xF(x) \supset \exists xG(x)$.

Заменяя связанную переменную x на y в первом члене импликации и на z во втором, получим равносильную формулу:

$B = \forall yF(y) \supset \exists zG(z)$.

$A \equiv B$.

7. В п. 4. была доказана дистрибутивность квантора общности относительно конъюнкции и квантора существования относительно дизъюнкции (тождества (2.7) и (2.8)). Этот факт означает, что в вышеуказанных случаях соответствующие кванторы могут быть вынесены за скобки и помещены впереди формулы, что и демонстрируют тождества (2.7) и (2.8).

Рассмотрим теперь случай, когда закон дистрибутивности, вообще говоря не применим. Сначала рассмотрим формулу $\forall xA(x) \vee \forall xB(x)$ и применим правило переименования переменных. Получим

$\forall xA(x) \vee \forall xB(x) \equiv \forall xA(x) \vee \forall yB(y)$. (2.11)

Так как $\forall yB(y)$ не зависит от x, справедлива равносильность (2.3), причем $B = \forall yB(y)$. Поэтому в соответствии с (2.3) можно вынести за скобки $\forall x$:

$\forall xA(x) \vee \forall yB(y) \equiv \forall x(A(x) \vee \forall yB(y))$. (2.12)

Так как A(x) не зависит от y, справедлива равносильность (2.3), причем на этот раз B = A(x). Поэтому в соответствии с (2.3) можно вынести за скобки $\forall y$:

$A(x) \vee \forall yB(y) \equiv \forall y(A(x) \vee B(y))$ (2.13)

Учитывая (2.11), (2.12), (2.13), получим:

$\forall xA(x) \vee \forall xB(x) \equiv \forall x\forall y(A(x) \vee B(y))$. (2.14)

Таким образом за скобки выносятся два квантора $\forall x$ и $\forall y$, а выражение в скобках не содержит знаков квантора.

Проведем аналогичные выкладки для формулы $\exists xA(x)\ \&\ \exists xB(x)$:

$$\exists xA(x)\ \&\ \exists xB(x) \equiv \exists xA(x)\ \&\ \exists yB(y) \equiv$$
$$\equiv \exists x(A(x)\ \&\ \exists yB(y)) \equiv \exists x\exists y(A(x)\ \&\ B(y)). \quad (2.15)$$

Аналогично можно доказать следующие равносильности:

$\forall xA(x) \vee \exists xB(x) \equiv \forall x\exists y(A(x) \vee B(y))$. (2.16)

$\forall xA(x)\ \&\ \exists xB(x) \equiv \forall x\exists y(A(x)\ \&\ B(y))$. (2.17)

Приведенные и нормальные формулы

Определение 2.5. Формулы, в которых из логических символов имеются только символы &, V и $\neg$, причем символ $\neg$ встречается лишь перед символами предикатов, называются приведенными формулами.

Пример 2.12.

1. $A(x)\&B(x, y)$.
2. $\forall xA(x) \vee \exists x\neg B(x, y)$.
3. $\neg(A(x)\&B(x, y))$.
4. $\forall xA(x) \supset \exists x\neg B(x, y)$.
5. $\neg(\forall xA(x) \supset \exists x\neg B(x, y))$.

Первые две формулы в соответствии с определением являются приведенными, остальные не являются приведенными. В третьей формуле знак отрицания стоит перед формулой, а не перед символами предикатов. В четвертой формуле используется недопустимый для приведенной формулы символ импликации $\supset$. В пятой формуле знак отрицания стоит перед формулой и используется недопустимый для приведенной формулы символ импликации.

Теорема 2.1. Для каждой формулы существует равносильная ей приведенная формула, причем множества свободных и связанных переменных этих формул совпадают.

Действительно, пользуясь равносильностями логики высказываний, можно получить формулу, содержащую только символы &, V и $\neg$. Применяя затем правило переноса квантора через знак отрицания, можно получить равносильную приведенную формулу. Такая приведенная формула называется приведенной формулой данной формулы. Строгое доказательство теоремы 2.1 содержится, например, в [6].

Пример 2.13.

Рассмотрим третью, четвертую и пятую формулы примера 2.12 и получим для них приведенные формулы.

Для третьей формулы по закону де Моргана:

$\neg(A(x)\&B(x, y)) \equiv \neg A(x) \vee \neg B(x, y)$.

Для четвертой формулы:

$\forall xA(x) \supset \exists x\neg B(x, y) \equiv \neg\forall xA(x) \vee \exists x\neg B(x, y) \equiv \exists x\neg A(x) \vee \exists x\neg B(x, y)$.

Для пятой формулы:

$\neg(\forall xA(x) \supset \exists x\neg B(x, y)) \equiv \neg(\exists x\neg A(x) \vee \exists x\neg B(x, y)) \equiv \neg(\exists x\neg A(x)) \,\&\, \neg(\exists x\neg B(x, y)) \equiv \forall xA(x) \,\&\, \forall xB(x, y)$.

Определение 2.6. Приведенная формула называется нормальной, если она не содержит символов кванторов или все символы кванторов стоят впереди.

Пример 2.14.

1. $\forall x\exists y(\neg A(x) \vee B(x, y))$ – нормальная формула.
2. $\forall x(\neg A(x)) \,\&\, \exists yB(x, y)$ – приведенная формула, не являющаяся нормальной.

Теорема 2.2. Для каждой приведенной формулы существует равносильная ей нормальная формула.

Строгое доказательство теоремы 2.2 приведено в [6].

Алгоритм, позволяющий из приведенной формулы получить равносильную ей нормальную формулу, основан на правиле переименования связанных переменных и использовании равносильностей (2.3) – (2.8), (2.14) и (2.17).

Пусть Q – любой из кванторов $\forall$, $\exists$.

Воспользуемся равносильными преобразованиями (см.предыдущий раздел):

$QxA(x) \vee B \equiv Qx(A(x) \vee B)$ (2.18)

$QxA(x) \,\&\, B \equiv Qx(A(x) \,\&\, B)$. (2.19)

В тождествах (2.18), (2.19) формула B не зависит от x.

$Q_1xA(x) \,\&\, Q_2xB(x) \equiv Q_1xQ_2z(A(x) \& B(z))$ (2.20)

$Q_1xA(x) \vee Q_2xB(x) \equiv Q_1xQ_2z(A(x) \vee B(z))$ (2.21)

Тождества (2.18) и (2.19) есть обобщенная запись равносильных преобразований (2.3) – (2.6), а тождества (2.20) и (2.21) обобщают равносильности (2.14) – (2.17).

Мы видим, что тождества (2.18) – (2.21) позволяют поместить кванторы впереди формулы, что и требуется для нормальной формулы.

Пример 2.15.

Найти равносильную нормальную формулу для приведенной формулы: $\forall x\exists yA(x, y) \,\&\, \exists x\exists u(x, u)$.

В формуле $\exists yA(x, y)$ переменная y связана, поэтому $\exists yA(x, y)$ не зависит от y. Обозначим $D(x) = \exists yA(x, y)$.

В формуле $\exists uB(x, u)$ переменная u связана, поэтому $\exists uB(x, u)$ не зависит от u . Обозначим $F(x) = \exists uB(x, u)$.

Тогда $\forall x\exists yA(x, y) \,\&\, \exists x\exists uB(x, u) = \forall xD(x) \,\&\, \exists xF(x)$. (2.22)

Применим равносильность (2.20), имея в виду, что Q_1x есть $\forall x$, а Q_2x есть $\exists x$. Получим

$\forall xD(x) \,\&\, \exists xF(x) \equiv \forall x\exists z(D(x) \,\&\, F(z))$. (2.23)

Рассмотрим формулу $D(x) \,\&\, F(z) = \exists yA(x, y) \,\&\, \exists uB(z, u)$. Применив два раза равносильность (2.19), получим

$\exists yA(x, y) \,\&\, \exists uB(z, u) \equiv \exists y(A(x, y) \,\&\, \exists uB(z, u)) \equiv \exists y\exists u\,(A(x, y) \,\&\, B(z, u))$. (2.24)

Учитывая (2.21), (2.22), (2.23), получим окончательно

$\forall x\exists yA(x, y) \,\&\, \exists x\exists uB(x, u) \equiv \forall x\exists z\exists y\exists u(A(x, y) \,\&\, B(z, u))$. (2.25)

В тождестве (2.25) в левой части – исходная формула, а в левой части ее нормальная формула.

Теорема 2.3. Для каждой формулы существует равносильная ей нормальная формула.

Теорема 2.3. является очевидным следствием теорем 2.1 и 2.2.

Пример 2.16.

Найти равносильную нормальную формулу для формулы: $\forall x\exists yA(x, y) \supset \exists x\exists uB(x, u)$.

1. Найдем вначале приведенную формулу, равносильную данной. Избавимся от символа $\supset$:

$\forall x\exists yA(x, y) \supset \exists x\exists u(x, u) \equiv \neg(\forall x\exists yA(x, y)) \vee \exists x\exists uB(x, u)$.

Применим равносильности (2.1) и (2.2) (перенос квантора через отрицание):

$\neg(\forall x\exists yA(x, y)) \equiv \exists x\forall y\neg A(x, y)$,

Следовательно,

$\forall x\exists yA(x, y) \supset \exists x\exists uB(x, u) \equiv \exists x\forall y\neg A(x, y) \vee \exists x\exists uB(x, u)$. (2.26)

Правая часть тождества (2.26) – приведенная формула, равносильная данной.

2. Найдем теперь нормальную формулу, равносильную приведенной формуле $\exists x\forall y\neg A(x, y) \vee \exists x\exists uB(x, u)$. Проделаем преобразование этой формулы, аналогично предыдущему примеру:

$\exists x\forall y\neg A(x, y) \vee \exists x\exists uB(x, u) \equiv \exists x\forall y\neg A(x, y) \vee \exists z\exists uB(z, u) \equiv \forall x\exists z(\forall y\neg A(x, y) \vee \exists uB(z, u)) \equiv \forall x\exists z\forall y\exists u(\neg A(x, y) \vee B(z, u))$. (2.27)

В правой части (2.27) – нормальная формула, равносильная исходной.

Выражение суждения в виде формулы логики предикатов

Существуют две задачи, определяющие связь между суждениями и формулами логики предикатов:

1) выражение суждения в виде формулы логики предикатов;

2) интерпретация формулы логики предикатов.

Рассмотрим первую задачу.

Суждение – это мысль, в которой утверждается наличие или отсутствие свойств предметов, отношений между предметами.

Простым суждением назовем суждение, в котором нельзя выделить часть, в свою очередь являющуюся суждением. Среди простых суждений выделяют атрибутивные суждения и суждения об отношениях.

В атрибутивных суждениях выражается наличие или отсутствие у предметов некоторых свойств. Например, "Иванов - спортсмен", "Все сладкоежки любят конфеты", "Ни один студент нашей группы не знает испанский язык", "Некоторые океаны имеют пресную воду".

Все атрибутивные суждения можно разделить на следующие типы: "a есть P", "Все S есть P", "Ни один S не есть P", "Некоторые S есть P", "Некоторые S не есть P". Эти суждения следующим образом переводятся на язык логики предикатов:

"a есть P" – $P(a)$;

"Все S есть P" – $\forall x(S(x) \supset P(x))$;

"Ни один S не есть P" – $\forall x(S(x) \supset \neg P(x))$;

"Некоторые S есть P" – $\exists x(S(x) \& P(x))$;

"Некоторые S не есть P" – $\exists x(A(x) \& \neg P(x))$.

Полезно понять и запомнить следующее правило: если кванторная переменная связана квантором общности ($\forall$), то в формуле используется знак импликации ($\supset$), а если кванторная переменная связана квантором существования ($\exists$), то в формуле используется знак конъюнкции (&).

Пример 2.17.

Перевести на язык логики предикатов следующие суждения:

а) Веста – собака.

Заменим имя "Веста" символом "в" и введем предикат P(x) = "x – собака".

Наше суждение можно выразить формулой: P(в).

б) Всякая логическая функция может быть задана таблицей.

Введем предикаты S(x) = "x – логическая функция"; P(x) = "x может быть задана таблицей".

Наше суждение можно выразить формулой: $\forall x(S(x) \supset P(x))$.

в) Ни один народ не хочет войны.

Введем предикаты S(x) = "x – народ"; P(x) = "x хочет войны".

Наше суждение можно выразить формулой: $\forall x(S(x) \supset \neg P(x))$.

г) Некоторые журналисты были в космосе.

Введем предикаты S(x) = "x – журналист"; P(x) = "x был в космосе".

Наше суждение можно выразить формулой: $\exists x(S(x) \,\&\, P(x))$.

д) Некоторые современники динозавров не вымерли.

Введем предикаты S(x) = "x – современник динозавров"; P(x) = "x вымер".

Наше суждение можно выразить формулой: $\exists x(A(x) \,\&\, \neg P(x))$.

Суждения об отношениях выражают отношения между двумя, тремя и т. д. объектами. При переводе этих суждений в формулы используют многоместные предикаты и правила, рассмотренные выше. При переводе отрицаний суждений на язык формул применяется правило переноса квантора через знак отрицания и другие равносильные преобразования.

Пример 2.18.

Суждение “Некоторые студенты сдали все экзамены” записать в виде формулы логики предикатов. Построить отрицание данного суждения в виде формулы, не содержащей внешних знаков отрицания. Перевести на естественный язык.

Введем предикаты: A(x) = “x – студент”; B(y) = “y – экзамен”, C(x, y) = ”x сдал экзамен y”. Тогда предложение “Некоторые студенты сдали все экзамены” можно записать в виде следующей формулы:

$\exists x \forall y(A(x) \& B(y) \supset C(x, y))$.

Построим отрицание этой формулы, применяя равносильные преобразования:

$\neg\exists x\forall y(A(x)\&B(y) \supset C(x, y))) \equiv \forall x\exists y(\neg(A(x)\&B(y) \supset C(x, y)) \equiv \forall x\exists y(A(x)\&B(y)\& \neg C(x, y))$.

Это предложение можно прочитать следующим образом:

“Каждый студент не сдал хотя бы один экзамен”.

Язык логики предикатов удобен для записи математических предложений: определений, теорем, необходимых и достаточных условий (см., например [5]).

Пример 2.19.

Записать на языке логики предикатов следующее определение предела числовой последовательности: "Число a является пределом числовой последовательности $\{a_n\}$, если для любого положительного числа ε существует такой номер n_0, что для всех натуральных чисел n, больших или равных n_0, справедливо неравенство: $|a_n - a| < \varepsilon$".

Введем предикаты: $P(\varepsilon)$ = "$\varepsilon > 0$"; Q(n) = "n – натуральное число"; $R(n, n_0)$ = "$n \geq n_0$"; $S(n, \varepsilon)$ = "$|a_n - a| < \varepsilon$".

Определение предела последовательности может быть записано следующей формулой:

$\forall\varepsilon\exists n_0\forall n(P(\varepsilon)\&Q(n)\&Q(n_0)\&R(n, n_0) \supset S(n, \varepsilon))$.

Пример 2.20.

Записать в виде формулы логики предикатов великую теорему Ферма (была доказана в 1996 г. Э. Вайлсом (Andrew Wiles)): "Для любого целого n > 2 не существует натуральных чисел x, y, z, удовлетворяющих равенству: $x^n + y^n = z^n$".

Введем предикаты: N(x) = "x – натуральное число"; M(x) = "x > 2"; P(x, y, z, n) = "$x^n + y^n = z^n$".

Для любых чисел x, y, z, n условие (посылка) теоремы Ферма есть конъюнкция N(x)&N(y)&N(z)&N(n)&M(n), а заключение есть ¬P(x, y, z, n). Поэтому теорема Ферма формулируется следующим образом:

$\forall x \forall y \forall z \forall n(N(x)\&N(y)\&N(z)\&N(n)\&M(n) \supset \neg P(x, y, z, n))$.

Если теорема имеет вид $\forall x(P(x) \supset Q(x))$, то предикат Q(x) является следствием предиката P(x). При этом предикат Q(x) называется необходимым условием предиката P(x), а предикат P(x) – достаточным условием предиката Q(x).

Пример 2.21.

Запишем в виде формулы логики предикатов утверждение: "Если число делится на 6, то оно делится на 3".

Введем предикаты P(x) = "x делится на 6"; Q(x) = "x делится на 3". Наше утверждение формулируется следующим образом: $\forall x(P(x) \supset Q(x))$.

Предикат P(x) (делимость на 6) является достаточным условием предиката Q(x) (делимость на 3). Предикат Q(x) (делимость на 3) является необходимым условием предиката P(x) (делимость на 6).

Интерпретация формулы логики предикатов в виде суждения. Выполнимость. общезначимость

Формула есть перевод содержательного рассуждения в формальное рассуждение. Формула имеет смысл только тогда, когда имеется какая-нибудь интерпретация входящих в нее символов. Каждая интерпретация состоит в указании множества M изменения предметных переменных и задании отношения между переменными с помощью предикатов.

Для данной интерпретации формула представляет собой высказывание, если переменные связаны кванторами, а если есть свободные переменные, то формула есть предикат, который может быть истинным для одних значений переменных из области интерпретации и ложным для других.

Пример 2.22.

Пусть M – множество целых положительных чисел, и дан предикат A(x, y) = “$x \le y$”.

Рассмотрим следующие формулы:

1)A(x, y);

2) $\forall y A(x, y)$;

3) $\exists x \forall y A(x, y)$.

Первая формула – это предикат, который является истинным высказыванием для всех пар целых положительных чисел (a, b), таких, что $a \le b$.

Вторая формула – предикат “Для всякого целого положительного числа y имеет место $x \le y$”, который является истинным только для x = 1.

Третья формула – высказывание “Существует такое x, что для всякого y имеет место $x \le y$”. Оно является истинным и соответствует тому, что на множестве M есть наименьшее число (единица).

Пусть задаио множество M изменения предметных переменных формулы $A(x_1, x_2, \dots, x_n)$, т. е. $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in M$.

Определение 2.7. Формула A называется выполнимой в данной интерпретации, если существует набор значений переменных $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in M$, для которого $A(a_1, a_2, \dots, a_n) = И$.

Определение 2.8. Формула А называется истинной в данной интерпретации, если $A(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ = И на любом наборе своих переменных $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in M$.

Определение 2.9. Формула А называется общезначимой или тождественно-истинной, если она истинна в каждой интерпретации.

Определение 2.10. Формула А называется выполнимой, если существует интерпретация, для которой она выполнима.

Проблема разрешимости для логики предикатов, так же, как и для логики высказываний (см. раздел 1.5) заключается в том, чтобы установить, является ли произвольная формула тождественно-истинной.

Но, если для логики высказываний эта проблема решается положительно, то для логики предикатов неразрешимость этой проблемы устанавливает следующая теорема:

Теорема 2.4. (Теорема Черча). Не существует алгоритма, который для любой формулы логики предикатов устанавливает, общезначима она или нет.

Однако, для одноместных предикатов проблема разрешимости решается положительно.

В общем случае выделение общезначимых формул логики предикатов возможно в рамках аксиоматического подхода, который будет рассмотрен ниже (см. раздел 3.3).

2.3.3. ФОРМАЛЬНЫЕ АКСИОМАТИЧЕСКИЕ ТЕОРИИ (ИСЧИСЛЕНИЯ)

Принципы построения формальных теорий

Формальная аксиоматическая теория считается заданной, если заданы:

1. Символы. Задано некоторое счетное множество символов теории.

2. Формулы. Определено некоторое множество формул, или правильно построенных выражений. Формулы задают язык теории.

2. Аксиомы. Выделяется множество формул, называемых аксиомами теории. Это множество может быть как конечным, так и бесконечным.

4. Правила вывода. Задаются правила вывода как некоторые отношения на множестве формул. Если формулы $A_1, A_2, \ldots, A_k$, B находятся в отношении R, то формула B называется непосредственно выводимой из $A_1, A_2, \ldots, A_k$ по правилу R. Это часто записывается следующим образом: $\dfrac{A_1, A_2, \ldots, A_k}{B}$.

Выводом формулы B из множества формул $\Gamma = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ называется последовательность формул $B_1, B_2, \ldots, B_m$, такая, что B_m есть B, и для любого i, $i = 1, 2, \ldots, m$, B_i – либо аксиома, либо формула из Г, либо непосредственно выводима из предыдущих формул. $B_1, B_2, \ldots, B_{i-1}$. Это обозначается так: $\Gamma \vdash B$ (B есть следствие Г) или $A_1, A_2, \ldots, A_n \vdash B$. Формулы $A_1, A_2, \ldots, A_n$ называются допущениями или гипотезами, про формулу B говорят, что она выводима из $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

Если Г – пустое множество, то А – теорема, а ее вывод называется доказательством. В этом случае пишут $\vdash A$.

Во всякой формальной теории существуют три проблемы, связанные с системой аксиом:

1) проблема непротиворечивости;

2) проблема независимости;

3) проблема полноты.

Для того, чтобы доказать, что система аксиом непротиворечива, необходимо и достаточно доказать, что какова бы ни была формула F, выводимая в рассматриваемой теории, формула $\neg F$ не является выводимой в этой теории.

Доказательство независимости системы аксиом состоит в доказательстве невыводимости никакой из аксиом системы из других аксиом.

Проблема полноты состоит в доказательстве следующего факта. Какова бы ни была аксиома, не содержащаяся среди аксиом данной теории, добавление ее к исходной системе приводит к тому, что расширенная система аксиом становится противоречивой.

Исчисление высказываний

В соответствии с общими принципами построения формальных систем (исчислений) исчисление высказываний определяется следующим образом.

1 Символы исчисления высказываний включают в себя: а) знаки логических операций $\neg$, $\supset$; б) буквы X_i с целыми положительными индексами i; в) скобки и запятую – (,).

2. Формулами исчисления высказываний являются:

а) все переменные X_i;

б) если A и B – формулы, то $\neg A$ – формула и $A \supset B$ – формула.

Хотя для исчисления высказываний выбраны только два логических символа $\neg$и $\supset$ и только два типа формул $\neg A$ и $A \supset B$, можно с помощью следующих известных равносильностей ввести и другие логические символы и формулы:

$A \,\&\, B \equiv \neg(A \supset \neg B)$;

$A \vee B \equiv \neg A \supset B$;

$A \sim B \equiv \neg((A \supset B) \supset \neg(B \supset A))$.

3. Аксиомы исчисления высказываний. Существуют различные системы аксиом исчисления высказываний, обладающие свойствами непротиворечивости, независимости и полноты. Будем использовать следующую систему аксиом:

A1. $A \supset (B \supset A)$;

A2. $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$;

A3. $(\neg B \supset \neg A) \supset ((\neg B \supset A) \supset B)$.

Непосредственной проверкой можно убедиться, что аксиомы есть тождественно-истинные формулы. Например, для аксиомы A1:

$A \supset (B \supset A) \equiv \neg A \vee \neg B \vee A \equiv$ И.

4. Правило вывода в исчислении высказываний одно – modus ponens (m. p.) – правило заключения:

$\dfrac{A, A \supset B}{B}$, или $A, A \supset B \vdash B$.

Аксиомы исчисления высказываний являются формулами. Аксиомы и формулы можно рассматривать как схемы, так что любую входящую в них переменную можно заменять формулами.

Пример 3.1.

Если в правиле modus ponens переменную B заменить формулой A&B, получим правило вывода

$\dfrac{A, A \supset A \,\&\, B}{A \,\&\, B}$.

Всякую выведенную в исчислении высказываний формулу можно рассматривать как правило вывода, которое может быть присоединено к уже имеющимся правилам.

Вывод формулы представляет собой последовательность формул, сопровождаемых указаниями, является ли данная формула гипотезой, аксиомой или получена из других формул по некоторому правилу вывода. Принято вначале выписать все гипотезы и слева указывать номер шага вывода.

Пример 3.2.

Построим вывод формулы $A \vdash B \supset A$.

(1) A – гипотеза;

(2) $A \supset (B \supset A)$ – аксиома A1;

(3) $\dfrac{A, A \supset (B \supset A)}{B \supset A}$ – из (1) и (2) по m. p.

Очевидно, что любую равносильную формулу можно рассматривать как правило вывода. Например, закон де Моргана может быть представлен как следующее правило вывода: $\dfrac{\neg(A \,\&\, B)}{\neg A V \neg B}$. Равносильность А ⊃ В ≡ ¬В ⊃ ¬А порождает закон контрапозиции: $\dfrac{A \supset B}{\neg B \supset \neg A}$.

С учетом сказанного перечислим правила вывода исчисления высказываний.

1. Введение конъюнкции: $\dfrac{A, B}{A \,\&\, B}$.

2. Удаление конъюнкции: $\dfrac{A \,\&\, B}{A}$ и $\dfrac{A \,\&\, B}{B}$.

3. Отрицание конъюнкции: $\dfrac{\neg(A \,\&\, B)}{\neg A V \neg B}$.

4. Введение дизъюнкции: $\dfrac{A}{AVB}$ и $\dfrac{B}{AVB}$.

5. Удаление дизъюнкции: $\dfrac{AVB, \neg A}{B}$ и $\dfrac{AVB, \neg B}{A}$.

6. Отрицание дизъюнкции: $\dfrac{\neg(AVB)}{\neg A \,\&\, \neg B}$.

7. Введение импликации: $\dfrac{A}{B \supset A}$.

8. Удаление импликации: $\dfrac{\mathrm{A}, \mathrm{A} \supset \mathrm{B}}{B}$ (m. p.) и $\dfrac{\neg\mathrm{B}, \mathrm{A} \supset \mathrm{B}}{\neg A}$.

9. Отрицание импликации: $\dfrac{\neg(\mathrm{A} \supset \mathrm{B})}{A \,\&\, \neg B}$.

10. Введение эквивалентности: $\dfrac{\mathrm{A} \supset \mathrm{B}, B \supset A}{A \sim B}$.

11. Удаление эквивалентности: $\dfrac{A \sim B}{A \supset B}$ и $\dfrac{A \sim B}{B \supset A}$.

12. Введение отрицания: $\dfrac{A}{\neg\neg A}$.

13. Удаление отрицания: $\dfrac{\neg\neg A}{A}$.

14. Закон контрапозиции: $\dfrac{A \supset B}{\neg B \supset \neg A}$.

Для построения выводов в исчислении высказываний полезной оказывается следующая теорема.

Теорема дедукции (без доказательства). Пусть Г – множество формул, А и В – формулы, и имеет место вывод: Г, А ⊢ В. Тогда имеет место следующий вывод: Г ⊢ А ⊃ В.

Таким образом, если нужно вывести формулу вида А ⊃ В из множества формул (возможно, пустого), можно использовать дополнительное допущение А.

Важным следствием теоремы дедукции является правило силлогизма (дается без доказательства):

Правило силлогизма (транзитивный вывод).

А ⊃В, В ⊃С ⊢А⊃С.

Рассмотрим примеры построения вывода в исчислении высказываний.

Пример 3.3.

