Минобрнауки России

Бузулукский гуманитарно-технологический институт (филиал)
федерального государственного бюджетного образовательного учреждения
высшего образования

Оренбургского государственного университета

Кафедра физики, информатики и математики

Методические рекомендации по освоению дисциплин

ДИСЦИПЛИНЫ

«Б.1.Б.10.2 Линейная алгебра»

Уровень высшего образования

БАКАЛАВРИАТ

Направление подготовки
38.03.01 Экономика
(код и наименование направления подготовки)

Финансы и кредит
(наименование направленности (профиля) образовательной программы)

Тип образовательной программы
Программа академического бакалавриата

Квалификация
Бакалавр

Форма обучения
Очная, Заочная

Год набора 2019

УДК 510
ББК 22.11. я 73
У 74

Рецензент – О.А. Степунина

Шабалина, Л.Г.
Ш 73 Методические рекомендации по освоению дисциплины / Л.Г. Шабалина; Бузулукский гуманитарно-технологический институт – Бузулук: БГТИ, 2019. – 77 с.

Методические рекомендации включают общие рекомендации по дисциплине «Линейная алгебра»: по проведению лекций, практических занятий, консультаций, зачетов и экзаменов, по подготовке к практическим занятиям по вилам работ студентов, методические рекомендации к самостоятельной работе, методические рекомендации к контрольной работе, содержание курса набор заданий для самостоятельной работы, вопросы к зачету и экзамену, список рекомендуемой литературы.

Пособие адресовано преподавателям и студентам вузов, обучающихся по направлению подготовки 38.03.01 Экономика заочной и очной форм обучения.

УДК 510
ББК 22.11. я 73

Введение

Цель настоящего методического пособия – помочь студентам и преподавателям в организации занятий при изучении курсов математики.

Для освоения данным дисциплинам в вузе читаются лекции и проводятся практические занятия. В то же время основной формой обучения в условиях заочной формы обучения является самостоятельная работа с учебником и учебными пособиями.

Совершенствование деятельности в любой области экономики (управлении, финансово-кредитной сфере, маркетинге, учете, аудите) в значительной мере связано с применением в экономической науке и практике математических методов исследования.

Студенты бакалавриата направления 38.03.01 Экономика в рамках базового курса математики изучают три самостоятельные математические дисциплины: «Математический анализ» (I курс), «Линейная алгебра» (I курс), «Теория вероятностей и математическая статистика» (II курс), а также прикладные математические дисциплины «Методы оптимальных решений» (II курс).

Задачи изучения дисциплины «Математический анализ», «Линейная алгебра» и «Методы оптимальных решений» вытекают из требований к результатам освоения и условиям реализации основной образовательной программы и компетенций, установленных Федеральным государственным образовательным стандартом высшего образования по направлениям 38.03.01 Экономика.

Основная цель для студента: овладеть методами решения, планирования, моделирования, прогнозирования, анализа, синтеза в математике, для использования в финансовой и экономической деятельности.

Экономическое приложение разделов курса

№	Содержание курса математики	
	Традиционные разделы (темы) курса математики	Экономические приложения
1	2	3
	Элементы линейной алгебры	
1.1	Матрицы. Виды матриц, действия над матрицами. Определители и их свойства. Обратная матрица. Решение систем линейных уравнений (матричный метод, метод Крамера, метод Гаусса). Ранг матрицы. Теорема Кронекера-Капелли (критерий совместности системы). Системы линейных однородных уравнений. Фундаментальная система решений	Технологические матрицы (матрицы норм расхода). Общая постановка задачи оптимального планирования. Модель Леонтьева многоотраслевой экономики. Продуктивные матрицы. Модель международной торговли. Структурная матрица торговли
1.2	Векторы. Линейные операции над векторами, декартова система координат. Скалярное, векторное и смешанное произведения векторов	Вектор цен. Экономический смысл скалярного произведения векторов. Вектор потребления. Вектор интенсивностей
1.3	Векторное (линейное) пространство. Подпространства. Линейная зависимость векторов. Евклидово пространство. Линейные преобразования. Собственные числа и собственные векторы линейного преобразования. Квадратичные формы	Вектор «затрат — выпуска», производственное пространство. Линейная модель международной торговли
2	***Элементы аналитической геометрии***	