а) Обосновать вывод А ⊃ (В ⊃ С), А&В ⇒ С.

(1) $A \supset (B \supset C)$ – гипотеза;

(2) $A\&B$ – гипотеза;

(3) A – из (2) и правила удаления конъюнкции;

(4) $B \supset C$ – из (1), (3) и m. p.

(5) B – из (2) и правила удаления конъюнкции;

(6) C – из (4), (5) и m. p.

б) Обосновать правильность следующего рассуждения, построив вывод:

Если число целое, то оно рациональное, Если число рациональное, то оно действительное. Число целое. Значит, оно действительное.

Сначала формализуем наше рассуждение, введя следующие высказывания:

A = “число целое”.

B = “число рациональное”.

C = “число действительное”.

Нужно построить следующий вывод: $A \supset B, B \supset C, A \Longrightarrow C$.

Построим этот вывод.

(1) $A \supset B$ – гипотеза;

(2) $B \supset C$ – гипотеза;

(3) A – гипотеза;

(4) $A \supset C$ – из (1) и (2) по правилу силлогизма;

(5) C – из (3) и (4) по m. p.

в) Обосновать правильность следующего рассуждения, построив вывод:

Если бы Иван был умнее Петра, он решил бы эту задачу. Иван не решил эту задачу. Значит, он не умнее Петра.

Формализуем наше рассуждение, введя следующие высказывания:

A = “Иван умнее Петра”.

B = “Иван решил эту задачу”.

Построим следующий вывод: $A \supset B, \neg B \Longrightarrow \neg A$.

(1) $A \supset B$ – гипотеза;

(2) $\neg B$ – гипотеза;

(3) $\neg B \supset \neg A$ – из (1) по закону контрапозиции;

(4) $\neg A$ – из (3) и (2) по m. p.

Исчисление предикатов

Исчисление предикатов определяется следующим образом.

1. Символы исчисления предикатов включают в себя: а) символы предметных переменных $x_1, x_2,\ldots, x_n, \ldots$; б) символы предметных констант $a_1, a_2,\ldots, a_n, \ldots$; в) символы или имена предикатов $A_1^1, A_2^1, \ldots A_k^j, \ldots$; г) символы или имена функций $f_1^1, f_2^1, \ldots f_k^j, \ldots$; д) знаки логических операций $\neg, \supset$; е) символы кванторов $\forall, \exists$; ж) скобки и запятую – (,) ,.

Верхние индексы указывают число аргументов, а нижние индексы служат для обычной нумерации.

2. Понятие формулы исчисления предикатов определяется в два этапа [4].

1) Термы:

а) предметные переменные $x_1, x_2,\ldots, x_n, \ldots$ и константы $a_1, a_2,\ldots, a_n, \ldots$;

б) если f^n – имя функции, а $t_1, t_2,\ldots, t_n$ – термы, то $f^n(t_1, t_2,\ldots, t_n)$ – тоже терм.

2) Формулы:

а) если A^n – имя предиката, а $t_1, t_2,\ldots, t_n$ – термы, то $A^n(t_1, t_2,\ldots, t_n)$ – формула; все вхождения переменных в формулу $A^n(t_1, t_2,\ldots, t_n)$ являются свободными;

б) если $A(x)$ – формула, содержащая свободное вхождение переменной x, то выражения с кванторами $\forall x A(x)$, $\exists x A(x)$ – формулы;

в) если A и B – формулы, то $\neg A$, $A \supset B$ – формулы, в которых свободные переменные формул A и B остаются свободными, а связанные переменные формул A и B остаются связанными.

Так же, как и в исчислении высказываний, можно ввести знаки других логических операций (&, V, ~), используя соответствующие равносильности.

Введение в исчисление предикатов термов расширяет правила образования формул, так как предметные переменные в элементарных предикатах могут быть заменены термами.

Подстановка терма y в формулу A(x) называется правильной, если и только если:

а) y является предметной константой;

б) y является предметной переменной, и все вхождения y, полученные в результате подстановки, оказываются свободными в полученной в результате подстановки формуле. Например, в формулу $\forall y(P(x, y) \supset Q(x))$ вместо x можно подставить либо константу a: $\forall y(P(a, y) \supset Q(a))$, либо переменную z: $\forall y(P(z, y) \supset Q(z))$, но нельзя подставить переменную y, так как после подстановки получим формулу: $\forall y(P(y, y) \supset Q(y))$, в которой переменная y оказывается связанной.

3. Аксиомы исчисления предикатов.

A1. $A \supset (B \supset A)$.

A2. $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$.

A3. $(\neg B \supset \neg A) \supset ((\neg B \supset \neg A) \supset B)$.

A4. $\forall x A(x) \supset A(y)$, где формула A(x) не содержит переменной y.

A5. $A(x) \supset \exists y A(y)$, где формула A(x) не содержит переменной y.

4. Правил вывода в исчислении предикатов четыре:

П1 – modus ponens (m. p.) – правило заключения:

$$\frac{A, A \supset B}{B};$$

П2 – правило связывания квантором общности:

$$\frac{B \supset A(x)}{B \supset \forall x A(x)}$$, где формула B не содержит переменной x;

П3– правило связывания квантором существования:

$$\frac{A(x) \supset B}{\exists x A(x) \supset B}$$, где формула B не содержит переменной x;

П4 – правило переименования связанной переменной. Связанную переменную в формуле A можно заменить (в кванторе и во всех вхождениях в области действия квантора) другой переменной, не являющейся свободной в A. Например, для формулы $\forall x F(x) \supset \exists x G(x)$ применяя правило переименования, получим формулу $\forall y F(y) \supset \exists z G(z)$.

Для правил П2 и П3 условие, что формула B не содержит переменной x, является существенным. Это подтверждает следующий пример.

Пример 3.4.

Даны два предиката: B(x) = "x делится на 6"; A(x) = "x делится на 3".

Тогда $B(x) \supset A(x)$ = "Если x делится на 6, то x делится на 3" = И для всех x.

Однако $B(x) \supset \forall x A(x)$ = "Если x делится на 6, то все x делятся на 3" не всегда истинно. Таким образом, применение правила П2 неправомерно, если B зависит от x.

Если же к формуле $B(x) \supset A(x)$ применить правило П3, то получим $\exists x B(x) \supset A(x)$. После применения правила П2 получим $\exists x B(x) \supset \forall x A(x)$ = "Если некоторые x делится на 6, то все x делятся на 3" = Л. Таким образом, применение правила П3 также неправомерно, если B зависит от x.

Для исчисления предикатов верны правила вывода 1 – 14 исчисления высказываний (раздел 3.2).

Дополнительные правила вывода для исчисления предикатов следующие:

1. Введение квантора общности: $\dfrac{A(y)}{\forall x A(x)}$, где A(y) – результат правильной подстановки переменной y вместо x в A(x).

2. Удаление квантора общности: $\dfrac{\forall x A(x)}{A(y)}$, где A(y) – результат правильной подстановки терма y вместо x в A(x).

3. Отрицание квантора общности: $\dfrac{\neg\forall x A(x)}{\exists x \neg A(x)}$.

4. Введение квантора существования: $\dfrac{A(y)}{\exists x A(x)}$, где A(y) – результат правильной подстановки терма y вместо x в A(x).

5. Удаление квантора существования: $\dfrac{\exists y A(y)}{A(x)}$, где A(x) – результат правильной подстановки переменной x вместо y в A(y).

6. Отрицание квантора существования: $\dfrac{\neg\exists x A(x)}{\forall x \neg A(x)}$.

Верна также теорема дедукции. Если Г – множество формул, A и B – формулы, и Г, A $\vdash$B. Тогда Г $\vdash$ A $\supset$ B.

Сформулируем без доказательства важные утверждения для исчисления предикатов

Теорема 3.1. Аксиомы исчисления предикатов – общезначимые формулы.

Теорема 3.2. Любая выводимая в исчислении предикатов формула является общезначимой.

Пример 3.5.

Обосновать правильность рассуждения, построив вывод.

а) Всякое нечетное натуральное число является разностью квадратов двух натуральных чисел. 5 – натуральное число. Следовательно, 5 – разность квадратов двух натуральных чисел

Пусть M – множество натуральных чисел. Введем предикаты:

A(x) = “x – нечетное число”.

B(x) – “x – разность квадратов двух чисел”.

Требуется построить вывод:

$\forall$x(A(x) $\supset$ B(x)), A(5) $\vdash$ B(5).

Построим вывод.

(1) $\forall$x(A(x) $\supset$ B(x)) – гипотеза;

(2) A(5) – гипотеза;

(3) A(5) $\supset$ B(5) – из (1) и удаления $\forall$;

(4) B (5) – из (2) и (3) по m. p.

б) Все словари полезны. Все полезные книги высоко ценятся. Следовательно, все словари высоко ценятся.

Сначала формализуем наше рассуждение, введя следующие предикаты:

A(x) = “x – словарь”.

B(x) = “x – полезен”.

C(x) = “x высоко ценится”.

Требуется построить следующий вывод:

$\forall$x(A(x) $\supset$ B(x)), $\forall$x(B(x) $\supset$ C(x)) $\vdash$ $\forall$x(A(x) $\supset$ C(x)).

Построим этот вывод.

(1) $\forall$x(A(x) $\supset$ B(x)) – гипотеза;

(2) $\forall$x(B(x) $\supset$ C(x)) – гипотеза;

(3) $A(y) \supset B(y)$ – из (1) и удаления $\forall$;

(4) $B(y) \supset C(y)$ – из (2) и удаления $\forall$;

(5) $A(y) \supset C(y)$ – из (3) и (4) по правилу силлогизма;

(6) $\forall x(A(x) \supset C(x))$ – из (5) и введения $\forall$.

в) Всякий совершеннолетний человек, находящийся в здравом уме, допускается к голосованию. Джон не допущен к голосованию. Значит, он либо несовершеннолетний, либо не находится в здравом уме.

Формализуем наше рассуждение, введя следующие предикаты:

A(x) = “x – совершеннолетний”.

B(x) = “x находится в здравом уме”.

C(x) = “x допущен к голосованию”.

Введем константу d, обозначающую имя "Джон".

Требуется построить следующий вывод:

$\forall x(A(x)\&B(x) \supset C(x)), \neg C(d)) \vdash \neg A(d) \vee \neg B(d)$.

Построим этот вывод.

(1) $\forall x(A(x)\&B(x) \supset C(x))$ – гипотеза;

(2) $\neg C(d))$ – гипотеза;

(3) $A(d)\&B(d) \supset C(d)$ – из (1) и удаления $\forall$;

(4) $\neg C(d)) \supset \neg(A(d)\&B(d))$ – из (3) и правила контрапозиции;

(5) $\neg C(d)) \supset \neg A(d) \vee \neg B(d)$ – из (4) и отрицания конъюнкции;

(7) $\neg A(d)$ ς $\neg B(d)$ – из (2) и (5) по m. p.

Автоматическое доказательство теорем. Метод резолюций.

Пусть имеется множество формул $\Gamma = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ и формула B. Автоматическим доказательством теоремы B называют алгоритм, который проверяет вывод

$A_1, A_2, \ldots, A_n \vdash B$. (3. 1)

Выражение (3.1) можно прочитать следующим образом:

Если посылки $A_1, A_2, \ldots, A_n$ истинны, то истинно заключение B.

или

Если причины $A_1, A_2, \ldots, A_n$ имели место, то будет иметь место следствие B.

Проблема доказательства в логике состоит в том, чтобы установить, что если истинны формулы $A_1, A_2, \ldots, A_n$, то истинна формула B.

В общем случае такой алгоритм построить нельзя. Но для некоторых частных случаев такие алгоритмы существуют. Доказательство теоремы равносильно доказательству общезначимости некоторой формулы. Наиболее эффективно доказательство общезначимости формул осуществляется методом резолюций. Процедура поиска доказательства методом резолюций фактически является процедурой поиска опровержения, т. е. вместо доказательства общезначимости формулы доказывается, что отрицание формулы противоречиво:

$A \equiv И \Leftrightarrow \neg A \equiv Л$.

Введем терминологию, обычно употребляемую при изложении метода резолюций.

Литерой будем называть выражения A или $\neg$A. Литеры A и $\neg$A называются контрарными, а множество $\{A, \neg A\}$ – контрарной парой.

Дизъюнкт – это дизъюнкция литер (или элементарная дизъюнкция).

Пример 3.6.

$A \vee B \vee C$ – дизъюнкт;

$A \vee \neg B$ – дизъюнкт;

$A \vee B \& C$ – не дизъюнкт;

$\neg A$ – дизъюнкт.

Дизъюнкт называется пустым, (обозначается □), если он не содержит литер. Пустой дизъюнкт всегда ложен, так как в нем нет литер, которые могли бы быть истинными при любых наборах переменных.

Рассмотрим применение метода резолюций к исчислению высказываний.

Правилом резолюции называют следующее правило вывода:

$$\frac{AVB,\ \neg AVC}{BVC}.$$

(3. 2)

Правило (3.2) можно также записать в следующем виде:

AVB, ¬AVC⊢B V C.

(3. 3)

Правило резолюций можно доказать, используя равносильности логики высказываний:

(AVB) & (¬AVC) ⊃ (B V C) = ¬((AVB) & (¬AVC)) V (B V C) = ¬(AVB) V ¬(¬AVC) V (B V C) = ¬A&¬B V A&¬C V (B V C) = (¬AV A) & (¬AV ¬C) & (¬BV A) & (¬BV ¬C) V (B V C) = (¬AV ¬C) & (¬BV A) & (¬Bς ¬C) V (B V C) =(¬AV ¬C V B V C) & (¬BV A V B V C) & (¬Bς ¬C V B V C) = И.

Итак, при истинных посылках истинно заключение.

Правило (3.2) – единственное правило, применяемое в методе резолюций, что позволяет не запоминать многочисленных аксиом и правил вывода.

Дизъюнкт BVC называется резольвентой дизъюнктов AVB и ¬AVC по литере A:

BVC = res_A(AVB и ¬AVC).

Если дизъюнкты не содержат контрарных литер, то резольвенты у них не существует.

Для дизъюнктов A и ¬A резольвента есть пустой дизъюнкт: res_A(A, ¬A) = □.

Пример 3.7.

Пусть F = A V B V C, G = ¬A V ¬B V D.

Тогда

res_A(F, G) = B V C V ¬B V D.

res_B(F, G) = A V C V ¬A V D.

res_C(F, G) не существует.

Метод резолюций соответствует методу доказательства от противного. Действительно, условие $A_1, A_2, \ldots, A_n$⊢ B равносильно условию $A_1, A_2, \ldots, A_n$, ¬B⊢ □. Метод резолюций относится к методам непрямого вывода.

Изложим процедуру вывода $A_1, A_2, \ldots, A_n$⊢ B в виде алгоритма.

Алгоритм построения вывода методом резолюций.

Шаг 1. Формулы $A_1, A_2, \ldots, A_n$ и формулу ¬B привести к КНФ.

Шаг 2. Составить множество S дизъюнктов формул $A_1, A_2, \ldots, A_n$ и B.

Шаг 3. Вместо пары дизъюнктов, содержащих контрарные литеры записать их резольвенту по правилу (3.2).

Шаг 4. Процесс продолжаем. Если он заканчивается пустым дизъюнктом, то вывод обоснован.

Изложенный алгоритм назывется резолютивным выводом из S.

Возможны три случая:

1. Среди множества дизъюнктов нет содержащих контрарные литеры. Это означает, что формула B не выводима из множества формул $A_1, A_2, \ldots, A_{n\,n}$.

2. В результате очередного применения правила резолюции получен пустой дизъюнкт. Это означает, что что формула B выводима из множества формул $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

3. Процесс зацикливается, т. е. получаются все новые и новые резольвенты, среди которых нет пустых. Это ничего не означает.

Пример 3.8.

В примере 3.3 а) был обоснован вывод $A \supset (B \supset C),\ A\&B \vdash C$. Применим для этого примера метод резолюций. Для этого нужно проверить вывод

$A \supset (B \supset C),\ A\&B,\ \neg C \vdash \square$.

Будем действовать в соответствии с алгоритмом.

Шаг 1. Нужно привести к КНФ формулы $A \supset (B \supset C)$, $A\&B$, $\neg C$.

$A \supset (B \supset C) \equiv \neg A \vee (B \supset C) \equiv \neg A \vee \neg B \vee C$.

Формулы $A\&B$, $\neg C$ уже находятся в КНФ.

Шаг 2. Составим множество S дизъюнктов:

$S = \{\neg A \vee \neg B \vee C,\ A,\ B,\ \neg C\}$.

Шаг 3. Построим резолютивный вывод из S. Для этого выпишем по порядку все дизъюнкты из S:

1) $\neg A \vee \neg B \vee C$;
2) A;
3) B;
4) $\neg C$;

Вместо пары дизъюнктов, содержащих контрарные литеры запишем их резольвенту (в скобках указаны номера формул, образующих резольвенту):

5) $\neg B \vee C$. (1, 2)
6) C. (3, 5)
7) $\square$. (4, 6)

Вывод заканчивается пустым дизъюнктом, что является обоснованием вывода $A \supset (B \supset C),\ A\&B \vdash C$.

Пример 3.9.

Записать с помощью формул логики высказываний и решить методом резолюций следующую задачу:

«Чтобы хорошо учиться, надо прикладывать усилия. Тот, кто хорошо учится, получает стипендию. В данный момент студент прикладывает усилия. Будет ли он получать стипендию?

Введем следующие высказывания:

A = ”студент хорошо учится”.

B = ”студент прикладывает усилия”.

C = ”студент получает стипендию”

Чтобы утвердительно ответить на вопрос задачи: ”Будет ли студент получать стипендию?”, нужно проверить вывод:

$B \supset A,\ A \supset C,\ B \vdash C$.

Будем действовать в соответствии с алгоритмом.

Шаг 1. Нужно привести к КНФ формулы $B \supset A$, $A \supset C$, B, $\neg C$.

$B \supset A = \neg B \vee A$,

$A \supset C = \neg A \vee C$,

Формулы B и $\neg C$ уже находятся в КНФ.

Шаг 2. Составим множество S дизъюнктов:

$S = \{\neg B \vee A,\ \neg A \vee C,\ B,\ \neg C\}$.

Шаг 3. Построим резолютивный вывод из S. Сначала перепищем по порядку дизъюнкты из S:

1) $\neg B \vee A$.
2) $\neg A \vee C$.
3) B.
4) $\neg C$.

Затем вместо пары дизъюнктов, содержащих контрарные литеры запишем их резольвенту:

5) $\neg B \vee C$. (1, 2)

6) C. (3, 5)
7) $\square$. (4, 6)

Таким образом, на вопрос задачи можно ответить утвердительно: ”Студент будет получать стипендию”.

Правило резолюций более общее, чем правило modus ponens и производные правила, рассмотренные в п. 3.2. Докажем методом резолюций правило modus ponens. Необходимо построить вывод

$A, A \supset B \vdash B$.

Построим резолютивный вывод.

$A, \neg A \lor B \vdash B$.

$A, \neg A \lor B, \neg B \vdash \square$.

$S = \{A, \neg A \lor B, \neg B\}$.

1) A.
2) $\neg A \lor B$.
3) $\neg B$.
4) B. (1, 2)
5) $\square$. (3, 4)

Метод резолюций легко поддается алгоритмизации. Это позволяет использовать его в логических языках, в частности в ПРОЛОГе. Недостатком этого метода является необходимость представления формул в КНФ. Кроме того, автоматическое доказательство теорем методом резолюций основан на переборе и этот перебор может быть настолько большим, что затраты времени на него практически неосуществимы. Эти обстоятельства стимулируют поиски различных модификаций метода резолюций.

Приведем еще один пример применнения метода резолюций, основанного на попарном переборе дизъюнктов.

Пример 3.10.

Построим с плмощью метода резолюций следующий вывод:

$\neg A \supset B, C \lor A, B \supset \neg C \vdash A$,

Или, что то же:

$\neg A \supset B, C \lor A, B \supset \neg C, \neg A \vdash \square$.

Перепишем все посылки в виде дизъюнктов:

$A \lor B, C \lor A, \neg B \lor \neg C, \neg A \vdash \square$.

Выпишем по порядку все посылки и начнем их по очереди склеивать по правилу резолюций:

1) $A \lor B$
2) $C \lor A$
3) $\neg B \lor \neg C$
4) $\neg A$
5) $A \lor \neg C$ (1, 3)
6) B (1, 4)
7) $A \lor \neg B$ (2, 3)
8) C. (2, 4)
9) A (2, 5)
10) $\neg C$ (3, 6)
11) $\neg B$ (3, 8)
12) $\neg C$ (4, 5)
13) $\neg B$ (4, 7)
14) $\square$ (4, 9)

Мы видим, что такая стратегия перебора неэффективна. В данном случае существует более быстрый вывод. Например:

5) B. (1, 4)

6) C. (2, 4)
7) ¬B. (3, 6)
8) □. (5, 7)

2.3.4. НЕЧЕТКАЯ ЛОГИКА

Нечеткие множества

В 1965 году американский математик Лотфи Заде (L. Zade) опубликовал статью “Нечеткие множества” (“Fuzzy sets”). Было дано новое определение понятия множества, предназначенное для описания сложных плохо определенных систем, в которых наряду с количественными данными присутствуют неоднозначные, субъективные, качественные данные

Понятие множества лежит в основе всех математических конструкций, и статья Заде породила новое научное направление. Произошло “раздвоение” математики, появились нечеткие функции, нечеткие отношения, нечеткие уравнения, нечеткая логика и т. д. Эти понятия широко используются в экспертных системах, системах искусственного интеллекта. Изложим основные понятия нечетких множеств.

Определение 4.1. Нечетким множеством $\widetilde{A}$ на множестве X назовем пару (X, m_A), где $m_A(x)$ – функция, каждое значение которой $m_A(x) \in [0, 1]$ интерпретируется как степень принадлежности точки $x \in X$ множеству $\widetilde{A}$. Функция m_A – называется функцией принадлежности множества $\widetilde{A}$.

Для обычного четкого множества A можно положить

$$m_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \notin A. \end{cases}$$

Таким образом, обычное множество является частным случаем нечеткого множества.

Функцию принадлежности, как и всякую функцию, можно задавать таблично или аналитически.

Пример 4.1.

Приведем пример нечеткого множества $\widetilde{A}$, которое формализует понятие "несколько", ясного лишь на интуитивном уровне.

Пусть X = {1, 2, 3, …, n,…} – множество натуральных чисел, а функция $m_A(x)$ задана таблицей:

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10 …
$m_A(x)$	0	0,1	0,6	0,8	1	1	0,9	0,7	0,2	0 …

Аналогично можно ввести понятия "много", "мало", "около 100", "почти 20", и т.д.

Переменные, значениями которых являются нечеткие множества, называются лингвистическими. Это основной тип переменных в языке людей.

Пример 4.2.

Пусть X = (0, ∞) – множество положительных чисел, а функция $m_A(x)$ задана формулой:

$$m_A(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x \le 50, \\ \left(1 + \dfrac{25}{(x-50)^2}\right)^{-1}, & x > 50. \end{cases}$$

График этой функции изображен на рис. 4.1.

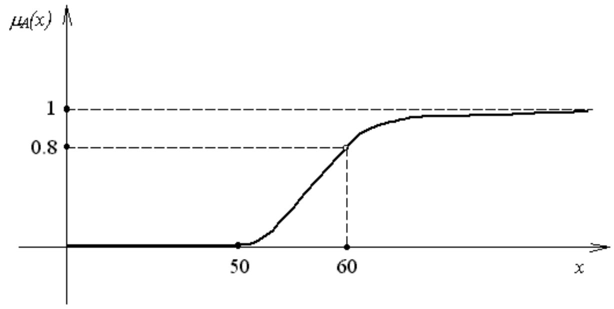

Рисунок 4.1

Если переменную x интерпретировать как возраст, то нечеткое множество $\widetilde{A}$ соответствует понятию "старый". Аналогично можно ввести понятия "молодой", "средних лет" и т. д.

Пример 4.3.

Переменная "расстояние" принимает обычно числовые значения. Однако в предложениях естественного языка она может фигурировать как лингвистическая со значениями: "малое", "большое", "среднее", "около 5 км" и т. д. Каждое значение описывается нечетким множеством. Пусть речь идет о поездках на такси по городу. В качестве универсального множества X можно взять отрезок [0, 100] км и задать функцию принадлежности значений так, как показано на рисунке 4.2.

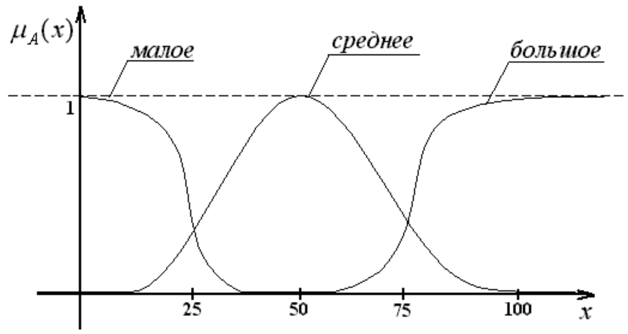

Рисунок 4.2

Операции с нечеткими множествами

Введем операции с нечеткими мнножествами аналогично операциям с обычными множествами.

Пусть $\widetilde{A}$ и $\widetilde{B}$ – два нечетких множества с функциями принадлежности $m_A(x)$ и $m_B(x)$.

В табл. 4.1 приведены названия основных операций, их лингвистический смысл и формула для определения функции принадлежности множества $\widetilde{C}$, которое является результатом соответствующей операции.

Табл. 4. 1

Операции	Лингвистический смысл	Формула для $m_C(x)$
Пересечение $\widetilde{C} = \widetilde{A} \cap \widetilde{B}$	и	$\min(m_A(x), m_B(x))$
Объединение $\widetilde{C} = \widetilde{A} \cup \widetilde{B}$	или	$\max(m_A(x), m_B(x))$.

Дополнение	не	$1 - m_A(x)$
Концентрация	очень	$[m_A(x)]^2$
Размывание	не очень	$[m_A(x)]^{1/2}$

Нечеткое множество называется пустым, если $m_A(x) = 0$ для всех $x \in X$.

Пример 4.4.

Пусть X – множество студентов, $\widetilde{A}$ – множество пожилых людей. Множество $\widetilde{A}$ – пустое, $m_A(x) = 0$ для всех $x \in X$, так как пожилых студентов, вообще говоря, не бывает.

Введенные для нечетких множеств операции позволяют конструировать сложные понятия из простых: очень много, не старше и не моложе и т. д. По аналогии с четкими множествами определяется отношение включения множества $\widetilde{A}$ в множество $\widetilde{B}$, а именно $\widetilde{A}$ является подмножеством $\widetilde{B}$ тогда и только тогда, когда $m_A(x) \leq m_B(x)$ для всех $x \in X$.

Мы видим, что понятие нечеткого множества носит субъективный характер, такова и его формализация. Результаты, полученные с помощью аппарата алгебры нечетких множеств, должны носить качественный характер. Большей объективности выводов можно добиться, получив оценки функции принадлежности $m_A(x)$ путем опроса экспертов.

4.2. Нечеткие высказывания

Определение 4.2. Нечетким высказыванием называется высказывание $\widetilde{A}$, степень истинности которого $\mu(\widetilde{A})$ можно оценить числом из интервала [0, 1], $\mu(\widetilde{A}) \in [0, 1]$. Если $\mu(\widetilde{A}) = 0{,}5$, то высказывание называется индиффирентным.

Определение 4.3. Нечеткой высказывательной переменной $\widetilde{X}$ называется нечеткое высказывапние $\widetilde{X}$, степень истинности которого может меняться в интервале [0, 1].

Так как степень истинности нечеткого высказывания не связана с сутью высказывания, будем в дальнейшем отождествлять нечеткое высказывание с его степенью истинности аналогично тому, как обычное четкое высказывание отождествлялось с его истинностью или ложностью (см. п. 1. 1). Нечеткие высказывания и степень их истинности будем обозначать большими буквами с тильдой:: $\widetilde{A}$, $\widetilde{B}$, $\widetilde{X}$, и т. д.

На множестве нечетких высказываний вводятся логические операции, аналогичные операциям алгебры высказываний.

1. Отрицание нечеткого высказывания:

$\neg\widetilde{A} = 1 - \widetilde{A}$. (4.1)

2. Конъюнкция нечетких высказываний:

$\widetilde{A} \,\&\, \widetilde{B} = \min(\widetilde{A}, \widetilde{B})$. (4.2)

3. Дизъюнкция нечетких высказываний:

$\widetilde{A} \vee \widetilde{B} = \max(\widetilde{A}, \widetilde{B})$. (4.3)

4. Импликация нечетких высказываний:

$\widetilde{A} \supset \widetilde{B} = \max(1 - \widetilde{A}, \widetilde{B})$. (4.4)

5. Эквивалентность нечетких высказываний:

$\widetilde{A} \sim \widetilde{B} = \min(\max(1 - \widetilde{A}, \widetilde{B}), \max(\widetilde{A}, 1 - \widetilde{B}))$. (4.5)

Старшинство операций принято в поядке1) – 5).

Пример 4.5.

Найти степень истинности высказывания

$\widetilde{C} = (\widetilde{A} \vee \widetilde{B}) \sim (\widetilde{A} \supset (\widetilde{A} \,\&\, \widetilde{B}))$ при $\widetilde{A} = 0{,}8$; $\widetilde{B} = 0{,}3$.

Порядок действий определяется старшинством операций и скобками.

1. $\widetilde{A} \,\&\, \widetilde{B} = \min(0{,}8; 0{,}3) = 0{,}3$.

2. $(\widetilde{A} \supset (\widetilde{A} \& \widetilde{B}) = \max(1 - 0{,}8; 0{,}3) = 0{,}3$.

3. $\widetilde{A} \vee \widetilde{B} = \max(0{,}8; 0{,}3) = 0{,}8$.

4. $\widetilde{C} = \min(\max(1 - 0{,}8; 0{,}3), \max(0{,}8; 1 - 0{,}3)) = \min(0{,}3; 0{,}8) = 0{,}3$.

Множество нечетких высказываний вместе с введенными на них операциями образуют алгебру нечетких высказываний.

Определение 4.4. Нечеткой логической формулой называется:

а) любая нечеткая высказывательная переменная;

б) если $\widetilde{A}$ и $\widetilde{B}$ – нечеткие логические формулы, то $\neg\widetilde{A}$, $\widetilde{A} \& \widetilde{B}$, $\widetilde{A} \vee \widetilde{B}$, $\widetilde{A} \supset \widetilde{B}$, $\widetilde{A} \sim \widetilde{B}$ – тоже нечеткие логические формулы.

Определение 4.5. Пусть $\widetilde{A}(\widetilde{X}_1, \widetilde{X}_2, \ldots, \widetilde{X}_n)$ и $\widetilde{B}(\widetilde{X}_1, \widetilde{X}_2, \ldots, \widetilde{X}_n)$ – две нечеткие логические формулы. Степенью равносильности формул $\widetilde{A}$ и $\widetilde{B}$ называется величина

$$\mu(\widetilde{A}, \widetilde{B}) = \mathop{\&}_{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n)} \{\widetilde{A}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \sim \widetilde{B}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)\} \qquad (4.6)$$

Здесь логические операции конъюнкции и эквивалентности имеют смысл, определенный выше для логических операций над нечеткими высказываниями, причем конъюнкция берется по всем наборам степеней истинности $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ нечетких переменных $(\widetilde{X}_1, \widetilde{X}_2, \ldots, \widetilde{X}_n)$.

Множество всех наборов степеней истинности $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ нечетких переменных $(\widetilde{X}_1, \widetilde{X}_2, \ldots, \widetilde{X}_n)$ назовем полной областью определения C^n. Очевидно, что множество C^n имеет мощность континнуума в отличие от двузначной логики высказываний, где число всех наборов переменнх конечно и равно 2^n.

Если $\mu(\widetilde{A}, \widetilde{B}) = 0{,}5$, то нечеткие формулы $\widetilde{A}$ и $\widetilde{B}$ называются индиффирентными.

Если $\mu(\widetilde{A}, \widetilde{B}) > 0{,}5$, то нечеткие формулы $\widetilde{A}$ и $\widetilde{B}$ называются нечетко равносильными.

Если $\mu(\widetilde{A}, \widetilde{B}) < 0{,}5$, то нечеткие формулы $\widetilde{A}$ и $\widetilde{B}$ называются нечетко неравносильными..

Определение 4.6. Степенью неравносильности формул $\widetilde{A}$ и $\widetilde{B}$ называется величина

$$\overline{\mu}(\widetilde{A}, \widetilde{B}) = 1 - \mu(\widetilde{A}, \widetilde{B}).$$

Пример 4.6

Определить степень равносильности формул.

$\widetilde{A} = \widetilde{X} \supset \widetilde{Y}$, $\widetilde{B} = \neg(\widetilde{X} \& \widetilde{Y})$ при условии, что $\widetilde{X}$ и $\widetilde{Y}$ прнимают значения степеней истинности из множества $\{0{,}1; 0{,}2\}$. Перечислим все возможные наборы значений $\widetilde{X}$ и $\widetilde{Y}$:

$A_1 = \{0{,}1; 0{,}1\}$; $A_2 = \{0{,}1; 0{,}2\}$; $A_3 = \{0{,}2; 0{,}1\}$; $A_4 = \{0{,}2; 0{,}2\}$.

Запишем формулы $\widetilde{A}$ и $\widetilde{B}$ с учетом (4.1), (4.2), (4.4):

$\widetilde{A} = \widetilde{X} \supset \widetilde{Y} = \max(1 - \widetilde{X}, \widetilde{Y})$; $\widetilde{B} = \neg(\widetilde{X} \& \widetilde{Y}) = 1 - \widetilde{X} \& \widetilde{Y} = 1 - \min(\widetilde{X}, \widetilde{Y})$.

Вычислим формулы $\widetilde{A}$ и $\widetilde{B}$ на каждом из четырех наборов $A_1 - A_4$:

$\widetilde{A}_1 = \max(1 - 0{,}1; 0.1) = 0{,}9$.

$\widetilde{A}_2 = \max(1 - 0{,}1; 0{,}2) = 0{,}9$.

$\widetilde{A}_3 = \max(1 - 0{,}2; 0{,}1) = 0{,}8$.

$\widetilde{A}_4 = \max(1 - 0{,}2; 0{,}2) = 0{,}8$.

$\widetilde{B}_1 = 1 - \min(0{,}1; 0.1) = 0{,}9$.

$\widetilde{B}_2 = 1 - \min(0{,}1; 0{,}2) = 0{,}9$.

$\widetilde{B}_3 = 1 - \min(0{,}2; 0{,}1) = 0{,}9$.

$\widetilde{B}_4 = 1 - \min(0{,}2; 0{,}2) = 0{,}8$.

Вычислим теперь степень равносильности формул $\widetilde{A}$ и $\widetilde{B}$ в соответствии с (4.6):

Для этого сначала вычислим $\widetilde{A}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots,\alpha_n) \sim \widetilde{B}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots,\alpha_n)\}$ для всех наборов A_1–A_4:

В соответствии с (4.5) имеем

$\widetilde{A} \sim \widetilde{B}$ = min (max (1 – $\widetilde{A}$, $\widetilde{B}$), max ($\widetilde{A}$, 1 – $\widetilde{B}$)).

Поэтому

$\widetilde{A}_1 \sim \widetilde{B}_1$ = min (max (1 – 0,9;0,9), max (0,9; 1 –0,9)) = 0,9.

$\widetilde{A}_2 \sim \widetilde{B}_2$ = min (max (1 – 0,9;0,9), max (0,9; 1 –0,9)) = 0,9.

$\widetilde{A}_3 \sim \widetilde{B}_3$ = min (max (1 – 0,8;0,9), max (0,8; 1 –0,9)) = 0,8.

$\widetilde{A}_4 \sim \widetilde{B}_4$ = min (max (1 – 0,8;0,8), max (0,8; 1 –0,8)) = 0,8.

Окончательно по (4.6) получим

$\mu(\widetilde{A}, \widetilde{B}) = \underset{(\alpha_1,\alpha_2,\ldots\alpha_n)}{\&} \{\widetilde{A}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots,\alpha_n) \sim \widetilde{B}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots,\alpha_n)\}$ = 0,9&0,9&0,8&0,8 = min(0,9; 0,9; 0,8; 0,8) = 0,8.

Формулы $\widetilde{A}$ и $\widetilde{B}$ нечетко равносильны.

На других наборах степеней истинности нечетких переменных $\widetilde{X}$ и $\widetilde{Y}$ формулы $\widetilde{A}$ и $\widetilde{B}$ могут быть нечетко неравносильны.

Определение 4.7. Пусть $\widetilde{A}(\widetilde{X}_1, \widetilde{X}_2, \ldots, \widetilde{X}_n)$ и $\widetilde{B}(\widetilde{X}_1, \widetilde{X}_2, \ldots, \widetilde{X}_n)$ – две нечеткие логические формулы, рассмотренные на некотором множестве M изменения нечетких переменных $\widetilde{X}_1, \widetilde{X}_2, \ldots, \widetilde{X}_n$. Областью нечеткой равносильности формул $\widetilde{A}$ и $\widetilde{B}$ называется подмножество множества M, на котором формулы $\widetilde{A}$ и $\widetilde{B}$ нечетко равносильны.

Пример 4.7.

Вернемся к примеру 4.7. Для этого примера множество M состоит из девяти наборов:

M = {{0,1; 0,1}; {0,1; 0,2}; {0,2; 0,1}; {0,2; 0,2}}.

На каждом наборе формулы $\widetilde{A}$ и $\widetilde{B}$ нечетко равносильны, так как $\mu(\widetilde{A}, \widetilde{B}) > 0,5$. Поэтому областью нечеткой равносильности будет все множество M.

Определение 4.8. Если формула $\widetilde{A}(\widetilde{X}_1, \widetilde{X}_2, \ldots, \widetilde{X}_n)$ на всех наборах переменных $\widetilde{X}_1, \widetilde{X}_2, \ldots, \widetilde{X}_n$ из некоторого множества M имеет степень истинности большую или равную 0,5, то она будет на нем нечетко истинной. Обозначается это так: $\widetilde{A} = \widetilde{И}$.

Определение 4.9. Если формула $\widetilde{A}(\widetilde{X}_1, \widetilde{X}_2, \ldots, \widetilde{X}_n)$ на всех наборах переменных $\widetilde{X}_1, \widetilde{X}_2, \ldots, \widetilde{X}_n$ из некоторого множества M имеет степень истинности меньшую или равную 0,5, то она будет на нем нечетко ложной. Обозначается это так: $\widetilde{A} = \widetilde{Л}$.

Пример 4.8.

Покажем, что $\widetilde{X} \vee \neg\widetilde{X} = \widetilde{И}$ и $\widetilde{X} \& \neg\widetilde{X} = \widetilde{Л}$ для всех значений нечеткой переменной $\widetilde{X}$:

$0 \le \widetilde{X} \le 1$.

Учитывая (4,1), (4.2), (4. 3), имеем

$\widetilde{X} \vee \neg\widetilde{X}$ = max ($\widetilde{X}$, $\neg\widetilde{X}$) = max ($\widetilde{X}$, 1 – $\widetilde{X}$) $\ge$ 0,5.

$\widetilde{X} \& \neg\widetilde{X}$ = min($\widetilde{X}$, $\neg\widetilde{X}$) = min($\widetilde{X}$, 1 – $\widetilde{X}$) $\le$ 0,5.

Нечеткие предикаты

Определение 4.10. Нечетким предикатом $\widetilde{P}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется нечеткая формула, переменные которой определены на некотором множестве M, $x_1, x_2, \ldots, x_n \in M$, а сама она принимает значения из интервала [0, 1].

Нечеткий предикат от n переменных называется n-местным нечетким предикатом. Нечеткое высказывание $\widetilde{A}$, задаваемое степенью истинности $\mu(\widetilde{A}) \in [0, 1]$ является одноместным нечетким предикатом..

Пример 4.9.

Пусть M = {0, 1, 2, 3}. Зададим нечеткий предикат следующим образом: $\tilde{P}$(x, y) = xy/9. Его значения определяются следующим образом: $\tilde{P}$(0, y) = $\tilde{P}$(x, 0) = 0; $\tilde{P}$(1, 1) = 1/9; $\tilde{P}$(1, 2) = $\tilde{P}$(2, 1) = 2/9; $\tilde{P}$(2, 2) = 4/9; $\tilde{P}$(1, 3) = $\tilde{P}$(3, 1) = 1/3; $\tilde{P}$(2, 3) = $\tilde{P}$(3, 2) = 2/3; $\tilde{P}$(3, 3) = 1;

Определение 4.11. Нечеткими кванторами $\tilde{\forall}$ и $\tilde{\exists}$ называются логические символы, которые придают включающим их выражениям следующий смысл:

$$\tilde{\forall}\, \tilde{P}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \mathop{\&}_{x_i \in M} \tilde{P}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \min_{x_i \in M} \tilde{P}(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

$$\tilde{\exists}\, \tilde{P}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \mathop{V}_{x_i \in M} \tilde{P}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \max_{x_i \in M} \tilde{P}(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Пример 4.10.

Найдем значения степени истинности формул $\tilde{\forall}\, \tilde{P}$(x, 1) и $\tilde{\exists}\, \tilde{P}$(x, 1) для примера 4.9:

$\tilde{\forall}\, \tilde{P}$(x, 1) = min{ $\tilde{P}$(0, 1); $\tilde{P}$(1, 1); $\tilde{P}$(2, 1); $\tilde{P}$(3, 1)} = min{0; 1/9; 2/9; 1/3} = 0.

$\tilde{\exists}\, \tilde{P}$(x, 1) = max { $\tilde{P}$(0, 1); $\tilde{P}$(1, 1); $\tilde{P}$(2, 1); $\tilde{P}$(3, 1)} = max {0; 1/9; 2/9; 1/3} = 1/3.

По аналогии с четкими предикатами вводятся также остальные понятия для нечетких предикатов.

2.3.5. АЛГОРИТМЫ

Определение алгоритма

Алгоритм можно определить как некоторую процедуру, однозначно приводящую к результату. Это интуитивное определение, которое, однако, позволяет безошибочно определить, является ли рассматриваемый процесс алгоритмом или нет. Примеры алгоритмов:

1. Сортировка массива чисел в порядке возрастания.
2. Вычисление таблицы значений булевой функции, заданной формулой.
3. Вычисление чисел Фибоначчи по рекуррентному соотношению.
4. Решение системы линейных алгебраических уравнений методом исключения Гаусса.

Основные требования к алгоритмам

1. Алгоритм применяется к исходным данным и дает результаты. Кроме того, в процессе работы алгоритма могут появляться промежуточные данные. Итак, каждый алгоритм имеет дело с данными: исходными, промежуточными и выходными. Данными могут быть числа, векторы, матрицы, массивы, формулы, рисунки (в графических системах).
2. Данные для своего размещения требуют памяти. Память состоит из ячеек, так что каждая ячейка может содержать один символ алфавита данных. Таким образом, объем данных и требуемая память согласованы.
3. Алгоритм состоит из отдельных элементарных шагов или действий. Причем множество различных шагов, из которых составлен алгоритм, конечно. Типичный пример множества элементарных действий – система команд ЭВМ.
4. Последовательность шагов алгоритма детерминирована, т.е. после каждого шага либо указывается, какой шаг делать дальше, либо дается команда остановки, после чего работа алгоритма считается законченной.
5. Алгоритм должен удовлетворять требованию результативности, т. е. остановки после конечного числа шагов. В таком случае говорят, что алгоритм сходится.

Любая практическая задача требует предварительного задания исходных данных. Как правило, можно задать некоторое характерное число n. Например, для задачи сортировки массива чисел по возрастанию n – число чисел в массиве, для задачи решения системы линейных уравнений n – число уравнений. Характерное число задачи определяет размерность задачи как величину массива исходных данных.

С ростом характерного числа размерность задачи возрастает. Введем понятие скорости роста для функций, зависящих от целочисленного параметра n.

Определение 5.1. Функции $f(n)$ и $g(n)$ имеют одинаковую скорость роста, если при достаточно больших n, начиная с некоторого n_0, выполняется условие:

$C_1g(n) \le f(n) \le C_2g(n)$,

где C_1, C_2 – некоторые константы.

Определение 5.2. Скорость роста функции $f(n)$ ограничена снизу скоростью роста функции $g(n)$, если при достаточно больших n, начиная с некоторого n_0, выполняется условие:

$C_1g(n) \le f(n)$,

где C_1 – некоторая константа.

Определение 5.3. Скорость роста функции $f(n)$ ограничена сверху скоростью роста функции $g(n)$, если при достаточно больших n, начиная с некоторого n_0, выполняется условие:

$f(n) \le C_2g(n)$,

где C_2 – некоторая константа.

Определение 5.4. Скорость роста функции $f(n)$ больше скорости роста функции $g(n)$, если для любой сколь угодно большой константы C_2 существует некоторое n_0, начиная с которого выполняется условие:

$f(n) \ge C_2g(n)$.

Для того чтобы более наглядно представить скорости роста функций, их сравнивают со скоростями роста хорошо известных функций. В качестве таковых чаще всего используют степенные функции n^a. При a = 1 скорость роста функции n^a называют линейной, при a = 2 – квадратичной, при a = 3 – кубической и т. д. Скорость роста вида n^a называют полиномиальной. Очевидно, что при возрастании a скорость роста тоже увеличивается. Для некоторых функций скорости роста превосходят в пределе при $n \to \infty$ любую полиномиальную скорость. Такими функциями являются, например, 2^n, e^n, n!. Скорости такого типа называют экспоненциальными.

Обозначим через r(n) скорость роста размерности задачи. В задаче вычисления таблицы значений булевой функции n переменных скорость роста определяется таблицей значений переменных. Так как различных наборов переменных 2^n, а каждый набор состоит из n символов, то размерность задачи равна $n2^n$ и скорость роста будет экспоненциальной. В задаче решения системы линейных алгебраических уравнений методом исключения Гаусса наиболее быстро растет число элементов матрицы системы уравнений размером $n \times n$. Поэтому скорость роста размерности этой задачи будет квадратичной, $r(n) = n^2$.

Размерность задачи определяет память, необходимую для представления исходных данных в ЭВМ, Кроме того, необходима дополнительная память для размещения промежуточных данных. Величина этой памяти зависит от конкретного алгоритма и ее, как правило, нетрудно рассчитать.

Рассмотрим время реализации алгоритма – время счета.

Пусть при выполнении некоторого алгоритма выполняются элементарные операции $t_1, t_2, \ldots, t_k$ (арифметические, логические и другие). Среднее время выполнения этих операций обозначим через $t_1, t_2, \ldots, t_k$. По аналогии с размерностью задачи введем понятие скорости роста числа выполняемых операций в зависимости от характерного числа n. Обозначим их для операций $t_1, t_2, \ldots, t_k$ через $g_1(n), g_2(n), \ldots, g_k(n)$. Без доказательства приведем следующее утверждение.

При $n \to \infty$ скорость роста общего времени счета T(n) равна максимальной из скоростей роста числа элементарных операций $g_1(n), g_2(n), \ldots, g_k(n)$ независимо от среднего времени их выполнения $t_1, t_2, \ldots, t_k$.

Определение 5.5. Скорость роста общего времени счета T(n) называется вычислительной сложностью или просто сложностью алгоритма.

Обозначим сложность алгоритма через f(n). В зависимости от сложности все алгоритмы делятся на несколько классов.

Определение 5.6. Полиномиальными называются алгоритмы, сложность которых ограничена некоторым полиномом.

Пример 5.1.

Рассмотрим задачу определения максимального элемента в массиве из n чисел. Поскольку число операций сравнения постоянно и равно n – 1, сложность алгоритма f(n) = n.

Определение 5.7. Экспоненциальными называются алгоритмы, сложность которых при возрастании n превышает полином любой степени.

В примерах 5.2 и 5.3 точные алгоритмы имеют экспоненциальную точность.

Пример 5.2.

Рассмотрим задачу коммивояжёра. Необходимо обойти n городов и вернуться в исходный пункт, так чтобы суммарный путь был минимальным. Количество всех возможных вариантов обхода равно 0.5n! Следовательно, сложность точного решения, основанного на переборе всех вариантов, равна f(n) = n!

Пример 5.3.

Рассмотрим задачу вычисления конъюнктивной нормальной формы (КНФ) булевой функции n переменных. Количество всех наборов переменных равно 2^n. Количество всех операций при переборе всех дизъюнкций пропорционально $n2^n$, Следовательно, сложность алгоритма $f(n) = n2^n$.

Экспоненциальные алгоритмы практически могут быть реализованы только при малых значениях n (обычно при n < 10).

Задачи, для которых существуют точные алгоритмы решения полиномиальной сложности, называются задачами класса P.

Задачи, для которых не удается найти точные алгоритмы решения полиномиальной сложности, составляют класс NP.

Для многих задач класса NP выполняется свойство сводимости, состоящее в том, что данный алгоритм выражается при помощи полиномиального числа операций через другой алгоритм, имеющий полиномиальную сложность.

Машина Тьюринга

До недавнего времени интуитивного понятия алгоритм было достаточно, и термин алгоритм употреблялся в связи с вычислительной процедурой решения конкретной задачи. Утверждение о существовании алгоритма решения задачи вытекало из описания этого алгоритма.

В начале XX века встал вопрос о выводимости и эффективных вычислениях. Понятие алгоритма стало объектом математических исследований и нуждалось в строгом определении. Возникли задачи, по-видимому, не имеющие алгоритмического решения.

Первые работы по уточнению понятия алгоритм появились в 1936 – 1937 годах. Это были работы Тьюринга, Поста, Маркова, Чёрча. Было предложено несколько определений понятия алгоритм. Впоследствии было показано, что все они равносильны.

Одной из первых и весьма удачных попыток дать точный математический эквивалент интуитивного представления об алгоритме было введение понятия машины Тьюринга в 1937 году, за 9 лет до появления первой ЭВМ.

Машина Тьюринга – абстрактная машина. Это математическая модель идеализированного вычислительного устройства.

Машина Тьюринга состоит из ленты и управляющего устройства со считывающей и записывающей головки (каретки) (рис. 5.1).

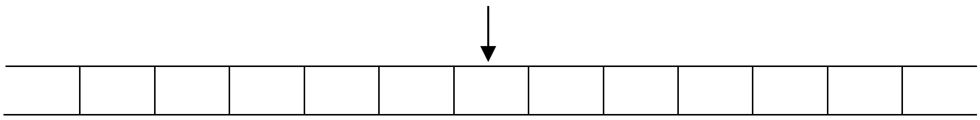

Рис. 5.1

Лента жестко закреплена слева и бесконечна справа. Иногда считают, что лента не ограничена справа и слева. Лента разделена на ячейки, которые нумеруются натуральными числами 1, 2, … .

В каждую ячейку ленты заносятся символы внешнего алфавита машины Тьюринга

$A=\{a_0,a_1,...a_n\}$. (5.1)

Один из символов (пробел) соответствует незаполненной, пустой ячейке.

Головка может передвигаться вдоль ленты влево и вправо. Когда она неподвижна, то стоит против некоторой ячейки ленты; говорят, что головка обозревает эту ячейку.

За единицу времени, которая называется шагом, головка может сдвинуться на одну ячейку влево или вправо. Кроме того, головка может также распознать содержимое обозреваемой ячейки, может заносить символ внешнего алфавита в текущую ячейку и может стирать содержимое текущей ячейки или, что то же самое, записывать туда пробел.

Управляющее устройство может находиться в одном из множества дискретных состояний:

$Q=\{q_0,q_1,...q_m\}$. (5.2)

Множество Q называется внутренним алфавитом машины Тьюринга или алфавитом внутренних состояний.

Словом называется последовательность $W = a_{i1}, a_{i2}, \dots , a_{is}$ символов, записанных в ячейках ленты, где a_{i1} – символ, находящийся в самой левой непустой ячейке, а a_{is} – символ, находящийся в самой правой непустой ячейке. Количество символов s в слове называется длиной слова.

Пусть в некоторый момент времени t на ленте записано слово W, управляющее устройство находится в состоянии q_i, а каретка – напротив символа a_{im} слова W. Конфигурацией машины в момент времени t называется последовательность $K = a_{i1}, \dots , a_{i(m-1)}, q_i, a_{im} \dots , a_{is}$. Конфигурации в начале и в конце работы называют соответственно начальной и заключительной.

Пример 5.4.

Пусть на ленте записано слово abcde, управляющее устройство находится в состоянии q_i и каретка стоит против символа d. Конфигурация в этом случае запишется так:

$abcq_ide$.

Так как машина Тьюринга имеет конечный алфавит и конечное число внутренних состояний, то очевидно, что она может выполнять конечное число действий.

Если управляющее устройство в некоторый момент времени находится в состоянии q_i, обозревается символ a_j, в следующий момент времени записывается символ a_r, управляющее устройство переходит в состояние q_k, и каретка сдвигается, то говорят, что машина выполняет команду

$a_jq_i \rightarrow a_rSq_k$, (5.3)

где S – сдвиг, S = L, если сдвиг влево, S = R, если сдвиг вправо, S = C, если каретка остается на месте.

Совокупность всех команд, которые может выполнить машина, называется ее программой. Условие однозначности требует, чтобы для любого j и любого i имеется только одна команда вида (5.3). Каждая машина Тьюринга полностью определяется своим алфавитом, внутренними состояниями и программой.