2.1	Линии на плоскости. Прямая на плоскости. Кривые второго порядка. Полярная система координат. Уравнение плоскости в пространстве. Уравнение прямой в пространстве. Поверхности второго порядка	Кривые спроса и предложения. Кривые производственных возможностей. Кривые безразличия, линия бюджетного ограничения. Кривые «доход - потребление»
3	***Начала математического анализа***	
3.1	Основные сведения о множествах	Бюджетное множество
3.2	Понятие функции одной переменной, основные свойства. Способы задания функции. Графики, их преобразования. Элементарные функции	Функции и графики в экономическом моделировании. Функции спроса и предложения. Точка равновесия. Зависимости спроса от дохода (функции Торнквиста). Функция потребления. Графики зависимости издержек и дохода от объема производства. Функция полезности, однофакторная производственная функция, функция налоговой ставки.
3.3	Понятие последовательности. Предел последовательности. Бесконечно большие, бесконечно малые величины.	Наращенные суммы. Паутинная модель рынка.
3.4	Предел функции. Замечательные пределы. Эквивалентность. Непрерывность функции. Классификация точек разрыва.	Экономическая интерпретация непрерывности
4	***Дифференциальные исчисления функция одной переменной***	
4.1	Производная функции одной переменной, ее геометрический смысл. Правила и техника дифференцирования	Эластичность функции. Маржинальные величины. Предельная производительность труда. Предельная себестоимость
4.2	Экстремум функции одной переменной. Дифференциал функции одной переменной, его геометрический смысл. Применения дифференциала к приближенным вычислениям. Производные и дифференциалы высших порядков. Исследование функции по первой производной. Правило Лопиталя. Формула Тейлора.	Максимизация прибыли. Оптимизация налогообложения предприятий. Формула Уилсона. Критерий оптимальности объема партии товара (работа идеального склада). Теория одноресурсной фирмы (закон убывающей доходности, оптимальные решения)
5	***Интегральные исчисления функция одной переменной***	
5.1	Неопределенный интеграл: определение, свойства, методы интегрирования.	
5.2	Определенный интеграл: вычисление определенных интегралов по формуле Ньютона-Лейбница, заменой переменных и по частям.	Экономические приложения интеграла: вычисление затрат при хранении запасов сырья на складе; потребительская рента; определение объема выпускаемой продукции, периода окупаемости инвестиций; вычисление средних значений. Коэффициент Джини.
5.3	Несобственные интегралы первого и второго рода	Потоки и стоки.

6	***Дифференциальные исчисления функции нескольких переменных***	
6.1	Область определения и непрерывность функций нескольких переменных. Графики функций *z= f(x,y).*	Многомерная функция полезности, функция издержек, многофакторная производственная функция (функция Кобба-Дугласа). Уравнение обмена Фишера.
6.2	Частные производные функций нескольких переменных. Техника дифференцирования частных производных. Касательная плоскость и нормаль к поверхности. Дифференцирование сложной и неявно заданной функции. Дифференциал первого порядка, его применение	Экономический смысл частных производных (предельная производительность труда; предельная фондоотдача; эластичность выпуска по труду; эластичность выпуска по фондам). 1-й закон Гессена; с увеличением потребления товара его полезность уменьшается.
6.3	Теория поля. Скалярное поле. Производная по направлению. Градиент	
6.4	Производные и дифференциалы высших порядков. Экстремум функции нескольких переменных.	Задачи оптимизации. Золотое правило экономики для многоресурсной фирмы. Задача ценовой дискриминации. Многокритериальные задачи оптимизации в экономике; оптимальность по Парето; ящик Эджворта
7	***Дифференциальные уравнения***	
7.1	Задачи на составление дифференциальных уравнений	Модель естественного роста продукции. Логистический рост, мультипликатор инфляции. Движение фондов. Демографическая задача.
7.2	Дифференциальные уравнения первого порядка. Задача Коши.	Задача о долге (кредитование). Рост населения и истощение ресурсов. Рост денежного вклада в банке. Модель естественного роста выпуска. Динамическая модель Кейса. Модели Эванса и Солоу. Уравнение Самуэльсона – Солоу, моделирующее связь между изменением цены и неудовлетворенным спросом.
7.3	Дифференциальные уравнения высших порядков. Системы дифференциальных уравнений.	Рост выпуска товаров в условиях конкуренции.
7.4	Линейные разностные уравнения.	Модель Самуэльсона – Хикса. Паутинная модель рынка. Задача об определении текущей стоимости купонной облигации.

В процессе изучения дисциплины перед студентами ставятся следующие задачи:
-освоение приемов исследования и решения математически формализованных задач;
-освоение приемов использования классического математического аппарата для решения прикладных задач ;
- выработка умения моделировать реальные объекты и процессы;
- развитие логического и алгоритмического мышление;
-повышение уровня математической культуры;
-развитие навыков самостоятельной работы.