Итак, машина Тьюринга есть совокупность

$M=\langle A,Q,P\rangle$, (5.4)

где А – внешний алфавит (5.1), Q – алфавит внутренних состояний (5.2), P – программа (5.3).

Пример 5.5.

Машина с внешним алфавитом А = {1, а}, алфавитом внутренних состояний Q = {q_1, q_2} и программой

$1q_1 \to 1Rq_1$,

$aq_1 \to 1R\ q_1$,

из любой начальной конфигурации будет работать бесконечно, заполняя единицами всю ленту вправо от начальной точки.

Порядок работы машины Тьюринга часто задается в виде таблицы.

В каждый столбец верхней строчки заносятся символы внутреннего алфавита, в каждую строчку первого столбца – символы внешнего алфавита. В ячейках на пересечении других столбцов и строчек помещаются команды.

Если на пересечении какой-либо строки и какого-либо столбца мы получим пустую клетку, то это означает, что в данном внутреннем состоянии данный символ встретиться не может.

A/Q	q_0	q_1	…	q_i	q_n
a_0					
a_1					
…					
a_j				a_jKq_i	
…					
a_m					

Формат команды: aKq, где:

a – новое содержание текущей ячейки (новый символ внешнего алфавита, который заносится в текущую ячейку);

K – команда лентопротяжного механизма машины Тьюринга (влево, вправо, стоп);

q – новое внутренне состояние машины Тьюринга.

Работа машины на основании заданной программы происходит следующим образом.

Предположим, что в данный момент времени машина Тьюринга находится во внутреннем состоянии q_i, а в обозреваемой кареткой ячейке ленты находится символ a_j.

Тогда машина переходит к выполнению команды a_jKq_i в ячейке, на пересечении столбца q_i и строки a_j:

1) в текущую ячейку ленты заносится новый символ a_j (возможно, тот же самый).

2) происходит сдвиг головки влево (K = влево), или сдвиг головки вправо (K = вправо), или головка остается на месте, т. е. происходит остановка машины (K = стоп).

3) машины переходит в новое внутреннее состояние q_i.

Возможные случаи останова машины Тьюринга:

1) в ходе выполнения программы машина дойдет до выполнения команды остановки; программа в этом случае считается выполненной, машина останавливается – происходит результативная остановка.

2) машина никогда не останавливается, происходит зацикливание.

Пример 5.6.

Пусть внешний алфавит A = {0, 1, 2}, а множество внутренних состояний состоит лишь из одного состояния Q = {q_0}. Необходимо построить машину Тьюринга, которая в произвольной записи, начиная из любой ячейки, двигаясь вправо, находит первый нуль и останавливается. Такая машина может быть задана таблицей 5.1.

Табл. 5.1

a	q_0
0	$0Cq_0$
1	$1Rq_0$
2	$2Rq_0$

Действительно, пусть, например, вначале машина находится в состоянии

						1	1	2	0	1	2	2

Рис. 5.2

Головка обозревает символ 1. В соответствии с табл. 5.2 выполняется команда $1Rq_0$, т. е. в обозреваемую ячейку записывается тот же самый символ 1 и головка смещается вправо (рис 5.3).

						1	1	2	0	1	2	2

Рис. 5.3

Теперь головка снова обозревает символ 1 и в соответствии с табл. 5.2 выполняется команда $1Rq_0$, т. е. т. е. в обозреваемую ячейку записывается тот же самый символ 1 и головка смещается вправо (рис 5.4).

						1	1	2	0	1	2	2

Рис. 5.4

Теперь головка обозревает символ 2 и в соответствии с табл. 5.2 выполняется команда $2Rq_0$, т. е. т. е. в обозреваемую ячейку записывается тот же самый символ 2 и головка смещается вправо (рис 5.5).

						1	1	2	0	1	2	2

Рис. 5.5

Теперь головка обозревает символ 0 и в соответствии с табл. 5.2 выполняется команда $0Cq_0$ т. е. в обозреваемую ячейку записывается тот же самый символ 0 и машина останавливается.

Пример 5.7.

Построим машину Тьюринга, которая слово ¬(AVB) преобразует в слово ¬A&¬B, а слово ¬(A&B) преобразует в слово ¬A V¬B, что соответствует законам де Моргана. Такая машина может быть задана таблицей 5.2.

Внешний алфавит A = {¬, A, B, V, &, (,), _} (символ _ соответствует пустой ячейке), а множество внутренних состояний состоит лишь из одного состояния Q = {q_0}.

Табл. 5.2

A	q_0
⍰	$\_Rq_0$
A	ARq_0
B	⍰Rq_0
V	$\&Rq_0$
&	VRq_0
(	⍰Rq_0
)	BRq_0
_	$\_Cq_0$

Данные машины Тьюринга – это слова во внешнем алфавите ленты. На ленте записывается и исходные данные и конечный результат. На ленте могут быть записаны слова, а также последовательности слов. В последнем случае между словами ставится специальный символ-разделитель, им может быть пробел или символ $*$. Натуральное число a представляется словом $1\ldots1 = 1^a$, состоящим из a единиц. Например, числу 3 соответствует слово 111.

Пример 5.8.

Построим машину Тьюринга, которая производит сложение двух натуральных чисел a и b. Сложить два числа a и b – это значит слово $1^a * 1^b$ преобразовать в слово 1^{a+b}. Это можно сделать, удалив в записи $a*b$ символ разделителя $*$ и сдвинув первое слагаемое ко второму. Такая машина может быть задана таблицей 5.3. Внешний алфавит A = {1, $*$, _}, где $*$ – символ разделителя, а _ – символ пустой ячейки (пробел). Множество внутренних состояний состоит из трех состояний $Q = \{q_0, q_1, q_2\}$.

Табл. 5.3

a	q_0	Q_1	q_2
1	_Rq_1	1Rq_1	1Lq_2
$*$	_Rq_1	1Lq_2	
_		_Cq_1	_1Rq_1

Начальное и конечное состояния ленты для случая a = 2, b = 3 представлено на рис. 5.6 a) и b)

a)

						1	1	$*$	1	1	1	

b)

							1	1	1	1	1	

Рис. 5.6

Вычислимые по Тьюрингу функции

Будем рассматривать функции f от одной или нескольких переменных, заданных на множестве N = {0, 1, 2, …, n, …} натуральных чисел или его подмножествах (частичные функции) и принимающие значения на множестве N.

Определение 5.8. Функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется вычислимой, если существует алгоритм, позволяющий вычислять ее значения для тех переменных, для которых она определена, и работающий бесконечно, если функция для данного набора переменных не определена.

Определение 5.9. Функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется вычислимой по Тьюрингу, если существует машина Тьюринга, вычисляющая эту функцию.

Переменные можно располагать в виде слов с разделителями

$*11\ldots1*\ 11\ldots1*\ldots\ldots*11\ldots1*$

Пример 5.9.

Запись $*111*\ 11*1*$ соответствует трем переменным x_1, x_2, x_3, равным, соответственно, 3, 2 и 1

Функция также записывается словом, состоящим из единиц.

Пример 5.8 представляет функцию двух переменных f(a, b) = a + b.

Тезис Тьюринга. Всякий алгоритм можно реализовать машиной Тьюринга.

Тезис Тьюринга доказать нельзя. Это утверждение означает, что математическое понятие вычислимой по Тьюрингу функции является идеальной моделью интуитивного понятия алгоритма. Этот тезис подтверждается опытом. По своему характеру тезис Тьюринга напоминает математические законы механики, которые точно так же не могут быть доказаны, но, открытые Ньютоном, многократно подтверждены опытом. В силу тезиса Тьюринга невозможность построения машины Тьюринга означает отсутствие алгоритма решения данной проблемы.

Изучение машин Тьюринга закладывает фундамент алгоритмического мышления, сущность которого состоит в том, что нужно уметь разделять процесс вычисления на простые составляющие шаги. В машине Тьюринга такое разделение доведено до предельной простоты. В современной ЭВМ алгоритмический процесс разделяется не на столь мелкие составляющие, как в машине Тьюринга. Наоборот, есть стремление укрупнить выполняемые машиной процедуры. Например, операция сложения в машине Тьюринга – целая программа, а в ЭВМ это простейшая функция.

2.4 Методические указания к выполнению контрольной работы

2.4.1 Пояснительная записка

Контрольная работа является одним из видов самостоятельной работы студентов. Она выполняется в соответствии с рабочей программой дисциплины и способствует развитию необходимых навыков практического использования методов решения задач, изученных на лекционных занятиях.

Целью написания контрольной работы является углубление и проверка знаний студентов по изучаемой дисциплине, полученных в ходе теоретических и практических занятий, развитие умений ориентироваться в вопросах методики преподавания, привитие студентам навыков самостоятельного подбора, осмысления и обобщения информации, полученной из периодической, учебной и научной литературы. Выполнение контрольной работы должно отразить самостоятельное изучение студентами курса и степень усвоения ими материала.

– Задания для контрольной работы по данному курсу ориентированы на развитие умений построения и анализа моделей средствами математической логики. Главной особенностью заданий по курсу «Математическая логика» является их ориентация на формирование способности формализованного представления реальных ситуаций, процессов, систем теоретико-множественными, графическими, логическими методами, а также на мотивирование самообразовательной деятельности.

Учебным планом направления подготовки, предусматривается написание контрольной работы по дисциплине. Этот вид письменной работы выполняется по вариантам, выбранным в соответствии с рекомендациями (порядок выбора варианта см. ниже).

Цель выполняемой работы: получить специальные знания по разделам курса;

Основные задачи выполняемой работы:

1) закрепление полученных ранее теоретических знаний;

2) выработка навыков самостоятельной работы;

3) выяснение подготовленности студента к будущей практической работе.

Весь процесс написания контрольной работы можно условно разделить на следующие этапы:

а) определение варианта работы;

б) сбор научной информации, изучение литературы;

в) изучение теоретических вопросов по заданию;

г) разбор задачи, методов ее решения (примеры решения задач разобраны).

2.4.2 Общие методические указания по выполнению работы

2.4.2.1 Общие требования к выполнению контрольной работы

Подготовку контрольной работы следует начинать с повторения соответствующего раздела учебника, учебных пособий по данной теме и конспектов лекций. Приступать к выполнению работы без изучения основных положений и понятий науки, не следует, так как в этом случае студент, как правило, плохо ориентируется в материале, не может отграничить смежные вопросы и сосредоточить внимание на основных, первостепенных проблемах рассматриваемой темы.

Номер варианта выбирается по последней цифре номера в журнале. (Цифра 0 соответствует 10 варианту.)

2.4.2.2 Требования к оформлению:

Контрольная работа должна состоять из:

- титульного листа;
- содержания;
- выполненных заданий по варианту;
- списка использованных источников;
- приложения (при необходимости).

При выполнении варианта необходимо:

- решить и оформить задания в текстовом редакторе MS Word;

-решение задач должно быть приведено полностью, с указанием используемых формул и ответа.

Работа должна быть оформлена в печатном виде на листах формата А4. шрифт – Times New Roman, размер основного текста– 14, заголовков первого уровня – 16;

междустрочный интервал – одинарный

поля: левое – не менее 30 мм; правое – не менее 10 мм; верхнее и нижнее – не менее 20 мм.

Страницы следует нумеровать арабскими цифрами, соблюдая сквозную нумерацию по всему тексту. Номер страницы проставляют в центре нижней части листа без точки.

1. Выполнив контрольную работу, студент должен указать используемую литературу.
2. Проверенные работы сохраняются и предоставляются на зачете.

3. Студент должен ознакомиться с рецензией и ответить на все замечания, чтобы быть готовым к ответу по работе. Если работа не зачтена, то ее нужно переделать в соответствии с указаниями преподавателя и сдать на повторную рецензию.

В содержании контрольной работы необходимо показать знание рекомендованной литературы по данной теме. Кроме рекомендованной специальной литературы, можно использовать любую дополнительную литературу, которая необходима для выполнения контрольной работы.

Перед выполнением контрольной работы студент должен изучить соответствующие разделы курса по учебным пособиям, рекомендуемым в списке литературы.

В ходе написания контрольной работы студенты расширяют полученные знания по изученным темам и закрепляют их. Контрольная работа должна соответствовать требованиям логического и последовательного изложения материала.

Содержание разделов, изучаемых в курсе, и соответствующие источники по темам приведены в разделе 2.2.

2.4.3Контрольные задания по курсу

Контрольные задания по курсу "Математическая логика "

1. Раздел «Логика высказываний»

Задание

1. Установить, является ли данная формула тождественно-истинной.
2. Данное высказывание записать в виде формулы логики высказываний. Построить отрицание данного высказывания в виде формулы, не содержащей внешних знаков отрицания. Перевести на естественный язык.
3. Установить, является ли данное рассуждение правильным, (проверить, следует ли заключение из конъюнкции посылок).

Варианты индивидуальных заданий

Вариант №1

1. $(P \supset Q) \supset ((Q \supset R) \supset (P \supset R))$.

2. Он и жнец, и швец, и на дуде игрец.

3. Если человек принял какое-то решение, и он правильно воспитан, то он преодолеет все конкурирующие желания. Человек принял решение, но не преодолел конкурирующих желаний. Следовательно, он неправильно воспитан.

Вариант №2

1. $(P \supset Q) \supset ((P \supset (Q \supset R)) \supset (P \supset R))$.

2. Идет дождь, и идет снег.

3. Если данное явление психическое, то оно обусловлено внешним воздействием на организм. Если оно физиологическое, то оно тоже обусловлено внешним воздействием на организм. Данное явление не психическое и не физиологическое. Следовательно, оно не обусловлено внешним воздействием на организм.

Вариант №3

1. $(P \supset R) \supset ((Q \supset R) \supset ((P \vee Q) \supset R))$.

2. Он хороший студент или хороший спортсмен.

3. Если подозреваемый совершил кражу, то, либо она была тщательно подготовлена, либо он имел соучастников. Если бы кража была тщательно подготовлена, то, если бы были соучастники, украдено было бы много. Украдено мало. Значит, подозреваемый невиновен.

Вариант №4

1. $(Q \supset R) \supset ((P \vee Q) \supset (P \vee R))$.

2. Если стальное колесо нагреть, то его диаметр увеличится.

3. Если курс ценных бумаг растет, или процентная ставка снижается, то падает курс акций. Если процентная ставка снижается, то либо курс акций не падает, либо курс ценных бумаг не растет. Курс акций понижается. Следовательно, снижается процентная ставка.

Вариант № 5

1. $((Q \vee (R \sim \neg P)) \supset (R \,\&\, (P \supset Q))) \vee \neg R$.

2. Если воду охлаждать, то объем ее будет уменьшаться.

3. Либо свидетель не был запуган, либо, если Генри покончил жизнь самоубийством, то записка была найдена. Если свидетель был запуган, то Генри не покончил жизнь самоубийством. Записка была найдена. Следовательно, Генри покончил жизнь самоубийством.

Вариант №6

1. $((P \supset Q) \supset (Q \supset R))\& P \supset R$.

2. Он учится в институте или на курсах иностранных языков.

3. Если философ – дуалист, то он не материалист. Если он не материалист, то он диалектик или метафизик. Он не метафизик. Следовательно, он диалектик или дуалист.

Вариант №7

1. $(Q \vee (R \supset P)) \supset (R \,\&\, (P \supset Q))$.

2. Он способный и прилежный.

3. Если капиталовложения останутся постоянными, то возрастут правительственные расходы или возникнет безработица. Если правительственные расходы не возрастут, то налоги будут снижены. Если налоги будут снижены и капиталовложения останутся постоянными, то безработица не возрастет. Безработица не возрастет. Следовательно, правительственные расходы возрастут.

Вариант №8

1. $(P \supset Q) \supset ((Q \supset R) \supset (P \supset R))$.

2. Эта книга сложная и неинтересная.

3. Если исходные данные корректны и программа работает правильно, то получается верный результат. Результат неверен. Следовательно, исходные данные некорректны или программа работает неправильно.

Вариант №9

1. $(P \supset Q) \supset ((Q \supset R) \supset (P \supset R))$.

2. Он и жнец, и швец, и на дуде игрец.

3. Если цены высоки, то и заработная плата высока. Цены высоки или применяется регулирование цен. Если применяется регулирование цен, то нет инфляции. Наблюдается инфляция. Следовательно, заработная плата высока..

Вариант №10

1. $((Q \vee (R \sim \neg P)) \supset (R \,\&\, (P \supset Q))) \vee \neg R$.

2. Если воду охлаждать, то объем ее будет уменьшаться.

3. Если я устал, я хочу вернуться домой. Если я голоден, я хочу вернуться домой или пойти в ресторан. Я устал и голоден. Поэтому я хочу вернуться домой.

2. Раздел «Логика предикатов»

Задание

1. Установить, является ли данное выражение формулой, а если да, то определить, какие переменные в ней свободные, а какие связанные.

2. Даны предикаты: A(x) и B(x). Записать словами предложенные формулы C и D.

3. Данное суждение записать в виде формулы логики предикатов. Построить отрицание данного суждения в виде формулы, не содержащей внешних знаков отрицания. Перевести на естественный язык.

Варианты индивидуальных заданий

Вариант №1

1. $\forall x\, (\exists y(\neg A(x))\&B(y, z))$.

2. A(x) = "x – торговец подержанными автомобилями"; B(x) = "x – нечестный человек". Записать словами: $C = \forall x(A(x) \supset B(x))$; $D = \exists\, x(B(x) \,\&\, A(x))$.

3. Не всякое действительное число является рациональным.

Вариант №2

1. $\forall x\, (\exists y(\neg A(x,y) \supset C(z) \,\&B(y, z)))$.

2. A(x) = "x – торговец наркотиками"; B(x) = "x – наркоман". Записать словами:

$C = \forall x(A(x) \supset B(x))$; $D = \exists x(A(x)\&B(x))$.

3. Каждый студент выполнил хотя бы одну лабораторную работу.

Вариант №3

1. $\forall x\, (\exists y(\neg A(x) \supset B(y, z))$.

2. A(x) = "x – рациональное число"; B(x) = "x – действительное число". Записать словами: $C = \exists x(B(x) \,\&\, A(x))$; $D = \forall x(A(x) \supset B(x))$.

3. Ни одно четное число, большее 2, не является простым.

Вариант №4

1. $\forall x\ (\exists y(\neg A(x)\&B(y))\supset C(y, z))$.

2. $A(x)$ = "x – политик"; $B(x)$ = "x – мошенник". $C = \neg(\forall x(A(x)\supset B(x)))$; $D = \exists x(A(x)\&\neg B(x))$.

3. Выгул собак или кошек запрещен.

Вариант № 5

1. $\forall x\ (\exists y(\neg A(x,y)\&B(y, z)))$.

2. $A(x)$ = "x – рыба"; $B(x)$ = "x – водное животное". $C = \exists x(B(x)\ \&\ A(x))$; $D = \forall x(A(x)\supset B(x))$.

3. Произведение любых двух простых чисел не является простым числом.

Вариант №6

1. $\forall x\ (\exists y(\neg A(x))\&B(y))$.

2. $A(x)$ = "x – четное число"; $B(x)$ = "x делится на 6". Записать словами:

$C = \forall x(B(x) \supset A(x))$; $D = \neg(\exists x((\neg A(x)\&B(x)))$.

3. Всякое положительное число больше всякого отрицательного числа.

Вариант №7

1. $\forall x\ (\exists y(\neg A(x)) \sim B(y, z))$.

2. $A(x)$ = "x – металл"; $B(x)$ = "x – теплопроводен". Записать словами:

$C = \exists x(B(x)\ \&\ A(x))$; $D = \forall x(A(x) \supset B(x))$.

3. Каждый, купивший билет, получит премию.

Вариант №8

1. $\forall x\ (\exists y(\neg A(x) \sim B(y, z)))$.

2. $A(x)$ = "x – простое число"; $B(x)$ = "x четное число". Записать словами:

$C = \forall x(B(x) \supset A(x))$; $D = (\exists x((A(x)\&B(x)))$.

3. Всякое положительное число больше всякого отрицательного числа.

Вариант №9

1. $\forall x\ (\exists y(\neg A(x, y)) \sim B(y, z))$.

2. $A(x)$ = "x – студент"; $B(x)$ = "x – сдал экзамены". Записать словами:

$C = \exists x(B(x)\ \&\ A(x))$; $D = \forall x(A(x) \supset B(x))$.

3. Всякий равносторонний треугольник является равнобедренным.

Вариант №10

1. $\forall x(\exists y(\neg A(x)\&B(y, z))$.

2. $A(x)$ = "x - деятельность"; $B(x)$ = "x дает счастье". Записать словами:

$C = \forall x(B(x) \supset A(x))$; $D = \neg(\exists x((\neg A(x)\&B(x)))$.

3. Некоторые студенты сдали все зачеты.

3 Раздел «Формальные аксиоматические теории (исчисления)»

Задание

1. Установить правильность рассуждения, построив вывод исчисления высказываний.
2. Установить правильность рассуждения, построив вывод исчисления предикатов.
3. Проверить вывод методом резолюций.

Варианты индивидуальных заданий

Вариант №1

1. Если философ дуалист, то он не материалист. Если он не материалист, то он метафизик. Этот философ дуалист. Следовательно, он метафизик.

2. Каждый студент честен. Джон нечестен. Значит, он не студент.

3. $A \supset (B \lor C), A, B \supset D, C \supset D \vdash D$.

Вариант №2

1. Если идет дождь, то крыши мокрые. Крыши не мокрые. Следовательно, дождя нет.

2. Каждый, кто силен и умен, добьется успеха. Петр силен и умен. Значит, Петр добьется успеха.

3. $\neg A \supset (B \vee C), \neg A \vee C, \neg B \vdash C$.

Вариант №3

1. Если треугольник равносторонний, то его углы равны. Треугольник равносторонний. Следовательно, его углы равны.

2. Надежда еще не потеряна. Значит, еще не все потеряно.

3. $A \& C \supset B$, $A, B \supset D, C \vdash D$.

Вариант №4

1. Если это преступление совершил Смит, то он знает, где находятся похищенные деньги. Смит не знает, где находятся похищенные деньги. Следовательно, он не совершал преступления.

2. Всякий, кто не может решить эту задачу – не математик. Иван не может решить эту задачу. Значит, Иван не математик.

3. $A \vee B, A \supset C, B \supset D \vdash C \vee D$.

Вариант № 5

1. Если не зафиксировано изъятие следов преступной деятельности в протоколе, то процессуальный порядок следственного действия не соблюден. Процессуальный порядок следственного действия соблюден. Следовательно, изъятие следов преступной деятельности зафиксировано в протоколе.

2. Все металлы теплопроводны. Дерево не теплопроводно. Значит, дерево не металл.

3. $A, C, A \& C \supset D, D \supset B \vdash B$.

Вариант №6

1. Этот человек инженер или рабочий. Он не инженер. Следовательно, он рабочий.

2. Все медсестры – медицинские работники. Все медицинские работники имеют право на льготы. Следовательно, все медсестры имеют право на льготы.

3. $\neg A \supset (B \vee C), A \supset B, \neg C \vdash B$.

Вариант №7

1. Если студент занимается не систематически, то он не имеет прочных знаний Если он не имеет прочных знаний, то он не будет хорошим специалистом. Следовательно, если студент занимается не систематически, то он не будет хорошим специалистом.

2. Все собаки обладают хорошим обонянием. Джек – собака. Следовательно, Джек обладает хорошим обонянием.

3. $A, A \supset (\neg B \supset C), B \supset D, \neg C \vdash D$.

Вариант №8

1. Это вещество может быть кислотой либо щелочью. Это вещество не щелочь. Следовательно, это кислота.

2. Этому никто не поверит. Значит, судья этому не поверит.

3. $(A \supset C) \supset (\neg A \supset B) \vdash A \vee B$.

Вариант №9

1. Если прямая касается окружности, то радиус, проведенный в точку касания, перпендикулярен к ней. Радиус окружности не перпендикулярен к этой прямой. Следовательно, прямая не касается окружности.

2. Все натуральные числа – целые. 5 – натуральное число. Значит, 5 – целое число.

3. $B \vee C, C \supset A, B \supset D, D \supset A \vdash A$.

Вариант №10

1. Если человек знает геометрию, то он знает теорему Пифагора, Этот человек не знает теорему Пифагора. Следовательно, он не знает геометрию.

2. Всякое положительное целое число есть натуральное число. Число 7 – положительное целое число. Следовательно, 7 – натуральное число.

3. $\neg B \supset (D \supset C), D, C \supset (A \vee B) \vdash A \vee B$.

4. Раздел «Нечеткая логика»

Задание

Определить степень равносильности формул. $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ при условии, что $\tilde{X}$ и $\tilde{Y}$ принимают значения степеней истинности из множества $\{0{,}2;\ 0{,}3\}$.

Варианты индивидуальных заданий

№	$\tilde{A}$	$\tilde{B}$		$\tilde{A}$	$\tilde{B}$
1в	а) $\tilde{X} \supset \tilde{Y}$ б) $\neg\tilde{X} \vee \tilde{Y}$	$\neg\tilde{X} \,\&\, \tilde{Y}$ $\tilde{X} \,\&\, \tilde{Y}$	1в	а) $\tilde{Y} \,\&\, \neg\tilde{X}$ б) $\tilde{Y} \supset \tilde{X}$	$\neg\tilde{X} \supset \tilde{Y}$ $\neg\tilde{X} \vee \tilde{Y}$
2в	а) $\tilde{X} \,\&\, \tilde{Y}$ б) $\neg\tilde{X}$	$\tilde{X} \supset \neg\tilde{Y}$ $\neg\tilde{X} \vee \tilde{Y}$	2в	а) $\neg\tilde{X}$ б) $\neg\tilde{X} \,\&\, \tilde{Y}$	$\tilde{X} \,\&\neg\, \tilde{Y}$ $\tilde{X} \vee \neg\tilde{Y}$
3в	а) $\tilde{Y} \supset \neg\tilde{X}$ б) $\tilde{X} \supset \neg\tilde{Y}$	$\tilde{X} \,\&\, \tilde{Y}$ $\neg\tilde{Y}$	3в	а) $\tilde{Y} \vee \neg\tilde{X}$ б) $\neg\tilde{Y}$	$\neg\tilde{Y}$ $\neg\tilde{X} \supset \tilde{Y}$
4в	а) $\tilde{X} \,\&\, \neg\tilde{Y}$ б) $\neg\tilde{Y}$	$\neg\tilde{X}$ $\neg\tilde{X} \supset \neg\tilde{Y}$	4в	а) $\tilde{X} \supset \tilde{Y}$ б) $\neg\tilde{Y}$	$\neg\tilde{X} \,\&\neg\, \tilde{Y}$ $\neg\tilde{X} \supset \tilde{Y}$
5в	а) $\tilde{Y} \supset \tilde{X}$ б) $\neg\tilde{X}$	$\tilde{X} \vee \neg\tilde{Y}$ $\tilde{Y} \supset \tilde{X}$	5в	а) $\tilde{X} \,\&\, \neg\tilde{Y}$ б) $\tilde{Y} \,\&\, \tilde{X}$	$\neg\tilde{X}$ $\neg\tilde{X} \vee \neg\tilde{Y}$

2.4.4 Примеры решения заданий

ТЕМА. ЛОГИКА ВЫСКАЗЫВАНИЙ

Следующие утверждения являются высказываниями:

а) Москву основал Юрий Долгорукий.

б) В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.

в) 2 $\cdot$ 2 = 5.

Высказывания а) и б) истинны, а высказывание с) ложно.

Пример.

Следующие утверждения не являются высказываниями:

а) a + b = 2.

б) Математика – интересный предмет.

Операции над высказываниями. Алгебра высказываний

A = “Каспаров – чемпион мира по шахматам”.

¬A = “Неверно, что Каспаров – чемпион мира по шахматам”.

Отрицание определяется следующей таблицей истинности (таблица 1.1):

Таблица 1.1

A	□A
Л	И
И	Л

A = “Треугольник прямоугольный”.
B = “Треугольник равнобедренный”.
A&B = “Треугольник прямоугольный и равнобедренный”.
Конъюнкция определяется следующей таблицей истинности (таблица 1.2):

Таблица 1.2

A	B	A&B
Л	Л	Л
Л	И	Л
И	Л	Л
И	И	И

A = “Иванов юрист”.
B = “Иванов экономист”.
AVB = “Иванов юрист или экономист”.
Дизъюнкция определяется следующей таблицей истинности (таблица 1.3):

Таблица 1.3

A	B	AVB
Л	Л	Л
Л	И	И
И	Л	И
И	И	И

A = “Треугольник равносторонний”.
B = “В треугольнике все углы равны”.
A ⊃ B = “Если треугольник равносторонний, то все углы равны”.
Импликация определяется следующей таблицей истинности (таблица 1.4):

Таблица 1.4

A	B	A□B
Л	Л	И
Л	И	И
И	Л	Л
И	И	И

Рассмотрим четыре высказывания:

A = “Дважды два четыре” = И;
B = “Дважды два пять” = Л;
C = “Снег белый” = И;
D – “Снег черный” = Л.
Образуем четыре импликации:
A ⊃ C = “Если дважды два четыре, то снег белый” = И ⊃ И = И;
B ⊃ C = “Если дважды два пять, то снег белый” = Л ⊃ И = И;
A ⊃ D = “Если дважды два четыре, то снег черный” = И ⊃ Л = Л;
B ⊃ D = “Если дважды два пять, то снег черный” = Л ⊃ Л = И.

А = “Треугольник равнобедренный”.

В = “В треугольнике углы при основании равны”.

А ~ В = “Треугольник является равнобедренным тогда и только тогда, когда углы при основании равны”.

Эквивалентность определяется следующей таблицей истинности (таблица 1.5):

Таблица 1.5

A	B	A~B
Л	Л	И
Л	И	Л
И	Л	Л
И	И	И

Высказывания вместе с определенными для них операциями образуют алгебру высказываний.

Формулы логики высказываний. Равносильность формул

Определение Формула логики высказываний определяется индуктивно следующим образом:

1. Любая высказывательная переменная, а также константы И, Л есть формула.
2. Если А и В – формулы, то ¬А, AVB, A&B, A⊃B, A~B есть формулы.
3. Ничто, кроме указанного в пунктах 1 – 2, не есть формула.

Доказать равносильность формул логики высказываний:

(A⊃B) & (A V B) ≡ B.

Преобразуем левую часть, последовательно используя равносильности 12, 14, 10, 5а, 9г, 6б:

(A⊃B) & (A V B) ≡ (¬A V B) & (A V B) ≡ ¬A & A V ¬A &B V B & A V B & B ≡ ¬A &B V B &A V B ≡ B.

Равносильность доказана.

Запись сложного высказывания в виде формулы логики высказываний

Если имеется несколько высказываний, то при помощи логических операций можно образовывать различные новые высказывания. При этом исходные высказывания принято называть простыми, а вновь образованные высказывания – сложными.

Рассмотрим простые высказывания:.

А = "Будет холодное лето".

В = "Будет дождливое лето".

С = "Будет засушливое лето".

D = "Будет хороший урожай".

Формула (A&B V C) ⊃ ¬D соответствует сложному высказыванию:

"Если будет холодное и дождливое или засушливое лето, урожай будет плохим".

Пример 1.11.

А = “Треугольник прямоугольный”.

В = “Квадрат одной стороны равен сумме квадратов двух других сторон”

А ⊃ В (прямая теорема) = “Если треугольник прямоугольный, то квадрат одной стороны равен сумме квадратов двух других сторон”.

$B \supset A$ (обратная теорема) = “Если квадрат одной стороны равен сумме квадратов двух других сторон, то треугольник прямоугольный”.

$\neg B \supset \neg A$ (противоположная теорема) = “Если квадрат одной стороны не равен сумме квадратов двух других сторон, то треугольник не прямоугольный”.

В данном случае все три теоремы верны.

Равносильность $A \supset B \equiv \neg B \supset \neg A$ есть основание метода доказательства от противного. Например, для доказательства теоремы : “Если треугольник равнобедренный, то углы при основании равны” ($A \supset B$) достаточно доказать теорему: “Если углы при основании не равны, то треугольник не равнобедренный” ($\neg B \supset \neg A$).

Пример

Дано высказывание “Если политик обещает невыполнимое, то он обманывает людей”:

а) записать его в виде формулы логики высказываний;

б) произвести отрицание данного высказывания, так, чтобы результат не содержал внешних знаков отрицания; полученную при этом формулу записать на естественном языке.

Введем следующие высказывания:

A = ”Политик обещает невыполнимое”.

B = “Политик обманывает людей”.

Данное нам высказывание может быть записано в виде формулы: $A \supset B$.

Построим отрицание высказывания, воспользовавшись равносильностью 12:

$\neg(A \supset B) \equiv A \& \neg B$.

На естественном языке это может быть выражено следующим образом:

“Политик обещает невыполнимое, но он не обманывает людей”.

Тождественно-истинные и тождественно-ложные формулы. Проблема разрешимости

Пример

Доказать, что формула $F = (A \supset B) \supset ((C \vee A) \supset (C \vee B))$ является тождественно-истинной.

Последовательно применяя равносильные преобразования, приведем нашу формулу к КНФ:

$(A \supset B) \supset ((C \vee A) \supset (C \vee B)) \equiv \neg(A \supset B) \vee ((C \vee A) \supset (C \vee B)) \equiv (A \& \neg B) \vee \neg(C \vee A) \vee (C \vee B) \equiv (A \& \neg B) \vee (\neg C \& \neg A) \vee (C \vee B) \equiv (A \vee \neg C) \& (A \vee \neg A) \& (\neg B \vee \neg C) \& (\neg B \vee \neg A) \vee (C \vee B)$
$\equiv (A \vee \neg C) \& (\neg B \vee \neg C) \& (\neg B \vee \neg A) \vee (C \vee B)$
$\equiv (A \vee \neg C \vee C \vee B) \& (\neg B \vee \neg C \vee C \vee B) \& (\neg B \vee \neg A \vee C \vee B)$.

В первую дизъюнкцию входят C и ¬C. Во вторую – B и ¬B, C и ¬C. в третью – B и ¬B. Следовательно, на основании теоремы 1.1 можно утверждать, что исходная формула является тождественно-истинной.

Так как всякой формуле соответствует таблица истинности, то тождественная истинность или тождественная ложность формулы может быть установлена двумя путями:

1) приведением с помощью равносильных преобразований к КНФ или ДНФ;

2) составлением таблицы истинности.

Пример

Установить, является ли тождественно-истинной данная формула логики высказываний: $f(A, B) = (A \& (A \supset B)) \supset B$.

1) Последовательно применяя равносильные преобразования, приведем нашу формулу к КНФ:

$(A \& (A \supset B)) \supset B \equiv (A \& (\neg A \vee B) \supset B \equiv \neg(A \& (\neg A \vee B) \supset B \equiv \neg A \vee \neg(\neg(A \vee B) \vee B$
$\equiv \neg A \vee (A \& B) \vee B \equiv (\neg A \vee B) \vee A \& \neg B \equiv (\neg A \vee B \vee A) \& (\neg A \vee B\ \neg B)$.

В первую дизъюнкцию входят A и ¬A. Во вторую – B и ¬B, поэтому формула является тождественно истинной, f(A, B) ≡ И.

2) Составим таблицу истинности f(A, B) (таблица 1.6):

Таблица 1.6

A	B	$A\supset B$	$A\&(A\supset B)$	$(A\&(A\supset B))\supset B$
Л	Л	И	Л	И
Л	И	И	Л	И
И	Л	Л	Л	И
И	И	И	И	И

Из таблицы 1.6 видно, что $f(A, B) \equiv$ И.

Формализация рассуждений. Правильные рассуждения

Рассуждение – это построение нового высказывания D на основании уже имеющихся высказываний $P_1, P_2, \dots , P_n$. Высказывания $P_1, P_2, \dots , P_n$ называются посылками, а высказывание D – заключением.

Пример 1.15.

Проверить правильность следующих рассуждений:

а) "Если книга сложная, то она неинтересная. Эта книга интересная. Значит, она несложная".

Введем высказывания: A = "Книга сложная"; B = "Книга интересная". Схема рассуждения имеет вид:

$$\frac{A \supset \neg B,\ B}{\neg A}$$

Докажем, что формула $((A \supset \neg B) \& B) \supset \neg A$ является тождественно-истинной. Приведем эту формулу к КНФ:

$((A \supset \neg B)\&B) \supset \neg A \equiv \neg((A \supset \neg B)\& B) \vee \neg A \equiv (A \& B) \vee \neg B \vee \neg A \equiv (\neg A \vee \neg B \vee A)\&(\neg A \vee \neg B \vee B) \equiv$ И.

Значит, рассуждение правильное.

б) "Если будет хорошая погода, я пойду гулять. Если будет плохая погода, я буду читать книгу. Погода будет хорошая. Следовательно, я не буду читать книгу".

Введем высказывания: A = "Будет хорошая погода"; B = "Я пойду гулять". C = "Я буду читать книгу". Схема рассуждения имеет вид:

$$\frac{A \supset B,\ \neg A \supset C,\ A.}{\neg C}$$

Найдем КНФ формулы $((A \supset B) \& (\neg A \supset C) \& A) \supset \neg C$:

$((A \supset B) \& (\neg A \supset C) \& A) \supset \neg C \equiv \neg((A \supset B) \& (\neg A \supset C) \& A) \vee \neg C \equiv \neg(A \supset B) \vee \neg(\neg A \supset C) \vee \neg A) \vee \neg C \equiv A \& \neg B \vee \neg A \& \neg C \vee \neg A \vee \neg C \equiv A \& \neg B \vee \neg A \vee \neg C \equiv (A \vee \neg A \vee \neg C) \& (\neg B \vee \neg A \vee \neg C) \equiv \neg B \vee \neg A \vee \neg C$.

Полученная КНФ нашей формулы не содержит одновременно какой-либо переменной и ее отрицания. Следовательно, формула не является тождественно-истинной, а рассуждение не является правильным.

ТЕМА. ЛОГИКА ПРЕДИКАТОВ

Определение предиката. Кванторы

Пример 2.1.

а) $P(x)$ = "x – четное число". Здесь M – множество целых чисел, $x \in M$.

б) $A(x, y, z)$ = "x, y, z лежат на одной окружности". Здесь M – множество точек плоскости, $x, y, z \in M$

в) $B(x, y)$ = "x старше y". Здесь M – множество людей, $x, y \in M$.

Предикат от n переменных называется n-местным предикатом. Высказывание есть 0-местный предикат.

Над предикатами можно производить обычные логические операции и получать при этом другие предикаты. Таким образом можно говорить об алгебре предикатов.

Пример 2.2.

Пусть A(x) – предикат “x делится на 3”, а B(x) – предикат “x делится на 2”. Тогда A(x) V B(x) – предикат “x делится на 3 или на 2”, а A(x) & B(x) – предикат “x делится на 3 и на 2”.

Пример .

Пусть P(x) – предикат “x – четное число”. Тогда $\forall xP(x)$ есть высказывание “Всякое x – четное число" = “Все числа – четные", которое истинно на множестве M четных чисел и ложно, если M содержит хотя бы одно нечетное число, например, если M – множество целых чисел. Отрицание $\neg\forall xP(x)$ есть высказывание “Не всякое x – четное число" = “Не все числа – четные", которое истинно на множестве целых чисел и ложно на множестве четных чисел.

Квантор существования. Пусть P(x) – некоторый предикат, $x \in M$. Тогда выражение $\exists xP(x)$ является истинным высказыванием, если P(x) истинно <u>хотя бы для одного</u> $x \in M$ и ложным в противном случае. Символ $\exists x$ называется квантором существования. Выражение $\exists xP(x)$ читается: “Существует x, для которого имеет место P(x)”. В обычной речи квантору существования соответствуют слова: некоторый, несколько. Возможно отрицание квантора существования: $\square\exists xP(x)$: “Не существует x, для которого имеет место P(x)”.

Кванторы существования и общности называются двойственными кванторами.

Пример .

Пусть, как и в примере 2.3, P(x) – предикат “x – четное число”. Тогда $\exists xP(x)$ есть высказывание “Некоторые x – четные числа” = “Существуют четные числа”, которое истинно на множестве M, содержащем хотя бы одно четное число и ложно, если M содержит только нечетные числа. Высказывание $\neg\exists xP(x)$ = “Неверно, что некоторые x – четные числа” = “Не существует четных чисел” истинно на множестве M, содержащем только нечетные числа и ложно, если M содержит хотя бы одно четное число.

Буква x, стоящая справа от квантора, называется кванторной переменной и должна присутствовать обязательно. Переменная, стоящая под знаком квантора, называется также связанной переменной. Несвязанная переменная называется свободной. Выражения $\forall xP(x)$ и $\exists xP(x)$ не зависят от x и имеют вполне определенные значения. Поэтому переименование связанной переменной, т. е. переход, например, от выражения $\forall xP(x)$ к $\forall yP(y)$ не меняет его истинностного значения.

Формулы логики предикатов. Равносильность формул

Пример.

1. Следующие выражения являются формулами логики предикатов:

а) $A \,\&\, B \supset C$, где A, B, C – высказывания.

б) $\forall x\exists yQ(x, y, z) \,\&\, \forall x\exists yP(x, y, u)$.

Проанализируем последовательно это выражение.

Предикат Q(x, y, z) – формула;

Выражение $\forall x\exists yQ(x, y, z)$ – формула; переменные x, y – связанные, переменная z – свободная.

Предикат P(x, y, u) – формула.

Выражение $\forall x\exists yP(x, y, u)$ – формула; переменные x, y – связанные, переменная u – свободная.

Выражение $\forall x\exists yQ(x, y, z) \,\&\, \forall x\exists yP(x, y, u)$ – формула; переменные x, y – связанные, переменные z, u – свободные.

2. Выражение $\forall x\exists yP(x, y, z) \supset Q(x, y, z)$ формулой не является. Действительно, выражение $\forall x\exists yP(x, y, z)$ есть формула, в которой переменные x и y связанные, а переменная z свободная. Выражение $Q(x, y, z)$ также формула, но в ней все переменные x, y, z свободные.

1. Все равносильности, имеющие место для логики высказываний, переносятся на логику предикатов.

Пример 2.6.

а) $\exists x(A(x) \supset \forall yB(y)) \equiv \exists x(\neg A(x) \vee \forall yB(y))$.

б) $\forall xA(x) \supset (B(z) \supset \forall xC(x)) \equiv \neg(\forall xA(x)) \vee \neg B(z) \vee \forall xC(x)$.

в) $(\exists xA(x) \supset \forall yB(y)) \supset C(z) \equiv \neg(\exists xA(x) \supset \forall yB(y)) \vee C(z) \equiv \neg(\neg(\exists xA(x)) \vee \forall yB(y) \vee C(z) \equiv \exists xA(x) \,\&\, \neg(\forall yB(y)) \vee C(z)$.

2. Перенос квантора через отрицание.

Пусть A – формула, содержащая свободную переменную x. Тогда

$\neg(\forall xA(x) \equiv \exists x(\neg A(x))$. (2.1)

$\neg(\exists xA(x)) \equiv \forall x\neg(A(x))$. (2.2)

Правило переноса квантора через знак отрицания можно сформулировать так: знак отрицания можно ввести под знак квантора, заменив квантор на двойственный.

Пример.

$\neg(\exists x(A(x) \supset \forall yB(y)) \equiv \neg(\exists x(\neg A(x) \vee \forall yB(y)) \equiv \forall x(\neg(\neg A(x) \vee \forall yB(y))) \equiv \forall x(A(x) \,\&\, \neg\forall yB(y)) \equiv \forall x(A(x) \,\&\, \exists y\neg B(y))$.

3. Вынос квантора за скобки.

4. Дистрибутивность квантора общности относительно конъюнкции и квантора существования относительно дизъюнкции.

Пример.

Показать, что формулы $\forall x(A(x) \vee B(x))$ и $\forall xA(x) \vee \forall xB(x))$ не равносильны.

Пусть M – множество натуральных чисел, A(x) = “x – четное число”, B(x) = “x – нечетное число”. Тогда

$\forall x(A(x) \vee B(x))$ = “Всякое натуральное число четное или нечетное” = И.

$\forall xA(x)$ = “Всякое натуральное число – четное” = Л,

$\forall xB(x)$ = “Всякое натуральное число – нечетное” = Л,

$\forall xA(x) \vee \forall xB(x)$ = “Всякое натуральное число четное или всякое натуральное число нечетное” = Л,

т. е. формулы $\forall x(A(x) \vee B(x))$ и $\forall xA(x) \vee \forall xB(x)$ не равносильны.

Пример .

Показать, что формулы $\exists x(A(x) \,\&\, B(x))$ и $\exists xA(x) \,\&\, \exists xB(x)$ не равносильны.

Пусть A(x) = “У x голубые глаза”, B(x) = “У x черные глаза”. Тогда

$\exists x(A(x) \,\&\, B(x))$ = “У некоторых голубые и черные глаза” = Л,

$\exists xA(x)$ = “У некоторых голубые глаза” = И,

$\exists xB(x)$ = “У некоторых черные глаза” = И,

$\exists xA(x) \,\&\, \exists xB(x)$ = “У некоторых голубые, и у некоторых черные глаза” = И

т. е. формулы $\exists x(A(x) \,\&\, B(x))$ и $\exists xA(x) \,\&\, \exists xB(x)$ не равносильны.

5. Перестановка одноименных кванторов.

$\forall x\forall yA(x,y) \equiv \forall y\forall xA(x,y)$. (2.9)

$\exists x\exists yA(x,y) \equiv \exists y\exists xA(x,y)$. (2.10)

Разноименные кванторы переставлять, вообще говоря, нельзя.

Пример.

Пусть M – множество натуральных чисел, A(x, y) = “x > y”.

а) $\forall x\forall yA(x, y)$ = “Для всех x и y имеет место x > y” = Л;

$\forall y\forall xA(x, y)$ = “Для всех y и x имеет место x > y” = Л;

$\forall x\forall yA(x, y) \equiv \forall y\forall xA(x, y)$.

б) $\exists x\exists yA(x, y)$ = “Существуют такие x и y, что x > y” = И;

$\exists y \exists x A(x, y)$ = “Существуют такие y и x, что $x > y$” = И;

$\exists x \exists y A(x, y) \equiv \exists y \exists x A(x, y)$.

в) $\exists x \forall y A(x, y)$ = “Существует такое x, что для всякого y имеет место $x > y$” = Л (утверждается существование максимального числа на множестве натуральных чисел);

$\forall y \exists x A(x, y)$ = “Для всякого y существует такое x, что $x > y$” = И;

$\exists x \forall y A(x, y) \neq \forall y \exists x A(x, y)$.

г) $A(x, y)$ = “Книгу x читал человек y”.

$\forall x \exists y A(x, y)$ = “Каждую книгу читал кто-нибудь” = И (например автор книги читал свою книгу);

$\exists y \forall x A(x, y)$ = “Существует человек, который читал все книги” = Л;

$\forall x \exists y A(x, y) \neq \exists y \forall x A(x, y)$.

6. Переименование связанных переменных.

Заменяя связанную переменную формулы A другой переменной, не входящей в эту формулу, всюду: в кванторе и в области действия квантора, получим формулу, равносильную A.

Пример.

$A = \forall x F(x) \supset \exists x G(x)$.

Заменяя связанную переменную x на y в первом члене импликации и на z во втором, получим равносильную формулу:

$B = \forall y F(y) \supset \exists z G(z)$.

$A \equiv B$.

Приведенные и нормальные формулы

Пример 2.12.

1. $A(x) \& B(x, y)$.
2. $\forall x A(x) \vee \exists x \neg B(x, y)$.
3. $\neg(A(x) \& B(x, y))$.
4. $\forall x A(x) \supset \exists x \neg B(x, y)$.
5. $\neg(\forall x A(x) \supset \exists x \neg B(x, y))$.

Первые две формулы в соответствии с определением являются приведенными, остальные не являются приведенными. В третьей формуле знак отрицания стоит перед формулой, а не перед символами предикатов. В четвертой формуле используется недопустимый для приведенной формулы символ импликации $\supset$. В пятой формуле знак отрицания стоит перед формулой и используется недопустимый для приведенной формулы символ импликации.

Пример.

Рассмотрим третью, четвертую и пятую формулы примера 2.12 и получим для них приведенные формулы.

Для третьей формулы по закону де Моргана:

$\neg (A(x) \& B(x, y)) \equiv \neg A(x) \vee \neg B(x, y)$.

Для четвертой формулы:

$\forall x A(x) \supset \exists x \neg B(x, y) \equiv \neg \forall x A(x) \vee \exists x \neg B(x, y) \equiv \exists x \neg A(x) \vee \exists x \neg B(x, y)$.

Для пятой формулы:

$\neg(\forall x A(x) \supset \exists x \neg B(x, y)) \equiv \neg(\exists x \neg A(x) \vee \exists x \neg B(x, y)) \equiv \neg(\exists x \neg A(x)) \& \neg(\exists x \neg B(x, y)) \equiv \forall x A(x) \& \forall x B(x, y)$.

Пример.

3. $\forall x \exists y(\neg A(x) \vee B(x, y))$ – нормальная формула.
4. $\forall x(\neg A(x)) \& \exists y B(x, y)$ – приведенная формула, не являющаяся нормальной.

Воспользуемся равносильными преобразованиями :

$$Q x A(x) \vee B \equiv Q x(A(x) \vee B) \qquad (2.18)$$

$QxA(x) \& B \equiv Qx(A(x) \& B)$. (2.19)

В тождествах (2.18), (2.19) формула B не зависит от x.

$Q_1xA(x) \& Q_2xB(x) \equiv Q_1xQ_2z(A(x)\&B(z))$ (2.20)

$Q_1xA(x) \vee Q_2xB(x) \equiv Q_1xQ_2z(A(x) \vee B(z))$ (2.21)

Тождества (2.18) и (2.19) есть обобщенная запись равносильных преобразований (2.3) – (2.6), а тождества (2.20) и (2.21) обобщают равносильности (2.14) – (2.17).

Мы видим, что тождества (2.18) – (2.21) позволяют поместить кванторы впереди формулы, что и требуется для нормальной формулы.

Пример 2.15.

Найти равносильную нормальную формулу для приведенной формулы: $\forall x\exists yA(x, y) \& \exists x\exists u(x, u)$.

В формуле $\exists yA(x, y)$ переменная y связана, поэтому $\exists yA(x, y)$ не зависит от y. Обозначим $D(x) = \exists yA(x, y)$.

В формуле $\exists uB(x, u)$ переменная u связана, поэтому $\exists uB(x, u)$ не зависит от u . Обозначим $F(x) = \exists uB(x, u)$.

Тогда $\forall x\exists yA(x, y) \& \exists x\exists uB(x, u) = \forall xD(x) \& \exists xF(x)$. (2.22)

Применим равносильность (2.20), имея в виду, что Q_1x есть $\forall x$, а Q_2x есть $\exists x$. Получим

$\forall xD(x) \& \exists xF(x) \equiv \forall x\exists z(D(x) \& F(z))$. (2.23)

Рассмотрим формулу $D(x) \& F(z) = \exists yA(x, y) \& \exists uB(z, u)$. Применив два раза равносильность (2.19), получим

$\exists yA(x, y) \& \exists uB(z, u) \equiv \exists y(A(x, y) \& \exists uB(z, u)) \equiv \exists y\exists u (A(x, y) \& B(z, u))$. (2.24)

Учитывая (2.21), (2.22), (2.23), получим окончательно

$\forall x\exists yA(x, y) \& \exists x\exists uB(x, u) \equiv \forall x\exists z\exists y\exists u(A(x, y) \& B(z, u))$. (2.25)

В тождестве (2.25) в левой части – исходная формула, а в левой части ее нормальная формула.

Пример.

Найти равносильную нормальную формулу для формулы: $\forall x\exists yA(x, y) \supset \exists x\exists uB(x, u)$.

1. Найдем вначале приведенную формулу, равносильную данной. Избавимся от символа $\supset$:

$\forall x\exists yA(x, y) \supset \exists x\exists u(x, u) \equiv \neg(\forall x\exists yA(x, y)) \vee \exists x\exists uB(x, u)$.

Применим равносильности (2.1) и (2.2) (перенос квантора через отрицание):

$\neg(\forall x\exists yA(x, y)) \equiv \exists x\forall y\neg A(x, y)$,

Следовательно,

$\forall x\exists yA(x, y) \supset \exists x\exists uB(x, u) \equiv \exists x\forall y\neg A(x, y) \vee \exists x\exists uB(x, u)$. (2.26)

Правая часть тождества (2.26) – приведенная формула, равносильная данной.

2. Найдем теперь нормальную формулу, равносильную приведенной формуле $\exists x\forall y\neg A(x, y) \vee \exists x\exists uB(x, u)$. Проделаем преобразование этой формулы, аналогично предыдущему примеру:

$\exists x\forall y\neg A(x, y) \vee \exists x\exists uB(x, u) \equiv \exists x\forall y\neg A(x, y) \vee \exists z\exists uB(z, u) \equiv \forall x\exists z(\forall y\neg A(x, y) \vee \exists uB(z, u)) \equiv \forall x\exists z\forall y\exists u(\neg A(x, y) \vee B(z, u))$. (2.27)

В правой части (2.27) – нормальная формула, равносильная исходной.

Выражение суждения в виде формулы логики предикатов

Все атрибутивные суждения можно разделить на следующие типы: "a есть P", "Все S есть P", "Ни один S не есть P", "Некоторые S есть P", "Некоторые S не есть P". Эти суждения следующим образом переводятся на язык логики предикатов:

"a есть P" – $P(a)$;

"Все S есть P" – $\forall x(S(x) \supset P(x))$;

"Ни один S не есть P" – $\forall x(S(x) \supset \neg P(x))$;

"Некоторые S есть P" – $\exists x(S(x) \& P(x))$;

"Некоторые S не есть P" – $\exists x(A(x) \& \neg P(x))$.