1 Методические рекомендации по освоению дисциплины

В практике профессиональной подготовки используется лекционно-семинарская система, которая рассчитана на то, что студенты высшего образования уже имеют навыки учебной деятельности и способны к самостоятельному поиску и усвоению знаний. Основными формами организации обучения являются лекции, семинары, практические и лабораторные занятия, консультации, коллоквиумы, зачеты, экзамены.

Лекционно-семинарская система, с одной стороны, повышает эффективность обучения студентов, а с другой – обеспечивает преемственность между школой и системой высшего образования, между системой среднего профессионального и высшего образования.

1.1 Методические рекомендации к лекционным занятиям

Лекция. Лекция – это развернутое, продолжительное и системное изложение сущности какой-либо учебной, научной проблемы. Основа лекции – теоретическое обобщение, в котором конкретный фактический материал служит иллюстрацией или необходимым отправным моментом, это форма учебного занятия, цель которого состоит в рассмотрении теоретических вопросов излагаемой дисциплины в логически выдержанной форме.

В учебном процессе в зависимости от дидактических задач и логики учебного материала мы будем использовать вводные, текущие и обзорные лекции; в зависимости от деятельности студентов - информационные, объяснительные, лекции - беседы.

Лекционная форма целесообразна в процессе:

–изучения нового материала, мало связанного с ранее изученным;

–рассмотрения сложного для самостоятельного изучения материала;

–подачи информации крупными блоками;

–выполнения определенного вида заданий по одной или нескольким темам либо разделам;

–применения изученного материала при решении практических задач.

Вводная лекция открывает лекционный курс по предмету. На ней четко и ярко показываются теоретическое и прикладное значение предмета, его связь с другими предметами, роль в понимании мира, в подготовке бакалавра. Лекция данного типа призвана способствовать убедительной мотивации самостоятельной работы студентов.

Установочная лекция (применяется при заочной форме обучения) - знакомит студентов со структурой учебного материала, основными положениями курса, а также содержит программный материал, самостоятельное изучение которого представляет для студентов трудность (наиболее сложные, узловые вопросы). Установочная лекция должна детально знакомить с организацией самостоятельной работы, с особенностями выполнения контрольных заданий.

Текущая лекция служит для систематического изложения учебного материала предмета. Каждая такая лекция посвящена определенной теме и является в этом отношении законченной, но составляет с другими (предшествующей, последующей) определенную целостную систему. В ходе лекций большое значение уделяется вопросам подготовки к работе над лекционным материалом (его осмысление, ведение конспекта, работа с материалом учебника). На лекционных занятиях преподаватель не только сообщает или обобщает теоретические знания, но и учит студентов приемам конспектирования.

Заключительная лекция завершает изучение учебного материала. На ней обобщается изученное ранее на более высокой теоретической основе, рассматриваются перспективы развития математической науки.

Обзорная лекция содержит краткую и в значительной мере обобщенную информацию об определенных однородных (близких по содержанию) программных вопросах. Эти лекции используются на завершающих этапах обучения (например, перед экзаменами или при дистанционной и заочной формах обучения).

Приступая к изучению дисциплины, студенту необходимо ознакомиться с тематическим планом занятий, списком рекомендованной учебной и научной литературы. Следует уяснить последовательность выполнения индивидуальных учебных заданий, темы и сроки проведения семинаров, написания учебных и творческих работ, завести в свою рабочую тетрадь.

При изучении дисциплины студенты выполняют следующие задания: изучают рекомендованную учебную и научную литературу; пишут контрольные работы, готовят презентации и сообщения к практическим занятиям; выполняют самостоятельные творческие работы, участвуют в выполнении практических заданий. Уровень и глубина усвоения дисциплины зависят от активной и систематической работы в данных направлениях.

Общие и частные методические рекомендации по видам работ

Работа по материалам лекций

Вид работы Работа с книгой

Важно помнить, что рациональные навыки работы с книгой - это всегда большая экономия времени и сил. Поэтому при работе с книгой необходимо подобрать литературу, используя алфавитный и систематический каталоги, научиться правильно ее читать, вести записи.

Правильный подбор учебников рекомендуется преподавателем, читающим лекционный курс. Необходимая литература может быть также указана в методических разработках по данному курсу.

Изучая материал по учебнику, следует переходить к следующему вопросу только после правильного уяснения предыдущего, расписывая на бумаге все выкладки и вычисления (в том числе те, которые в учебнике опущены или на лекции даны для самостоятельного вывода).

Особое внимание следует обратить на определение основных понятий курса. Студент должен подробно разбирать примеры, которые поясняют такие определения, и уметь строить аналогичные примеры самостоятельно. Нужно добиваться точного представления о том, что изучаешь. Полезно составлять опорные конспекты. При изучении материала по учебнику полезно в тетради (на специально отведенных полях) дополнять конспект лекций. Там же следует отмечать вопросы, выделенные студентом для консультации с преподавателем.