Пример.

Перевести на язык логики предикатов следующие суждения:

а) Веста – собака.

Заменим имя "Веста" символом "в" и введем предикат P(x) = "x – собака".

Наше суждение можно выразить формулой: P(в).

б) Всякая логическая функция может быть задана таблицей.

Введем предикаты S(x) = "x – логическая функция"; P(x) = "x может быть задана таблицей".

Наше суждение можно выразить формулой: $\forall x(S(x) \supset P(x))$.

в) Ни один народ не хочет войны.

Введем предикаты S(x) = "x – народ"; P(x) = "x хочет войны".

Наше суждение можно выразить формулой: $\forall x(S(x) \supset \neg P(x))$.

г) Некоторые журналисты были в космосе.

Введем предикаты S(x) = "x – журналист"; P(x) = "x был в космосе".

Наше суждение можно выразить формулой: $\exists x(S(x) \& P(x))$.

д) Некоторые современники динозавров не вымерли.

Введем предикаты S(x) = "x – современник динозавров"; P(x) = "x вымер".

Наше суждение можно выразить формулой: $\exists x(A(x) \& \neg P(x))$.

Пример.

Суждение “Некоторые студенты сдали все экзамены” записать в виде формулы логики предикатов. Построить отрицание данного суждения в виде формулы, не содержащей внешних знаков отрицания. Перевести на естественный язык.

Введем предикаты: A(x) = “x – студент”; B(y) = “y – экзамен”, C(x, y) = ”x сдал экзамен y”. Тогда предложение “Некоторые студенты сдали все экзамены” можно записать в виде следующей формулы:

$\exists x \forall y(A(x)\&B(y) \supset C(x, y))$.

Построим отрицание этой формулы, применяя равносильные преобразования:

$\neg\exists x \forall y(A(x)\&B(y) \supset C(x, y))) \equiv \forall x \exists y(\neg(A(x)\&B(y) \supset C(x, y)) \equiv \forall x \exists y(A(x)\&B(y)\& \neg C(x, y))$.

Это предложение можно прочитать следующим образом:

“Каждый студент не сдал хотя бы один экзамен”.

Язык логики предикатов удобен для записи математических предложений: определений, теорем, необходимых и достаточных условий (см., например [5]).

Пример.

Записать на языке логики предикатов следующее определение предела числовой последовательности: "Число a является пределом числовой последовательности $\{a_n\}$, если для любого положительного числа ε существует такой номер n_0, что для всех натуральных чисел n, больших или равных n_0, справедливо неравенство: $|a_n - a| < \varepsilon$".

Введем предикаты: $P(\varepsilon)$ = "$\varepsilon > 0$"; Q(n) = "n – натуральное число"; $R(n, n_0)$ = "$n \geq n_0$"; $S(n, \varepsilon)$ = "$|a_n - a| < \varepsilon$".

Определение предела последовательности может быть записано следующей формулой:

$\forall \varepsilon \exists n_0 \forall n(P(\varepsilon)\&Q(n)\&Q(n_0)\&R(n, n_0) \supset S(n, \varepsilon))$.

Пример.

Записать в виде формулы логики предикатов великую теорему Ферма (была доказана в 1996 г. Э. Вайлсом (Andrew Wiles)): "Для любого целого n > 2 не существует натуральных чисел x, y, z, удовлетворяющих равенству: $x^n + y^n = z^n$".

Введем предикаты: N(x) = "x – натуральное число"; M(x) = "x > 2"; P(x, y, z, n) = "$x^n + y^n = z^n$".

Для любых чисел x, y, z, n условие (посылка) теоремы Ферма есть конъюнкция N(x)&N(y)&N(z)&N(n)&M(n), а заключение есть ¬P(x, y, z, n). Поэтому теорема Ферма формулируется следующим образом:

∀x∀y∀z∀n(N(x)&N(y)&N(z)&N(n)&M(n) ⊃ ¬P(x, y, z, n)).

Если теорема имеет вид ∀x(P(x) ⊃ Q(x)), то предикат Q(x) является следствием предиката P(x). При этом предикат Q(x) называется необходимым условием предиката P(x), а предикат P(x) – достаточным условием предиката Q(x).

Пример.

Запишем в виде формулы логики предикатов утверждение: "Если число делится на 6, то оно делится на 3".

Введем предикаты P(x) = "x делится на 6"; Q(x) = "x делится на 3". Наше утверждение формулируется следующим образом: ∀x(P(x) ⊃ Q(x)).

Предикат P(x) (делимость на 6) является достаточным условием предиката Q(x) (делимость на 3). Предикат Q(x) (делимость на 3) является необходимым условием предиката P(x) (делимость на 6).

ТЕМА . ФОРМАЛЬНЫЕ АКСИОМАТИЧЕСКИЕ ТЕОРИИ (ИСЧИСЛЕНИЯ)

Принципы построения формальных теорий

Формальная аксиоматическая теория считается заданной, если заданы:

1. Символы. Задано некоторое счетное множество символов теории.

2. Формулы. Определено некоторое множество формул, или правильно построенных выражений. Формулы задают язык теории.

2. Аксиомы. Выделяется множество формул, называемых аксиомами теории. Это множество может быть как конечным, так и бесконечным.

4. Правила вывода. Задаются правила вывода как некоторые отношения на множестве формул. Если формулы A_1, A_2, …, A_k, B находятся в отношении R, то формула B называется непосредственно выводимой из A_1, A_2, …, A_k по правилу R. Это часто записывается следующим образом: $\frac{A_1, A_2, \ldots, A_k}{B}$.

Исчисление высказываний

Пример.

Если в правиле modus ponens переменную B заменить формулой A&B, получим правило вывода

$$\frac{A, A \supset A \,\&\, B}{A \,\&\, B}.$$

Вывод формулы представляет собой последовательность формул, сопровождаемых указаниями, является ли данная формула гипотезой, аксиомой или получена из других формул по некоторому правилу вывода. Принято вначале выписать все гипотезы и слева указывать номер шага вывода.

Пример .

Построим вывод формулы A⍰B □A.

(1) A – гипотеза;

(2) A ⊃ (B ⊃ A) – аксиома A1;

(3) $\frac{A, A \supset (B \supset A)}{B \supset A}$ – из (1) и (2) по m. p.

Пример .

а) Обосновать вывод A ⊃ (B ⊃ C), A&B ⇒ C.

(7)$A \supset (B \supset C)$ – гипотеза;

(8)$A\&B$ – гипотеза;

(9)A – из (2) и правила удаления конъюнкции;

(10) $B \supset C$ – из (1), (3) и m. p.

(11) B – из (2) и правила удаления конъюнкции;

(12) C – из (4), (5) и m. p.

б) Обосновать правильность следующего рассуждения, построив вывод:

Если число целое, то оно рациональное, Если число рациональное, то оно действительное. Число целое. Значит, оно действительное.

Сначала формализуем наше рассуждение, введя следующие высказывания:

A = “число целое”.

B = “число рациональное”.

C = “число действительное”.

Нужно построить следующий вывод: $A \supset B, B \supset C, A \Longrightarrow C$.

Построим этот вывод.

(6)$A \supset B$ – гипотеза;

(7)$B \supset C$ – гипотеза;

(8)A – гипотеза;

(9)$A \supset C$ – из (1) и (2) по правилу силлогизма;

(10) C – из (3) и (4) по m. p.

в) Обосновать правильность следующего рассуждения, построив вывод:

Если бы Иван был умнее Петра, он решил бы эту задачу. Иван не решил эту задачу. Значит, он не умнее Петра.

Формализуем наше рассуждение, введя следующие высказывания:

A = “Иван умнее Петра”.

B = “Иван решил эту задачу”.

Построим следующий вывод: $A \supset B, \neg B \Longrightarrow \neg A$.

(1) $A \supset B$ – гипотеза;

(2) $\neg B$ – гипотеза;

(3) $\neg B \supset \neg A$ – из (1) по закону контрапозиции;

(4) $\neg A$ – из (3) и (2) по m. p.

Автоматическое доказательство теорем. Метод резолюций.

Пример 3.6.

$A \vee B \vee C$ – дизъюнкт;

$A \vee \neg B$ – дизъюнкт;

$A \vee B \& C$ – не дизъюнкт;

$\neg A$ – дизъюнкт.

Дизъюнкт называется пустым, (обозначается □), если он не содержит литер. Пустой дизъюнкт всегда ложен, так как в нем нет литер, которые могли бы быть истинными при любых наборах переменных.

Рассмотрим применение метода резолюций к исчислению высказываний.

Пример.

Пусть $F = A \vee B \vee C$, $G = \neg A \vee \neg B \vee D$.

Тогда

$res_A(F, G) = B \vee C \vee \neg B \vee D$.

$res_B(F, G) = A \vee C \vee \neg A \vee D$.

$res_C(F, G)$ не существует.

Возможны три случая:

1. Среди множества дизъюнктов нет содержащих контрарные литеры. Это означает, что формула B не выводима из множества формул $A_1, A_2, \ldots, A_n$

2. В результате очередного применения правила резолюции получен пустой дизъюнкт. Это означает, что что формула B выводима из множества формул $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

3. Процесс зацикливается, т. е. получаются все новые и новые резольвенты, среди которых нет пустых. Это ничего не означает.

Пример.

В примере 3.3 а) был обоснован вывод $A \supset (B \supset C), A\&B \vdash C$. Применим для этого примера метод резолюций. Для этого нужно проверить вывод

$A \supset (B \supset C), A\&B, \neg C \vdash \square$.

Будем действовать в соответствии с алгоритмом.

Шаг 1. Нужно привести к КНФ формулы $A \supset (B \supset C), A\&B, \neg C$.

$A \supset (B \supset C) \equiv \neg A \vee (B \supset C) \equiv \neg A \vee \neg B \vee C$.

Формулы $A\&B, \neg C$ уже находятся в КНФ.

Шаг 2. Составим множество S дизъюнктов:

$S = \{\neg A \vee \neg B \vee C, A, B, \neg C\}$.

Шаг 3. Построим резолютивный вывод из S. Для этого выпишем по порядку все дизъюнкты из S:

8) $\neg A \vee \neg B \vee C$;

9) A;

10) B;

11) $\neg C$;

Вместо пары дизъюнктов, содержащих контрарные литеры запишем их резольвенту (в скобках указаны номера формул, образующих резольвенту):

12) $\neg B \vee C$. (1, 2)

13) C. (3, 5)

14) $\square$. (4, 6)

Вывод заканчивается пустым дизъюнктом, что является обоснованием вывода $A \supset (B \supset C), A\&B \vdash C$.

Пример.

Записать с помощью формул логики высказываний и решить методом резолюций следующую задачу:

«Чтобы хорошо учиться, надо прикладывать усилия. Тот, кто хорошо учится, получает стипендию. В данный момент студент прикладывает усилия. Будет ли он получать стипендию?

Введем следующие высказывания:

A = ”студент хорошо учится”.

B = ”студент прикладывает усилия”.

C = ”студент получает стипендию”

Чтобы утвердительно ответить на вопрос задачи: ”Будет ли студент получать стипендию?”, нужно проверить вывод:

$B \supset A, A \supset C, B \vdash C$.

Будем действовать в соответствии с алгоритмом.

Шаг 1. Нужно привести к КНФ формулы $B \supset A, A \supset C, B, \neg C$.

$B \supset A = \neg B \vee A$,

$A \supset C = \neg A \vee C$,

Формулы B и $\neg C$ уже находятся в КНФ.

Шаг 2. Составим множество S дизъюнктов:

$S = \{\neg B \vee A, \neg A \vee C, B, \neg C\}$.

Шаг 3. Построим резолютивный вывод из S. Сначала перепищем по порядку дизъюнкты из S:

1) ¬B V A.

2) ¬A VC.

3) B.

4) ¬C.

Затем вместо пары дизъюнктов, содержащих контрарные литеры запишем их резольвенту:

5) ¬B V C. (1, 2)

8) C. (3, 5)

9) □. (4, 6)

Таким образом, на вопрос задачи можно ответить утвердительно: ”Студент будет получать стипендию”.

Правило резолюций более общее, чем правило modus ponens и производные правила, рассмотренные в п. 3.2. Докажем методом резолюций правило modus ponens. Необходимо построить вывод

A, A ⊃ B⊢ B.

Построим резолютивный вывод.

A, ¬A V B⊢ B.

A, ¬A V B, ¬B⊢ □.

S = {A, ¬A V B, ¬B}.

6) A.

7) ¬A V B.

8) ¬B.

9) B. (1, 2)

10) □. (3, 4)

Пример.

Построим с плмощью метода резолюций следующий вывод:

¬A ⊃ B, C V A, B ⊃ ¬C⊢ A,

Или, что то же:

¬A ⊃ B, C V A, B ⊃ ¬C, ¬A ⊢ □.

Перепишем все посылки в виде дизъюнктов:

A V B, C V A, ¬B V ¬C, ¬A ⊢ □.

Выпишем по порядку все посылки и начнем их по очереди склеивать по правилу резолюций:

15) A V B

16) C V A

17) ¬B V ¬C

18) ¬A

19) A V ¬C (1, 3)

20) B (1, 4)

21) A V ¬B (2, 3)

22) C. (2, 4)

23) A (2, 5)

24) ¬C (3, 6)

25) ¬B (3, 8)

26) ¬C (4, 5)

27) ¬B (4, 7)

28) □ (4, 9)

Мы видим, что такая стратегия перебора неэффективна. В данном случае существует более быстрый вывод. Например:

5) B. (1, 4)
6) C. (2, 4)
7) ¬B. (3, 6)
8) □. (5, 7)

Тема. Нечеткая логика

Нечеткие множества

Пример.

Приведем пример нечеткого множества $\widetilde{A}$, которое формализует понятие "несколько", ясного лишь на интуитивном уровне.

Пусть X = {1, 2, 3, …, n,…} – множество натуральных чисел, а функция $m_A(x)$ задана таблицей:

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10 …
$m_A(x)$	0	0,1	0,6	0,8	1	1	0,9	0,7	0,2	0 …

Аналогично можно ввести понятия "много", "мало", "около 100", "почти 20", и т.д.

Переменные, значениями которых являются нечеткие множества, называются лингвистическими. Это основной тип переменных в языке людей.

Пример.

Пусть X = (0, ∞) – множество положительных чисел, а функция $m_A(x)$ задана формулой:

$$m_A(x) = \begin{cases} 0, \ 0 < x \le 50, \\ \left(1 + \dfrac{25}{(x-50)^2}\right)^{-1}, \ x > 50. \end{cases}$$

График этой функции изображен на рис. 4.1.

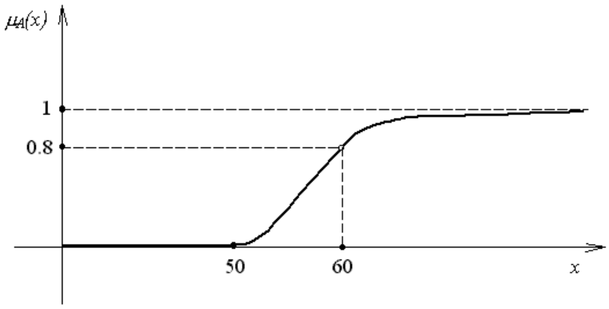

Рис. 4.1

Если переменную x интерпретировать как возраст, то нечеткое множество $\widetilde{A}$ соответствует понятию "старый". Аналогично можно ввести понятия "молодой", "средних лет" и т. д.

Операции с нечеткими множествами

Пример.

Пусть X – множество студентов, $\widetilde{A}$ – множество пожилых людей. Множество $\widetilde{A}$ – пустое, $m_A(x) = 0$ для всех $x \in X$, так как пожилых студентов, вообще говоря, не бывает.

4.2. Нечеткие высказывания

Пример.

Найти степень истинности высказывания

$\widetilde{C} = (\widetilde{A} \vee \widetilde{B}) \sim (\widetilde{A} \supset (\widetilde{A} \& \widetilde{B}))$ при $\widetilde{A} = 0{,}8$; $\widetilde{B} = 0{,}3$.

Порядок действий определяется старшинством операций и скобками.

1. $\widetilde{A} \& \widetilde{B} = \min(0{,}8;\ 0{,}3) = 0{,}3$.
2. $(\widetilde{A} \supset (\widetilde{A} \& \widetilde{B}) = \max(1 - 0{,}8;\ 0{,}3) = 0{,}3$.
3. $\widetilde{A} \vee \widetilde{B} = \max(0{,}8;\ 0{,}3) = 0{,}8$.
4. $\widetilde{C} = \min(\max(1 - 0{,}8;\ 0{,}3), \max(0{,}8;\ 1 - 0{,}3)) = \min(0{,}3;\ 0{,}8) = 0{,}3$.

Множество нечетких высказываний вместе с введенными на них операциями образуют алгебру нечетких высказываний.

Пример

Определить степень равносильности формул.

$\widetilde{A} = \widetilde{X} \supset \widetilde{Y}$, $\widetilde{B} = \neg(\widetilde{X} \& \widetilde{Y})$ при условии, что $\widetilde{X}$ и $\widetilde{Y}$ принимают значения степеней истинности из множества $\{0{,}1;\ 0{,}2\}$. Перечислим все возможные наборы значений $\widetilde{X}$ и $\widetilde{Y}$:

$A_1 = \{0{,}1;\ 0{,}1\}$; $A_2 = \{0{,}1;\ 0{,}2\}$; $A_3 = \{0{,}2;\ 0{,}1\}$; $A_4 = \{0{,}2;\ 0{,}2\}$.

Запишем формулы $\widetilde{A}$ и $\widetilde{B}$ с учетом (4.1), (4.2), (4.4):

$\widetilde{A} = \widetilde{X} \supset \widetilde{Y} = \max(1 - \widetilde{X}, \widetilde{Y})$; $\widetilde{B} = \neg(\widetilde{X} \& \widetilde{Y}) = 1 - \widetilde{X} \& \widetilde{Y} = 1 - \min(\widetilde{X}, \widetilde{Y})$.

Вычислим формулы $\widetilde{A}$ и $\widetilde{B}$ на каждом из четырех наборов $A_1 - A_4$:

$\widetilde{A}_1 = \max(1 - 0{,}1;\ 0.1) = 0{,}9$.

$\widetilde{A}_2 = \max(1 - 0{,}1;\ 0{,}2) = 0{,}9$.

$\widetilde{A}_3 = \max(1 - 0{,}2;\ 0{,}1) = 0{,}8$.

$\widetilde{A}_4 = \max(1 - 0{,}2;\ 0{,}2) = 0{,}8$.

$\widetilde{B}_1 = 1 - \min(0{,}1;\ 0.1) = 0{,}9$.

$\widetilde{B}_2 = 1 - \min(0{,}1;\ 0{,}2) = 0{,}9$.

$\widetilde{B}_3 = 1 - \min(0{,}2;\ 0{,}1) = 0{,}9$.

$\widetilde{B}_4 = 1 - \min(0{,}2;\ 0{,}2) = 0{,}8$.

Вычислим теперь степень равносильности формул $\widetilde{A}$ и $\widetilde{B}$ в соответствии с (4.6):

Для этого сначала вычислим $\widetilde{A}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \sim \widetilde{B}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)\}$ для всех наборов $A_1 - A_4$:

В соответствии с (4.5) имеем

$\widetilde{A} \sim \widetilde{B} = \min(\max(1 - \widetilde{A}, \widetilde{B}), \max(\widetilde{A}, 1 - \widetilde{B}))$.

Поэтому

$\widetilde{A}_1 \sim \widetilde{B}_1 = \min(\max(1 - 0{,}9;0{,}9), \max(0{,}9;\ 1 - 0{,}9)) = 0{,}9$.

$\widetilde{A}_2 \sim \widetilde{B}_2 = \min(\max(1 - 0{,}9;0{,}9), \max(0{,}9;\ 1 - 0{,}9)) = 0{,}9$.

$\widetilde{A}_3 \sim \widetilde{B}_3 = \min(\max(1 - 0{,}8;0{,}9), \max(0{,}8;\ 1 - 0{,}9)) = 0{,}8$.

$\widetilde{A}_4 \sim \widetilde{B}_4 = \min(\max(1 - 0{,}8;0{,}8), \max(0{,}8;\ 1 - 0{,}8)) = 0{,}8$.

Окончательно по (4.6) получим

$\mu(\widetilde{A}, \widetilde{B}) = \underset{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n)}{\&} \{\widetilde{A}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \sim \widetilde{B}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)\} = 0{,}9 \& 0{,}9 \& 0{,}8 \& 0{,}8 = \min(0{,}9;\ 0{,}9;\ 0{,}8;\ 0{,}8) = 0{,}8$.

Формулы $\widetilde{A}$ и $\widetilde{B}$ нечетко равносильны.

На других наборах степеней истинности нечетких переменных $\widetilde{X}$ и $\widetilde{Y}$ формулы $\widetilde{A}$ и $\widetilde{B}$ могут быть нечетко неравносильны.

Пример.

Вернемся к примеру 4.7. Для этого примера множество M состоит из девяти наборов:

M = {{0,1; 0,1}; {0,1; 0,2}; {0,2; 0,1}; {0,2; 0,2}}.

На каждом наборе формулы $\widetilde{A}$ и $\widetilde{B}$ нечетко равносильны, так как $\mu(\widetilde{A}, \widetilde{B}) > 0{,}5$. Поэтому областью нечеткой равносильности будет все множество M.

Пример.

Покажем, что $\widetilde{X} \vee \neg \widetilde{X} = \widetilde{И}$ и $\widetilde{X} \mathbin{\&} \neg \widetilde{X} = \widetilde{Л}$ для всех значений нечеткой переменной $\widetilde{X}$:

$0 \leq \widetilde{X} \leq 1.$

Учитывая (4,1), (4.2), (4. 3), имеем

$\widetilde{X} \vee \neg \widetilde{X} = \max(\widetilde{X}, \neg \widetilde{X}) = \max(\widetilde{X}, 1 - \widetilde{X}) \geq 0{,}5.$

$\widetilde{X} \mathbin{\&} \neg \widetilde{X} = \min(\widetilde{X}, \neg \widetilde{X}) = \min(\widetilde{X}, 1 - \widetilde{X}) \leq 0{,}5.$

2.4.5 Критерии оценивания

Уровень качества письменной контрольной работы студента определяется с использованием следующей системы оценок:

«Зачтено» выставляется, в случае если студент показывает хорошие знания изученного учебного материала; хорошо владеет основными терминами и понятиями по дисциплине; самостоятельно, логично и последовательно излагает и интерпретирует материалы результаты выполненных действий; получает правильный результат заданий; показывает умение формулировать выводы и обобщения по теме заданий. Работа оценивается удовлетворительно при условии выполнения не менее 70% заданий.

Каждое задание, в свою очередь, считается выполненным и может быть зачтено, если выполнены 70%-94% условий и требований, сформулированных в нем.

«Не зачтено» – выставляется при наличии серьезных упущений в процессе решения задач, неправильного использования формул, отсутствия аргументации, вычислительных ошибок; неудовлетворительном знании базовых терминов и понятий курса, практические задания выполнены неверно; если работа выполнена без учета требований, предъявляемых к данному виду заданий.

Контрольная работа, выполненная небрежно, не по своему варианту, без соблюдения правил, предъявляемых к ее оформлению, возвращается с проверки с указанием причин, которые доводятся до студента. В этом случае контрольная работа выполняется повторно.

При выявлении заданий, выполненных несамостоятельно, преподаватель вправе провести защиту студентами своих работ. По результатам защиты преподаватель выносит решение либо о зачете контрольной работы, либо об ее возврате с изменением варианта. Защита контрольной работы предполагает свободное владение студентом материалом, изложенным в работе и хорошее знание учебной литературы, использованной при написании.

В случае неудовлетворительной оценки работы, она возвращается на доработку студенту. В этой же работе студент должен устранить замечания и сдать на повторную проверку. Обучающиеся, не выполнившие задания и не представившие результаты самостоятельной работы, аттестуются по курсу «неудовлетворительно» и к итоговой аттестации по курсу не допускаются.

2.5 Методические рекомендации по подготовке к практическим занятиям

2.5.1 Пояснительная записка

Рабочей программой дисциплины предусмотрено три практических занятия, содержание которых раскрыто ниже

Данное издание предназначено для студентов направления подготовки 44.03.01Педагогическое образование (профиль Информатика), поскольку дисциплина «Математическая логика» относится к базовой части дисциплин.

Цель практических занятий:

- развитие навыков и компетенций в процессе аудиторной и самостоятельной исследовательской деятельности;

- отработка навыков аргументированной защиты выводов и предложений.

- углубить и закрепить знания, полученные на лекциях и в ходе самостоятельной работы;

- проверить эффективность и результативность самостоятельной работы обучающихся над учебным материалом;

- привить будущим бакалаврам навыки поиска, обобщения и изложения учебного материала в аудитории, развить навыки самостоятельной исследовательской деятельности;

- выработать умение формулировать, обосновывать и излагать собственное суждение по обсуждаемому вопросу, умение отстаивать свои взгляды;

- формирование навыков использования математических моделей и ППП для принятия целесообразных решений в различных ситуациях.

Содержание занятий нацелено на формирование у обучающихся компетенций, связанных с умением работать с информацией.

В данном пособии представлены два раздела: теоретического и практического характера.

Материал изложен по трем темам в соответствии с содержанием курса:

- Использование математического языка для записи и обработки информации;
- Вероятностные методы обработки информации;
- Статистические методы обработки информации.

В практической части издания предлагаются теоретические вопросы к каждому занятию, перечисляются основные термины, знание которых необходимо для занятия, предлагается список источников, которые помогут при подготовке к занятию. Также в практической части предлагаются задания и задачи, выполнение которых способствует формированию соответствующих компетенций у будущих педагогов.

2.5.2 Методические указания по подготовке к практическим занятиям

Подготовку к участию в лабораторном занятии целесообразно организовать в следующей последовательности:

- подобрать учебную, справочную и другую литературу, необходимую для получения более полной информации по теме предстоящего занятия;

- повторить соответствующий теоретический материал, обращая особое внимание на список терминов (словарь занятия), необходимых для участия в занятии;

- разобрать примеры, иллюстрирующие решение задач, приведенные в литературе, в теоретическом материале данного пособия;

- найти ответы на контрольные вопросы;

- отобрать термины, необходимые для освещения теоретических вопросов занятия, составить план выступления.

Порядок проведения лабораторного занятия:

– входной контроль подготовки обучающихся и вводный инструктаж; (терминологический диктант, тест на знание терминов занятия);

– обсуждение вопросов занятия в указанной последовательности;

– решение задач по теме занятия
– общее подведение итогов.

Каждый обучающийся должен иметь на занятии рабочую тетрадь, конспект лекций.

Желательно при подготовке к занятиям придерживаться следующих рекомендаций:

1. При изучении конспектов лекций, учебников, учебных пособий, интернет-ресурсов и других материалов необходима его собственная интерпретация. Не следует жёстко придерживаться терминологии лектора, а правильно уяснить сущность и передать её в наиболее удобной форме.

2. При изучении основной рекомендуемой литературы следует сопоставить учебный материал темы с конспектом, выявить основные моменты изучаемой темы, обратить внимание на особенности изложения материала авторами учебников. При этом нет необходимости составлять дополнительный конспект, достаточно в основном конспекте сделать пояснительные записи (желательно другим цветом).

3. Приступая к решению задачи, студент должен прежде всего уяснить содержание задачи: данные и требование задачи. Составить модель задачи (изобразить графически, в виде таблицы, схемы). Затем найти необходимые теоремы и формулы, составить план решения задачи.

2.5.2.1 Логика высказываний

Формируемые компетенции: способность использовать естественнонаучные и математические знания для ориентирования в современном информационном пространстве

Задачи:
– дать представление о законах математической логики;
– формировать навыки равносильных преобразований формул;
– научить основным приемам
– сведения прикладных задач автоматизированного проектирования к задачам математической логики

Вопросы к занятию

1. Высказывания. Операции над высказываниями
2. Равносильные формулы. Тождественные формулы
3. Тождественно истинные высказывания.

Основные теоретические сведения к занятию

1. Определение высказывания

Определение 1.1. Высказыванием называется повествовательное языковое предложение, относительно которого можно сказать истинно оно или ложно.

В логике высказываний нас интересует не суть высказывания, а его истинность или ложность. Мы говорим, что существуют два истинностных значения: истина и ложь (И и Л). Двухэлементное множество {И, Л} есть множество истинностных значений. Высказывания будем обозначать большими буквами: A, B, C, X, Y,.. Выражение A = И означает, что высказывание A истинно, а X = Л означает, что высказывание X ложно.

2. Операции над высказываниями. Алгебра высказываний

Отрицанием высказывания A называется высказывание ¬A, которое истинно тогда и только тогда, когда высказывание A ложно. Чтобы составить отрицание A достаточно в разговорном языке сказать "неверно, что A".

Отрицание определяется следующей таблицей истинности (таблица 1):

Таблица 1

A	¬A
1	0
0	1

Конъюнкцией двух высказываний A и B называется высказывание A&B, истинное тогда и только тогда, когда истинны оба высказывания A и B.

В разговорной речи конъюнкции соответствует союз "и".

Дизъюнкцией двух высказываний A и B называется высказывание AVB, ложное тогда и только тогда, когда ложны оба высказывания A и B. В разговорной речи дизъюнкции соответствует союз "или".

Импликацией двух высказываний A и B называется высказывание

A□→ B, ложное тогда и только тогда, когда A истинно, а B ложно. Импликации соответствуют следующие выражения разговорной речи: "A влечет за собой B"; или "из A следует B"; или "если A, то B".

Импликация играет важную роль в логике высказываний. При учете смыслового содержания высказывания (а не только значений истинности), оборот "если, то" подразумевает причинно-следственную связь. Истинность импликации означает лишь то, что, если истинна посылка, то истинно и заключение. При ложной посылке заключение всегда истинно. Так, истинными являются следующие импликации: "Если в доме 5 этажей, то Иванов живет в квартире 50"; "Если идет снег, то 2 · 2 = 5".

Эквивалентностью(двойной импликацией) двух высказываний A и B называется высказывание A ~ B, истинное тогда и только тогда, когда оба высказывания A и B одновременно истинны или ложны. Говорят, что A эквивалентно B или A имеет место тогда и только тогда, когда имеет место B.

Высказывания вместе с определенными для них операциями образуют алгебру высказываний. Названные операции определяются следующей таблицей истинности. Таблица истинности – перебор всех возможных комбинаций значений простых высказываний, из которых состоит сложное, и указание соответствующих значений сложного высказывания.

Если в сложном высказывании - n простых, то логических возможностей – строк таблицы истинности будет $\underbrace{2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2}_{n\ раз} = 2^n$.

x_1	x_2	$x_1 V x_2$	$x_1 \wedge x_2$	$x_1 \to x_2$	$x_1 \leftrightarrow x_2$	$x_1 \oplus x_2$
0	0	0	0	1	1	0
0	1	1	0	1	0	1
1	0	1	0	0	0	1
1	1	1	1	1	1	0

		дизъюнкция	коньюнкция	импликация	эквивалент-ность	Сумма по мо-дулю 2 (строгая дизъюнкция)

Таблица логических операций

Связка в естественном языке	Название операции	Обозначение	высказывание, получаемое с помощью связки	математическая запись сложного высказывания
И, Хотя…, но.., а.., однако…	Конъюнкция	&, $\wedge$	А и В	A&B, $A \wedge B$, A·B
ИЛИ	Дизъюнкция	$\vee$, +	А или В	$A \vee B$, A+B
НЕ, неверно, что…	Отрицание, инверсия	$\overline{}$ ¬,	Не А	¬A, $\overline{A}$
ЕСЛИ …, ТО.. Из… следует… …влечет… …необходимо…	Импликация	$\rightarrow$, $\Rightarrow$, $\supset$	Если А, то В	$A \rightarrow B$, $A \Rightarrow B$ $A \supset B$
ЛИБО…, ЛИБО…	Строгая дизъюнкция Исключающее ИЛИ, неравнозначность	$\oplus$, Δ	Либо А, либо В	$A \oplus B$, $A \Delta B$ $(\overline{A} \wedge B) \vee (\overline{B} \wedge A)$
…ТОГДА И ТОЛЬКО ТОГДА, КОГДА… …необходимо и достаточно …в том и только том случае… …равносильно…	Эквивалентность, равнозначность	$\equiv$, $\Leftrightarrow$, ~	А тогда и только тогда, когда В Для того чтобы А, необходимо и достаточно, чтобы В	$A \Leftrightarrow B$, A~B, A≡B

Две логические формулы называются равносильными, если при любых значениях входящих в них логических переменных эти формулы принимают одинаковые значения.

Пары равносильных формул.

AVB ≡ BVA	$A \wedge B \equiv B \wedge A$	Коммутативные законы
AV(BVC) ≡ ≡ (AVB)VC	$A \wedge (B \wedge C) \equiv$ $\equiv (A \wedge C) \wedge C$	Ассоциативные законы
AV(B $\wedge$ C) ≡ ≡ (AVB) $\wedge$ (AVC)	$A \wedge$ (BVC) ≡ ≡A $\wedge$ BVA $\wedge$ C	Дистрибутивные законы
AVA ≡ A	$A \wedge A \equiv A$	Законы идемпотентности

AVA ∧ B ≡ A	A ∧ (AVB) ≡ A	Законы поглощения
$\overline{A \vee B} \equiv \overline{A} \wedge \overline{B}$	$\overline{A \wedge B} \equiv \overline{A} \vee \overline{B}$	Законы де Моргана
AVИ ≡ И; AVЛ ≡ A; $\overline{И} \equiv Л$; $\overline{Л} \equiv И$	A ∧ И≡ A; A ∧ Л ≡ Л	Операции с константами
A⊃B≡¬AVB≡ ¬(A&¬B).	A~B≡(A⊃B)&(B⊃A)≡ ≡(A&B)V(¬A&¬B) ≡ ≡ (AV¬B)&(¬AVB).	Преобразование импликации и эквивалентности

Закон двойственности. Если в двух равносильных формулах заменить дизъюнкцию конъюнкцией, значение «истина» значением «ложь» и наоборот, то полученные формулы будут также равносильны.

Сложное высказывание, истинное при любых значениях входящих в него простых, называется тождественно-истинным или тавтологией.

Факт, что высказывание является тавтологией, обозначается так |=A.

Сложное высказывание называется тождественно ложным, если оно принимает значение «ложь» при любых значениях, входящих в него простых высказываний.

Наиболее важные тождественно истинные формулы.

1. Закон силлогизма $\models [(A \to B) \wedge (B \to C)] \to (A \to C)$
2. Modus ponens (лат.) $\models [A \wedge (A \to B)] \to B$
3. Закон контрапозиции. $\models (A \to B) \leftrightarrow (\overline{B} \to \overline{A})$
4. Закон исключенного третьего $\models A \vee \overline{A}$
5. Закон противоречия $\models \overline{A \wedge \overline{A}}$
6. Закон двойного отрицания $\models \overline{\overline{A}} \leftrightarrow A$

Пример. (Задача Кислера) Иванов, Петров и Сидоров подозреваются в совершении преступления. В ходе следствия они дали следующие показания:

Иванов: Петров виновен, а Сидоров – нет.

Петров: Если Иванов виновен, то виновен и Сидоров. (Они всегда действуют сообща).

Сидоров: Я невиновен, но хотя бы один из них двоих виновен.

Необходимо установить:

а) Совместимы ли показания всех троих подозреваемых, т.е. могут ли они быть одновременно истинны?

б) Предполагая, что показания всех обвиняемых истинны, укажите, кто виновен, а кто нет?

в) Если невиновный говорит истину, а виновный лжет, то кто невиновен, а кто виновен?

г) Если все трое невиновны, то кто лжесвидетельствует?

Решение:

Обозначим через I высказывание «Виноват Иванов», P – «Виноват Петров», S – «Виноват Сидоров». Именно эти высказывания являются простыми, исходными. Тогда показания подозреваемых описываются следующими формулами алгебры высказываний:

Иванов: $P \wedge \overline{S}$ (Петров виновен, а Сидоров – нет).

Петров: $I \to S$ (Если Иванов виновен, то виновен и Сидоров).

Сидоров: $\overline{S} \wedge (I \vee P)$ Я невиновен, но хотя бы один из них двоих виновен.

Построим таблицу истинности, поместив в ее первые три столбца значения исходных высказываний I, P, S, а в следующие столбцы – значения высказываний подозреваемых и вспомогательных формул.

Исходные высказывания			Вспомогательные формулы		Утверждения			Пункты задачи
					Иванова	Петрова	Сидорова	
I	P	S	$\overline{S}$	$I \vee P$	$P \wedge \overline{S}$	$I \to S$	$\overline{S} \wedge (I \vee P)$	
1	1	1	0	1	0	1	0	
1	1	0	1	1	1	0	1	
1	0	1	0	1	0	1	0	в)
1	0	0	1	1	0	0	1	
0	1	1	0	1	0	1	0	
0	1	0	1	1	1	1	1	а), б)
0	0	1	0	0	0	1	0	
0	0	0	1	0	0	1	0	г)

Теперь ответим на вопросы задачи.

а) Показания Иванова, Петрова и Сидорова одновременно истинны, т.е. имеют значение 1, в шестой строке таблицы. Таким образом, показания всех подозреваемых совместны.

б) Если показания всех обвиняемых истинны (пункт а) – шестая строка таблицы), то в этом случае P=1, а I=0 и S=0, т.е. виновен Петров, а Иванов и Сидоров – невиновны.

в) Случай, когда невиновный говорит истину, а виновный лжет, описывается третьей строкой. При этом виновны Иванов и Сидоров (I=1 и S=1), а Петров – нет (P=0).

г) И, наконец, если все подозреваемые невиновны P=0, I=0 и S=0 (восьмая строка), то лишь Петров говорит правду, а Иванов и Сидоров по какой-то причине лжесвидетельствуют.

Практические задания

1. Построить таблицу истинности логических формул:

1. $A \wedge (\overline{B} \leftrightarrow A \vee B)$	9. $A \leftrightarrow (A \vee \overline{B} \to \overline{B} \wedge \overline{A})$
2. $\overline{(A \wedge \overline{B})} \to (A \vee \overline{B})$	10. $(B \to B \vee (A \wedge B)) \leftrightarrow A \vee B$
3. $A \vee (B \leftrightarrow B \vee \overline{(A \wedge B)})$	11. $\overline{(A \wedge B)} \to (C \vee \overline{B})$
4. $A \vee B \to \overline{B} \wedge (A \leftrightarrow B)$	12. $A \vee (B \to C \vee \overline{(A \wedge B)})$
5. $\overline{A} \wedge B \vee (\overline{B} \leftrightarrow A \vee \overline{B})$	13. $A \vee \overline{B} \to (\overline{C} \wedge \overline{A}) \leftrightarrow \overline{A}$
6. $\overline{(B \to \overline{A})} \vee (\overline{A} \wedge B) \leftrightarrow \overline{B}$	14. $A \leftrightarrow (B \to C \wedge \overline{B})$
7. $B \vee \overline{A} \wedge (B \wedge A \to \overline{A})$	15. $\overline{A} \leftrightarrow (B \vee (C \to \overline{B}))$
8. $A \vee B \leftrightarrow (\overline{A} \wedge \overline{B} \to B)$	16. $(A \vee \overline{B}) \wedge (\overline{A} \vee B) \leftrightarrow \overline{B}$

2. Проверить, является ли логическая формула тавтологией (тождественно истинной):

1. $(B \to (A \vee \overline{B})) \wedge (A \to (B \vee \overline{A}))$	9. $(\overline{A} \vee B \to A) \leftrightarrow A \wedge B$
2. $(A \vee B) \to (B \vee \overline{A})$	10. $\overline{(A \to B)} \vee (\overline{B} \to \overline{A})$
3. $A \leftrightarrow ((A \vee \overline{B}) \wedge \overline{B})$	11. $A \wedge \overline{B} \to (A \vee B \leftrightarrow \overline{A})$

4. $A \to \left(A \vee \left(\overline{B} \wedge A\right)\right)$
5. $A \to \left(\left(B \wedge \overline{A}\right) \to A\right)$
6. $(A \to B) \to A \vee B \leftrightarrow \left(\overline{\overline{A} \wedge \overline{B}}\right)$
7. $A \vee B \leftrightarrow \left(\overline{\overline{A} \wedge \overline{B}}\right)$
8. $\left(\overline{A} \vee B \to B\right) \leftrightarrow A \vee B$
12. $A \vee \overline{B} \to \left(\overline{B} \wedge \overline{A}\right) \leftrightarrow \overline{A}$
13. $A \leftrightarrow \left(B \to A \wedge \overline{B}\right) \overline{A} \leftrightarrow \left(B \vee \left(A \to \overline{B}\right)\right)$
14. $\left(\left(A \vee (B \leftrightarrow C)\right) \to \left(B \wedge (C \to A)\right)\right) \vee \overline{B}$
15. $(A \to B) \to \left(\left(A \to (B \to C)\right) \to (A \to C)\right)$

3. Установить, является ли данная формула тождественно-истинной.

1. $(P \supset R) \supset ((Q \supset R) \supset ((P \vee Q) \supset R))$.
2. $(P \supset Q) \supset ((P \supset (Q \supset R)) \supset (P \supset R))$.
3. $(P \supset Q) \supset ((Q \supset R) \supset (P \supset R))$.
4. $(Q \supset R) \supset ((P \vee Q) \supset (P \vee R))$.
5. $((Q \vee (R \sim \neg P)) \supset (R \,\&\, (P \supset Q))) \vee \neg R$.
6. $((P \supset Q) \supset (Q \supset R)) \,\&\, P \supset R$.
7. $(Q \vee (R \supset P)) \supset (R \,\&\, (P \supset Q))$.
8. $((Q \vee (R \sim \neg P)) \supset (R \,\&\, (P \supset Q))) \vee \neg R$.
9. $(P \supset Q) \supset ((Q \supset R) \supset (P \supset R))$.
10. $(P \supset Q) \supset ((Q \supset R) \supset (P \supset R))$.

4. Проверить правильность рассуждения средствами логики рассуждений.

1. Один из четырех задержанных (Михайлов, Костин, Викторов, Тимофеев) подозревается в краже. На вопрос следователя «Кто совершил кражу?» были получены такие ответы:

1) «Это сделал или Михайлов, или Костин»;
2) «Это сделал или Викторов, или Костин»;
3) «Это не могли сделать ни Тимофеев, ни Михайлов»;
4) «Это сделал или Викторов, или Михайлов»;

Можно ли по этим данным установить, кто виновен в совершении преступления, если известно, что из четырех высказываний три истинны?

2. Есть тип логических задач, в которых один из участников всегда говорит только правду (в литературе по математической логике их называют «рыцарями»), другие всегда лгут («лжецы»).

Известно, что каждый из двух человек a и b является либо рыцарем, либо лжецом. Выясните, кто есть кто, если a утверждает следующее: «По крайней мере один из нас – лжец ».

3. Если человек осужден судом, то он лишается избирательных прав. Если человек признан невменяемым, то он также лишается избирательных прав. Следовательно, если человек обладает избирательным правом, то он здоров и не был осужден судом.

4. Иванов утверждает, что не встречал этой ночью Сидорова. Если Иванов не встречал этой ночью Сидорова, то либо Сидоров был убийцей, либо Иванов лжет. Если Сидоров не был убийцей, то Иванов не встречал его этой ночью, а убийство было совершено после полуночи. Если убийство было совершено после полуночи, то либо Сидоров был убийцей, либо Иванов лжет. Следовательно, убийцей был Сидоров.

5. Если бы он не пошел в кино, то он не получил бы двойки. Если бы он подготовил домашнее задание, то не пошел бы в кино. Он получил двойку. Значит, он не подготовил домашнее задание.

6. Для того, чтобы сдать экзамен, мне необходимо достать учебник или конспект. Я достану конспект только в том случае, если мой приятель не уедет. Мой приятель уедет, только, если я сдам экзамен. Следовательно, я сдам экзамен.

7. Выяснить, кто из четверых виновен на основе информации: «Петров виновен, только если виновен Иванов. Неверно, что виновность Сидорова влечет виновность Родионова и что Иванов виновен, а Сидоров нет».

8. Петров Иванов и Сидоров сдавали экзамен по информатике и математике. Если Петров не сдал экзамен на «отлично», то и Иванов не сдал на «отлично». Сидоров и еще один из друзей сдали экзамен на «отлично». Следует ли отсюда, что неверно, что Петров сдал экзамен не на «отлично», а Иванов на «отлично»?

9. По подозрению в совершенном преступлении задержали Иванова, Петрова и Сидорова. Один из них был уважаемым в городе стариком, другой малоизвестным чиновником, третий – известным мошенником. В процессе следствия старик говорил правду, мошенник лгал, а третий задержанный в одном случае говорил правду, а в другом – ложь. Вот, что они утверждали:

Иванов: Я совершил это. Петров не виноват.

Петров: Иванов не виноват. Преступление совершил Сидоров.

Сидоров: Я не виноват. Виноват Иванов.

Требуется определить фамилии старика, мошенника и чиновника, и кто из них виноват, если известно, что преступник один.

10. Если человек принял какое-то решение, и он правильно воспитан, то он преодолеет все конкурирующие желания. Человек принял решение, но не преодолел конкурирующих желаний. Следовательно, он неправильно воспитан.

11. Если данное явление психическое, то оно обусловлено внешним воздействием на организм. Если оно физиологическое, то оно тоже обусловлено внешним воздействием на организм. Данное явление не психическое и не физиологическое. Следовательно, оно не обусловлено внешним воздействием на организм.

12. Если подозреваемый совершил кражу, то, либо она была тщательно подготовлена, либо он имел соучастников. Если бы кража была тщательно подготовлена, то, если бы были соучастники, украдено было бы много. Украдено мало. Значит, подозреваемый невиновен.

13. Если курс ценных бумаг растет, или процентная ставка снижается, то падает курс акций. Если процентная ставка снижается, то либо курс акций не падает, либо курс ценных бумаг не растет. Курс акций понижается. Следовательно, снижается процентная ставка.

14. Либо свидетель не был запуган, либо, если Генри покончил жизнь самоубийством, то записка была найдена. Если свидетель был запуган, то Генри не покончил жизнь самоубийством. Записка была найдена. Следовательно, Генри покончил жизнь самоубийством.

15. Если философ – дуалист, то он не материалист. Если он не материалист, то он диалектик или метафизик. Он не метафизик. Следовательно, он диалектик или дуалист.

16. Если капиталовложения останутся постоянными, то возрастут правительственные расходы или возникнет безработица. Если правительственные расходы не возрастут, то налоги будут снижены. Если налоги будут снижены и капиталовложения останутся постоянными, то безработица не возрастет. Безработица не возрастет. Следовательно, правительственные расходы возрастут.

17. Если исходные данные корректны и программа работает правильно, то получается верный результат. Результат неверен. Следовательно, исходные данные некорректны или программа работает неправильно.

18. Если цены высоки, то и заработная плата высока. Цены высоки или применяется регулирование цен. Если применяется регулирование цен, то нет инфляции. Наблюдается инфляция. Следовательно, заработная плата высока.

19. Если я устал, я хочу вернуться домой. Если я голоден, я хочу вернуться домой или пойти в ресторан. Я устал и голоден. Поэтому я хочу вернуться домой.

20. Намеченная программа удастся, если застать противника врасплох или если его позиции плохо защищены. Захватить его врасплох можно, если он беспечен. Он не будет беспечен, если его позиции плохо защищены. Значит, программа не удастся.

21. Если фирма ориентирована на усиление маркетинга, то она намерена получить крупную прибыль на выпуске новых товаров. Если фирма предусматривает расширение торговой сети, то она намерена получить крупную прибыль от увеличения продаж. Фирма предусматривает усиление маркетинга или собирается расширить торговую сеть, Следовательно, она намерена получить крупную прибыль.

22. Если я пойду завтра на первую лекцию, то должен буду встать рано. Если я пойду вечером на дискотеку, то лягу спать поздно. Если я лягу спать поздно, а встану рано, я буду плохо себя чувствовать. Следовательно, я должен пропустить первую лекцию или не ходить на дискотеку.

23. Если книга, которую я читаю, бесполезная, то она несложная. Если книга сложная, то она неинтересная. Эта книга сложная и интересная. Значит, она полезная.

24. Если он не трус, то он поступит в соответствии с собственными убеждениями. Если он честен, то он не трус. Если он не честен, то он не признает своей ошибки. Он признал свою ошибку. Значит, он не трус.

25. Если не зафиксировано изъятие следов преступной деятельности в протоколе, то процессуальный порядок следственного действия не соблюден. Процессуальный порядок следственного действия соблюден. Следовательно, изъятие следов преступной деятельности зафиксировано в протоколе.

2.5.2.2 Логика предикатов. Формальные аксиоматические теории.

Формируемые компетенции:

- способность использовать естественнонаучные и математические знания для ориентирования в современном информационном пространстве;
- готовность к взаимодействию с участниками образовательного процесса

Задачи:

– дать представление о способах математической обработки информации с помощью теории вероятностей;

– научить использовать методы математической логики для изучения математических доказательств и теорий;

– научить использовать инструментарий математической логики для конструирования моделей окружающей действительности

Вопросы к занятию

1. Предикаты. Формулы логики предикатов. Равносильность формул
2. Приведенные и нормальные формулы
3. Выражение суждения в виде формулы логики предикатов
4. Принципы построения формальных теорий
5. Исчисление высказываний

Основные теоретические сведения

1. Все равносильности, имеющие место для логики высказываний, переносятся на логику предикатов.

1. Коммутативность.

а) $A(x)\&B(x) \equiv B(x)\&A(x)$; б) $A(x) \vee B(x) \equiv B(x) \vee A(x)$.

2. Ассоциативность.

а) $A(x)\&(B(x)\&C(x)) \equiv (A(x)\&B(x))\&C(x)$;

б) $A(x)\vee(B(x)\vee C(x)) \equiv (A(x)\vee B(x))\vee C(x)$.

3. Дистрибутивность.

а) $A(x)\&(B(x)\vee C(x)) \equiv A(x)\&B(x)\vee A(x)\&C(x)$

б) $A(x)\vee(B(x)\&C(x)) \equiv (A(x)\vee B(x))\&(A(x)\vee C(x))$

4. Закон де Моргана.

а) $\neg(A(x)\&B(x))$□□□$A(x)\vee\neg B(x)$;

б) $\neg(A(x)\vee B(x)) \equiv \neg A(x)\&\neg B(x)$.

5. Идемпотентность.

а) $A(x)\&A(x) \equiv A(x)$; б) $A(x)\vee A(x) \equiv A(x)$.

6. Поглощение.

а) $A(x)\&(A(x)\vee B(x)) \equiv A$ (1– ый закон поглощения);

б) $A(x)\vee A(x)\&B(x) \equiv A$ (2– ой закон поглощения).

7. Расщепление (склеивание).

а) $A(x)\&B(x) \vee A(x)\&(\neg B(x)) \equiv A$ (1–ый закон расщепления);

б) $(A(x)\vee B(x)) \& (A(x)\vee\neg B(x)) \equiv A$ (2–ой закон расщепления).

8. Двойное отрицание.

$\neg(\neg A(x)) \equiv A(x)$.

9. Свойства констант.

а) $A(x)\&И \equiv A(x)$; б) $A(x)\&Л \equiv Л$; в) $A(x)\vee И \equiv И$; г) $A(x)\vee Л \equiv A(x)$.

10. Закон противоречия. $A(x)\&\neg A(x) \equiv Л$.

11. Закон “исключенного третьего”. $A(x)\vee\neg A(x) \equiv И$.

12. $A(x)\supset B(x) \equiv \neg A(x)\vee B(x) \equiv \neg(A(x)\&\neg B(x))$.

13. $A(x)\sim B(x) \equiv (A(x)\supset B(x))\&(B(x)\supset A(x)) \equiv (A(x)\&B(x)) \vee (\neg A(x)\&\neg B(x)) \equiv (A(x)\vee\neg B(x))\&(\neg A(x)\vee B(x))$.

Определение Формула логики предикатов определяется индуктивно следующим образом:

1. Любая формула логики высказываний есть формула логики предикатов.

К новым формулам логики предикатов относятся следующие выражения:

2. Предметные переменные x, y, z, ... есть формулы.

3. Предикаты $P(x)$, $Q(x, y)$, ... , а также выражения с кванторами $\forall xP(x)$, $\exists xR(x)$, $\forall x\exists yQ(x, y)$,... есть формулы.

4. Если A и B – формулы, то $\neg A$, $A\vee B$, $A\&B$, $A\supset B$, $A\sim B$ есть формулы, в которых свободные переменные формул A и B остаются свободными, а связанные переменные формул A и B остаются связанными.

5. Ничто, кроме указанного в пунктах 1 – 4, не есть формула.

2.□Перенос квантора через отрицание.

Пусть A – формула, содержащая свободную переменную x. Тогда

$$\neg (\forall xA(x) \equiv \exists x(\neg A(x)). \quad (1)$$

$$\neg (\exists xA(x)) \equiv \forall x\neg (A(x)). \quad (2)$$

3. Вынос квантора за скобки.

Пусть формула $A(x)$ содержит переменную x, а формула B не содержит переменной x, и все переменные, связанные в одной формуле, связаны в другой. Тогда

$\forall x A(x) V B \equiv \forall x(A(x) V B).$ (3)

$\forall x A(x) \& B \equiv \forall x(A(x) \& B).$ (4)

$\exists x A(x) V B \equiv \exists x(A(x) V B).$ (5)

$\exists x A(x) \& B \equiv \exists x(A(x) \& B).$ (6)

4. Дистрибутивность квантора общности относительно конъюнкции и квантора существования относительно дизъюнкции.

Пусть формула B, так же, как и формула A, зависит от x. Тогда

$\forall x A(x) \ \& \ \forall x B(x) \equiv \forall x(A(x) \& B(x)).$ (7)

$\exists x A(x) \ V \ \exists x B(x) \equiv \exists x(A(x) V B(x)).$ (8)

5. Перестановка одноименных кванторов.

$\forall x \forall y A(x,y) \equiv \forall y \forall x A(x,y).$ (9)

$\exists x \exists y A(x,y) \equiv \exists y \exists x A(x,y).$ (10)

6. Переименование связанных переменных.

Заменяя связанную переменную формулы A другой переменной, не входящей в эту формулу, всюду: в кванторе и в области действия квантора, получим формулу, равносильную A.

$\forall x A(x) \ V \ \forall x B(x) \equiv \forall x A(x) \ V \ \forall y B(y).$ (11)

$\forall x A(x) \ V \ \forall y B(y) \equiv \forall x(A(x) \ V \ \forall y B(y)).$ (12)

$A(x) \ V \ \forall y B(y) \equiv \forall y(A(x) \ V \ B(y))$ (13)

$\forall x A(x) \ V \ \forall x B(x) \equiv \forall x \forall y(A(x) \ V \ B(y)).$ (14)

$\forall x A(x) \ V \ \exists x B(x) \equiv \forall x \exists y(A(x) \ V \ B(y)).$ (16)

$\forall x A(x) \ \& \ \exists x B(x) \equiv \forall x \exists y(A(x) \ \& \ B(y)).$ (17)

Обобщенные записи формул 3-6

Пусть Q – любой из кванторов $\forall$, $\exists$.

$QxA(x) \ V \ B \equiv Qx(A(x) \ V \ B)$ (2.18)

$QxA(x) \ \& \ B \equiv Qx(A(x) \ \& \ B)$. (2.19)

В тождествах (2.18), (2.19) формула B не зависит от x.

$Q_1xA(x) \ \& \ Q_2xB(x) \equiv Q_1xQ_2z(A(x) \& B(z))$ (2.20)

$Q_1xA(x) \ V \ Q_2xB(x) \equiv Q_1xQ_2z(A(x) V B(z))$ (2.21)

Логическое следование и логическая эквивалентность

1. $\neg(\forall x \, A(x) = □\exists x(\neg A(x))$; 2. $\neg(\exists x \, A(x)) = □\forall x \neg(A(x))$

3. $\forall x(A(x) \& B(x)) = \forall x \, A(x) \ \& \ \forall x \, B(x)□$; 4. $\exists x(A(x) V B(x)) = \exists x \, A(x) V \exists x \, B(x)$

5. $\exists x(A(x) \wedge B(x)) \Rightarrow \exists x \, A(x) \ \& \exists x B(x)$; 6. $\forall x \, A(x) \vee \forall x B(x) \Rightarrow \forall x(A(x) \vee B(x))$;

7. $\forall x \forall y \, A(x, y) = □\forall y \forall x \, A(x, y)$; 8. $\exists x \exists y \, A(x, y) = □\exists y \exists x \, A(x, y)$;

9. $\forall x \, A(x) V B□ = \forall x(A(x) V B)$; 10. $\forall x \, A(x) \& B□ = \forall x(A(x) \& B)$;

11. $\exists x \, A(x) V B□ = \exists x(A(x) V B)$; 12. $\exists x \, A(x) \& B□ = \exists x(A(x) \& B)$;

13. $B \rightarrow \forall x \, A(x) = \forall x(B \rightarrow A(x))$; 14. $B \rightarrow \exists x \, A(x) = \exists x(B \rightarrow A(x))$;

15. $\forall x \, A(x) \rightarrow B□ \Rightarrow \exists x \, (A(x) \rightarrow B)$; 16. $\exists x \, A(x) \rightarrow B□ \Rightarrow \forall x \, (A(x) \rightarrow B)$.

Практические задания

1. Среди следующих предложений выделить предикаты, и для каждого предиката установить местность и область истинности, если $X = R$. Для

двуместных предикатов изобразить область истинности графически.

1) $x + 2 = 0$.

2) При $x = 0$ выполняется равенство $x - 2 = 0$.

3) $x^3 - 8 = 0$.

4) $\exists x(x^3 - 8 = 0)$.

5) $x - y = 1$.

6) $x^2 - 5x + 7$.

7) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

8) $x - y^2 \geq 0$.

9) Однозначное число x является простым.

10) $\dfrac{x^2 - 1}{x^2 - 2x + 1} = 0$

2. Установить, является ли данное выражение формулой, а если да, то определить, какие переменные в ней свободные, а какие связанные.

1) $\forall x(\exists y(\neg A(x))\&B(y, z))$.

2) $\forall x(\exists y(\neg A(x,y) \supset C(z)\&B(y, z)))$

3) $\forall x(\exists y(\neg A(x) \supset B(y, z))$.

4) $\forall x(\exists y(\neg A(x)\&B(y)) \supset C(y, z))$.

5) $\forall x(\exists y(\neg A(x,y)\&B(y, z)))$.

6) $\forall x(\exists y(\neg A(x))\&B(y))$.

7) $\forall x(\exists y(\neg A(x)) \sim B(y, z))$.

8) $\forall x(\exists y(\neg A(x) \sim B(y, z)))$.

9) $\forall x(\exists y(\neg A(x, y)) \sim B(y, z))$.

10) $\forall x(\exists y(\neg A(x)\&B(y, z))$.

3. Записать отрицание формулы в предваренной нормальной форме.

1) $\exists x\neg A(x)$.

2) $\exists x(A(x)\neg B(x))$.

3) $\neg(A(x)\&B(x, y))$.

4) $\forall x\neg A(x)$.

5) $\forall xA(x) \supset \exists x\neg B(x, y)$.

6) $\forall x(A(x)\rightarrow \forall yB(y))$.

7) $\exists x(A(x)B(x)C(x))$.

8) $\forall x(A(x)\rightarrow B(x))$.

9) $\exists x(A(x)\leftrightarrow B(x))$.

10) $\forall x(A(x) \vee \exists yB(y))$.

11) $\forall x(A(x)\rightarrow B(x)) \wedge \exists x(C(x) \wedge \neg D(x))$.

12) $\forall x\exists y\forall z(A(x, y, z)\rightarrow B(x, y, z))$.

13) $\neg(\forall xA(x) \supset \exists x\neg B(x, y))$.

4. Даны предикаты: A(x) и B(x). Записать словами предложенные формулы C и D.

1) A(x) = "x – торговец подержанными автомобилями";B(x) = "x – нечестный человек".

Записать словами: $C = \forall x(A(x) \supset B(x))$; $D = \exists x(B(x)\ \&\ A(x))$.

2) A(x) = "x – торговец наркотиками"; B(x) = "x – наркоман".

Записать словами: $C = \forall x(A(x) \supset B(x))$; $D = \exists x(A(x)\&B(x))$.

3) A(x) = "x – рациональное число"; B(x) = "x – действительное число". Записать словами: $C = \exists x(B(x)\ \&\ A(x))$; $D = \forall x(A(x) \supset B(x))$.

4) A(x) = "x – рыба"; B(x) = "x – водное животное".

Записать словами $C = \exists\exists x(B(x)\ \&\ A(x))$; $D = \forall\forall x(A(x) \supset B(x))$.

5) A(x) = "x – четное число"; B(x) = "x делится на 6".

Записать словами: $C = \forall\forall x(B(x) \supset A(x))$; $D = \neg((\exists\exists x(\neg A(x)\&B(x)))$.

6) A(x) = "x – металл"; B(x) = "x – теплопроводен".

Записать словами: $C = \exists\exists x(B(x) \,\&\, A(x))$; $D = \forall\forall x(A(x) \supset B(x))$.

7) A(x) = "x – простое число"; B(x) = "x четное число".

Записать словами: $C = \forall\ \forall x(B(x) \supset A(x))$; $D = (\exists x((A(x) \& B(x)))$.

8) A(x) = "x – студент"; B(x) = "x – сдал экзамены".

Записать словами: $C = \exists\exists x(B(x) \,\&\, A(x))$; $D = \forall\ \forall x(A(x) \supset B(x))$.

9) A(x) = "x - деятельность"; B(x) = "x дает счастье".

Записать словами: $C = \forall\ \forall x(B(x) \supset A(x))$; $D = \neg(\exists\ x(\neg A(x) \& B(x)))$.

10) A(x) = "x – политик"; B(x) = "x – мошенник".

Записать словами: $C = \neg(\forall(\forall x(A(x) \supset B(x)))$; $D = \exists\exists x(A(x) \& \neg B(x))$.

5.Данное суждение записать в виде формулы логики предикатов. Построить отрицание данного суждения в виде формулы, не содержащей внешних знаков отрицания. Перевести на естественный язык.

1) Не всякое действительное число является рациональным.
2) Каждый студент выполнил хотя бы одну лабораторную работу.
3) Ни одно четное число, большее 2, не является простым.
4) Выгул собак или кошек запрещен.
5) Произведение любых двух простых чисел не является простым числом.
6) Всякое положительное число больше всякого отрицательного числа.
7) Каждый, купивший билет, получит премию.
8) Всякое положительное число больше всякого отрицательного числа.
9) Всякий равносторонний треугольник является равнобедренным.
10) Некоторые студенты сдали все зачеты.

2.5.2.3 Нечеткая логика

Формируемые компетенции:

- способность использовать естественнонаучные и математические знания для ориентирования в современном информационном пространстве;
- готовность к взаимодействию с участниками образовательного процесса

Задачи:

– дать представление о роли и месте логики в мышлении, науке, информатике и в обучении;

– научить устанавливать взаимосвязи математической логики с компьютерами, информатикой, системами искусственного интеллекта;

– познакомить с методами построения и анализа моделей средствами математической логики.

Вопросы к занятию

1. Нечеткие множества. Основные характеристики нечетких множеств.
2. Операции над нечеткими множествами.
3. Нечеткая и лингвистическая переменная.
4. Нечеткие множества в системах управления.
5. Нечеткие высказывания и нечеткие модели систем.
6. Нечеткие предикаты.

Основные теоретические сведения

Определение 1. Нечетким множеством $\widetilde{A}$ на множестве X назовем пару (X, m_A), где $m_A(x)$ – функция, каждое значение которой $m_A(x) \in [0, 1]$ интерпретируется как степень принадлежности точки $x \in X$ множеству $\widetilde{A}$. Функция m_A – называется функцией принадлежности множества $\widetilde{A}$.

Для обычного четкого множества А можно положить

$$m_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \notin A. \end{cases}$$

Функцию принадлежности, как и всякую функцию, можно задавать таблично или аналитически.

Переменные, значениями которых являются нечеткие множества, называются лингвистическими. Это основной тип переменных в языке людей.

Операции с нечеткими множествами

Пусть $\widetilde{A}$ и $\widetilde{B}$ – два нечетких множества с функциями принадлежности $m_A(x)$ и $m_B(x)$.

В табл. 1 приведены названия основных операций, их лингвистический смысл и формула для определения функции принадлежности множества $\widetilde{C}$, которое является результатом соответствующей операции.

Табл. 1

Операции	Лингвистический смысл	Формула для $m_C(x)$
Пересечение $\widetilde{C} = \widetilde{A} \cap \widetilde{B}$	и	$\min(m_A(x), m_B(x))$
Объединение $\widetilde{C} = \widetilde{A} \cup \widetilde{B}$	или	$\max(m_A(x), m_B(x))$.
Дополнение	не	$1 - m_A(x)$
Концентрация	очень	$[m_A(x)]^2$
Размывание	не очень	$[m_A(x)]^{1/2}$

Нечеткое множество называется пустым, если $m_A(x) = 0$ для всех $x \in X$.

Нечеткие высказывания

Определение 2. Нечетким высказыванием называется высказывание $\widetilde{A}$, степень истинности которого $\mu(\widetilde{A})$ можно оценить числом из интервала [0, 1], $\mu(\widetilde{A}) \in [0, 1]$. Если $\mu(\widetilde{A}) = 0{,}5$, то высказывание называется индиффирентным.

Определение 3. Нечеткой высказывательной переменной $\widetilde{X}$ называется нечеткое высказывапние $\widetilde{X}$, степень истинности которого может меняться в интервале [0, 1].

Нечеткие высказывания и степень их истинности обозначают большими буквами с тильдой:: $\widetilde{A}$, $\widetilde{B}$, $\widetilde{X}$, и т. д.

Логические операции на множестве нечетких высказываний

6. Отрицание нечеткого высказывания:

$$\neg \widetilde{A} = 1 - \widetilde{A}. \qquad (1)$$

7. Конъюнкция нечетких высказываний:

$\tilde{A}\,\&\,\tilde{B}=\min(\tilde{A},\tilde{B})$. (2)

8. Дизъюнкция нечетких высказываний:

$\tilde{A}\vee\tilde{B}=\max(\tilde{A},\tilde{B})$. (3)

9. Импликация нечетких высказываний:

$\tilde{A}\supset\tilde{B}=\max(1-\tilde{A},\tilde{B})$. (4)

10. Эквивалентность нечетких высказываний:

$\tilde{A}\sim\tilde{B}=\min(\max(1-\tilde{A},\tilde{B}),\max(\tilde{A},1-\tilde{B}))$. (5)

Старшинство операций принято в поядке1) – 5).

Множество нечетких высказываний вместе с введенными на них операциями образуют алгебру нечетких высказываний.

Определение 4. Нечеткой логической формулой называется:

а) любая нечеткая высказывательная переменная;

б) если $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ – нечеткие логические формулы, то $\neg\tilde{A}$, $\tilde{A}\,\&\,\tilde{B}$, $\tilde{A}\vee\tilde{B}$, $\tilde{A}\supset\tilde{B}$, $\tilde{A}\sim\tilde{B}$ – тоже нечеткие логические формулы.

Определение 5. Пусть $\tilde{A}(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2, \ldots, \tilde{X}_n)$ и $\tilde{B}(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2, \ldots, \tilde{X}_n)$ – две нечеткие логические формулы. Степенью равносильности формул $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ называется величина

$$\mu(\tilde{A},\tilde{B})=\underset{(\alpha_1,\alpha_2,\ldots\alpha_n)}{\&}\{\tilde{A}(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)\sim\tilde{B}(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)\} \qquad (6)$$

Множество всех наборов степеней истинности $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots,\alpha_n)$ нечетких переменных ($\tilde{X}_1, \tilde{X}_2, \ldots, \tilde{X}_n$) называют полной областью определения C^n.

Если $\mu(\tilde{A},\tilde{B}) = 0{,}5$, то нечеткие формулы $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ называются индиффирентными.

Если $\mu(\tilde{A},\tilde{B}) > 0{,}5$, то нечеткие формулы $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ называются нечетко равносильными.

Если $\mu(\tilde{A},\tilde{B}) < 0{,}5$, то нечеткие формулы $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ называются нечетко неравносильными..

Определение 6. Степенью неравносильности формул $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ называется величина

$\overline{\mu}(\tilde{A},\tilde{B}) = 1-\mu(\tilde{A},\tilde{B})$.

Определение 7. Пусть $\tilde{A}(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2, \ldots, \tilde{X}_n)$ и $\tilde{B}(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2, \ldots, \tilde{X}_n)$ – две нечеткие логические формулы, рассмотренные на некотором множестве M изменения нечетких переменных $\tilde{X}_1, \tilde{X}_2, \ldots, \tilde{X}_n$. Областью нечеткой равносильности формул $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ называется подмножество множества M, на котором формулы $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ нечетко равносильны.

Определение 8. Если формула $\tilde{A}(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2, \ldots, \tilde{X}_n)$ на всех наборах переменных $\tilde{X}_1, \tilde{X}_2, \ldots, \tilde{X}_n$ из некоторого множества M имеет степень истинности большую или равную 0,5, то она будет на нем нечетко истинной. Обозначается это так: $\tilde{A}=\tilde{И}$.

Определение 9. Если формула $\tilde{A}(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2, \ldots, \tilde{X}_n)$ на всех наборах переменных $\tilde{X}_1, \tilde{X}_2, \ldots, \tilde{X}_n$ из некоторого множества M имеет степень истинности меньшую или равную 0,5, то она будет на нем нечетко ложной. Обозначается это так: $\tilde{A}=\tilde{Л}$.

Нечеткие предикаты

Определение 10. Нечетким предикатом $\tilde{P}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется нечеткая формула, переменные которой определены на некотором множестве M, $x_1, x_2, \ldots, x_n \in M$, а сама она принимает значения из интервала [0, 1].

Нечеткий предикат от n переменных называется n-местным нечетким предикатом. Нечеткое высказывание $\tilde{A}$, задаваемое степенью истинности $\mu(\tilde{A}) \in [0, 1]$ является одноместным нечетким предикатом..

Определение 11. Нечеткими кванторами $\tilde{\forall}$ и $\tilde{\exists}$ называются логические символы, которые придают включающим их выражениям следующий смысл:

$$\tilde{\forall}\,\tilde{P}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \underset{x_i \in M}{\&}\,\tilde{P}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \min_{x_i \in M}\,\tilde{P}(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

$$\tilde{\exists}\,\tilde{P}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \underset{x_i \in M}{V}\,\tilde{P}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \max_{x_i \in M}\,\tilde{P}(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

<u>Практические задания</u>

Определить степень равносильности формул. $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ □при условии, что $\tilde{X}$ и $\tilde{Y}$ □принимают значения степеней истинности из множества {0,2; 0,3}.

№ задания	$\tilde{A}$	$\tilde{B}$	№ задания	$\tilde{A}$	$\tilde{B}$
1	а) $\tilde{X} \supset \tilde{Y}$ б) $\neg\tilde{X} \vee \tilde{Y}$	$\neg\tilde{X} \,\&\, \tilde{Y}$ $\tilde{X} \,\&\, \tilde{Y}$	6	а) $\tilde{Y} \,\&\, \neg\tilde{X}$ б) $\tilde{Y} \supset \tilde{X}$	$\neg\tilde{X} \supset \tilde{Y}$ $\neg\tilde{X} \vee \tilde{Y}$
2	а) $\tilde{X} \,\&\, \tilde{Y}$ б) $\neg\tilde{X}$	$\tilde{X} \supset \neg\tilde{Y}$ $\neg\tilde{X} \vee \tilde{Y}$	7	а) $\neg\tilde{X}$ б) $\neg\tilde{X} \,\&\, \tilde{Y}$	$\tilde{X} \,\&\, \neg\tilde{Y}$ $\tilde{X} \vee \neg\tilde{Y}$
3	а) $\tilde{Y} \supset \neg\tilde{X}$ б) $\tilde{X} \supset \neg\tilde{Y}$	$\tilde{X} \,\&\, \tilde{Y}$ $\neg\tilde{Y}$	8	а) $\tilde{Y} \vee \neg\tilde{X}$ б) $\neg\tilde{Y}$	$\neg\tilde{Y}$ $\neg\tilde{X} \supset \tilde{Y}$
4	а) $\tilde{X} \,\&\, \neg\tilde{Y}$ б) $\neg\tilde{Y}$	$\neg\tilde{X}$ $\neg\tilde{X} \supset \neg\tilde{Y}$	9	а) $\tilde{X} \supset \tilde{Y}$ б) $\neg\tilde{Y}$	$\neg\tilde{X} \,\&\, \neg\tilde{Y}$ $\neg\tilde{X} \supset \tilde{Y}$
5	а) $\tilde{Y} \supset \tilde{X}$ б) $\neg\tilde{X}$	$\tilde{X} \vee \neg\tilde{Y}$ $\tilde{Y} \supset \tilde{X}$	10	а) $\tilde{X} \,\&\, \neg\tilde{Y}$ б) $\tilde{Y} \,\&\, \tilde{X}$	$\neg\tilde{X}$ $\neg\tilde{X} \vee \neg\tilde{Y}$

3.1 Организация самостоятельной работы

Самостоятельная работа обучающихся осуществляется в сроки, определяемые календарно-тематическим планом и расписанием занятий, с учетом специфики направления, профиля, индивидуальных особенностей обучающегося.

Выдача заданий обучающимся на внеаудиторную самостоятельную работу должна сопровождаться со стороны преподавателя подробным инструктажем по ее выполнению, включающим изложение цели задания, его содержания, сроков выполнения, ориентировочного объема работы, основных требований к результатам работы и к отчету по ним, сведения о возможных ошибках и критериях оценки выполнения работ. Инструктаж проводится преподавателем.

В ходе выполнения заданий самостоятельной работы и при необходимости студенты могут обращаться к выдавшему задание преподавателю за дополнительной консультацией. Студент может получить устную консультацию у преподавателя в соответствии с графиком консультаций преподавателя, о котором можно узнать на сайте института.

Контроль результатов самостоятельной работы проходит в письменной форме с представлением обучающимися отчетов о своей деятельности в виде контрольной работы.

Контрольная работа должна быть сдана на нормоконтроль в соответствии с графиком самостоятельной работы студента.

Работа оценивается удовлетворительно при условии выполнения не менее 70% заданий. Каждое задание, в свою очередь, считается выполненным и может быть зачтено, если выполнены 70%-94% условий и требований, сформулированных в нем.

В случае неудовлетворительной оценки работы, она возвращается на доработку студенту. В этой же работе студент должен устранить замечания и сдать на повторную проверку. Обучающиеся, не выполнившие задания и не представившие результаты самостоятельной работы, аттестуются по курсу «неудовлетворительно» и к аттестации по дисциплине не допускаются.

3.2 Материалы к промежуточной аттестации

Вопросы к зачету

1 Математическая логика и основания математики.
2 Логические и семантические парадоксы.
3 Теоретико-множественные основы математической логики.
4 Языковые основы математической логики.
5 Логико-математические языки.
6 Логика высказываний. Определение высказывания
7 Операции над высказываниями. Алгебра высказываний
8 Формулы логики высказываний. Равносильность формул
9 Запись сложного высказывания в виде формулы логики высказываний
10 Тождественно-истинные и тождественно-ложные формулы. Проблема разрешимости
11 Формализация рассуждений. Правильные рассуждения.
12 Логика предикатов. Определение предиката. Кванторы
13 Формулы логики предикатов. Равносильность формул
14 Приведенные и нормальные формулы
15 Выражение суждения в виде формулы логики предикатов
16 Интерпретация формулы логики предикатов в виде суждения.
17 Выполнимость. Общезначимость
18 Принципы построения формальных теорий
19 Алгебра высказываний и синтаксис языка математических и логических знаков.
20 Исчисление высказываний
21 Структура логико-алгебраических моделей.
22 Принцип дедукции
23 Формальный вывод и выводимые формулы
24 Логическое следование
25 Непротиворечивость. Семантическая полнота исчисления высказываний
26 Исчисление предикатов. Основные понятия.
27 Алгебра предикатов.
28 Исчисление предикатов. Синтаксис и семантика языка логики предикатов.
29 Правила вывода и предложения исчисления предикатов
30 Автоматическое доказательство теорем.
31 Доказательство теорем методом резолюций.
32 Нечеткая логика. Использование нечеткой логики.
33 Нечеткие множества. Основные понятия.
34 Операции с нечеткими множествами
35 Нечеткие отношения
36 Модальные логики.
37 Язык модальной логики
38 Темпоральная логика.

39 Нечеткие высказывания
40 Нечеткие предикаты
41 Лингвистические переменные и исчисление нечетких высказываний.
42 Аксиоматический метод.
43 Понятие о метаязыке и метатеории.
44 Интерпретация формальной системы и теории
45 Структура языка и выражения. Функторы
46 Грамматики
47 Определение формальной системы
48 Алгоритмы. Определение алгоритма
49 Интуитивное понятие алгоритма.
50 Формализация и обобщение понятия алгоритма
51 Марковские алгоритмы.
52 Челночные алгоритмы
53 Вычислимые функции
54 Машина Тьюринга.
55 Вычислимые по Тьюрингу функции
56 Теорема Геделя о неполноте математики
57 Формальная арифметика
58 Сложность вычислений и элементы логического программирования
59 Рекурсивные множества.
60 Рекурсивные функции

Критерии оценивания на зачете

Зачтено – оценка ставится за знание фактического материла по дисциплине, владение понятиями системы знаний по дисциплине, личную освоенность знаний, умение объяснять сущность понятий, умение выделять главное в учебном материале, готовность к самостоятельному выбору, решению, умение найти эффективный способ решения проблемной ситуации, умение использовать знания в стандартных и нестандартных ситуациях, логичное и доказательное изложение учебного материала, владение точной речью, умение аргументировано отвечать па вопросы; вступать в обсуждение, умение аргументировать выбор представленного решения выполненного задания

Не зачтено – оценка ставится за отсутствие знаний по дисциплине, представления по вопрос, непонимание материала по дисциплине, отсутствие решения задачи, наличие коммуникативных «барьеров» в общении, отсутствие ответа на предложенный вопрос.

Литература

Основная литература

1. Триумфгородских, М.В. Дискретная математика и математическая логика для информатиков, экономистов и менеджеров : учебное пособие [Электронный ресурс]/ М.В. Триумфгородских. – Москва : Диалог-МИФИ, 2011. - 180 с. : табл., граф., ил. - Библиогр. в кн. - ISBN 978-5-86404-238-0 ; Режим доступа:http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=136106

Дополнительная литература

1. Гурова Л. М. Математическая логика и теория алгоритмов. Учебное пособие [Электронный ресурс] / Гурова Л. М., Зайцева Е. В. - Московский государственный горный университет, 2006 – Режим доступа http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=83721/

2. Гладких О. Б. Математическая логика: учебно-методическое пособие [Электронный ресурс] / Гладких О. Б., Белых О. Н. - ЕГУ им. И.А. Бунина, 2011.- Режим доступа - http://biblioclub.ru/index.php?page=book_red&id=272140&sr=1

3. Бояринцева Т. Е. Математическая логика и теория алгоритмов : Методические указания к выполнению типового расчета [Электронный ресурс] / Бояринцева Т. Е., Золотова Н. В., Исмагилов И. Р. - Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011. – Режим доступа - http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=257607

Периодические издания

– Информатика и образование: журнал. – Москва: «Образование и Информатика» , 2015 ;

– Инновации в образовании: журнал. Москва: Издательство СГУ, 2015

Интернет-ресурсы

https://openedu.ru/course/spbstu/MATLOG/ «Открытое образование», Каталог курсов, МООК: «Математическая логика»;

Онлайн инструменты по математической логике http://tablica-istinnosti.ru/ru/

Онлайн калькулятор. Таблица истинности http://math.semestr.ru/inf/table.php