Выводы, полученные в результате изучения, рекомендуется в конспекте выделять, чтобы они при прочитывании записей лучше запоминались.

Различают два вида чтения; первичное и вторичное. *Первичное* - это внимательное, неторопливое чтение, при котором можно остановиться на трудных местах. После него не должно остаться ни одного непонятного олова. Содержание не всегда может быть понятно после первичного чтения.

Задача *вторичного* чтения полное усвоение смысла целого (по счету это чтение может быть и не вторым, а третьим или четвертым).

Правила самостоятельной работы с литературой

Самостоятельное теоретическое исследование проблем, обозначенных преподавателем на лекциях – это важнейшее условие формирования у студента научного способа познания. Основные советы здесь можно свести к следующим:

– Составить перечень книг, с которыми Вам следует познакомиться; «не старайтесь запомнить все, что вам в ближайшее время не понадобится, – советует студенту и молодому ученому Г. Селье, – запомните только, где это можно отыскать»

– Перечень должен быть систематизированным (что необходимо для семинаров, что для экзаменов, что пригодится для написания исследовательских работ, а что Вас интересует за рамками официальной учебной деятельности, то есть что может расширить Вашу общую культуру...).

– Обязательно выписывать все выходные данные по каждой книге (при написании исследовательских работ это позволит очень сэкономить время).

– Разобраться для себя, какие книги (или какие главы книг) следует прочитать более внимательно, а какие – просто просмотреть.

– При составлении перечней литературы следует посоветоваться с преподавателями и научными руководителями (или даже с более подготовленными и эрудированными сокурсниками), которые помогут Вам лучше сориентироваться, на что стоит обратить большее внимание, а на что вообще не стоит тратить время.

– Естественно, все прочитанные книги, учебники и статьи следует конспектировать, но это не означает, что надо конспектировать «все подряд»: можно выписывать кратко основные идеи автора и иногда приводить наиболее яркие и показательные цитаты (с указанием страниц).

– Если Вы раньше мало работали с научной литературой, то следует выработать в себе способность «воспринимать» сложные тексты; для этого лучший прием – научиться «читать медленно», когда Вам понятно каждое прочитанное слово (а если слово незнакомое, то либо с помощью словаря, либо с помощью преподавателя обязательно его узнать);

– Есть еще один эффективный способ оптимизировать знакомство с научной литературой – следует увлечься какой-то идеей и все книги просматривать с точки зрения данной идеи.

Чтение научного текста является частью познавательной деятельности. Ее цель – извлечение из текста необходимой информации. От того на сколько осознанна читающим собственная внутренняя установка при обращении к печатному слову (найти нужные сведения, усвоить информацию полностью или частично, критически проанализировать материал и т.п.) во многом зависит эффективность осуществляемого действия.

Вид работы: **Подготовка конспекта**

Студент обязан вести конспект.

Конспект – краткое изложение или краткая запись чего-либо.

Хорошо составленный конспект помогает усвоить материал. В конспекте кратко излагается основная сущность учебного материала, приводятся необходимые обоснования, табличные данные, схемы, эскизы, расчеты и т.п. Конспект целесообразно составлять целиком на тему. При этом имеется возможность всегда дополнять составленный конспект из новых источников. Рекомендуется конспектировать определения, формулировки теорем, схемы их доказательств, формулы и решения задач. Формулы следует выписывать в специальные таблицы для каждой части (раздела) курса.

Постоянное пользование конспектом, в частности таблицами формул, способствует их запоминанию и дает возможность решать примеры и задачи, не обращаясь к учебным пособиям.

Таким образом, конспект становится сборником необходимых материалов, куда студент вносит всё новое, что он изучил, узнал. Такие конспекты представляют, большую ценность при подготовке к занятиям и зачету, экзамену.

Тезисы – это способ сокращения текста; положения, кратко излагающие какую-нибудь идею, или краткая формулировка принципиальных положений произведения, не включающая фактический материал.

Аннотация – краткое изложение содержания статьи, книги, рукописи и др. По структуре аннотация включает информационную и рекомендательную части. Развернутая аннотация должна включать общую характеристику книги или статьи с указанием основной идеи материала, его назначения, научной ценности, основных проблем, стиля изложения. В конце аннотации дается общая оценка.

Отзыв – выражение собственного отношения к прослушанному, прочитанному, просмотренному; эмоциональная оценка личного восприятия статьи, впечатления с обоснованием.

1.2 Методические рекомендации к практическим занятиям

Практические занятия относятся к основным видам учебных занятий. Они составляют важную часть профессиональной подготовки. Состав и содержание предлагаемых практических занятий направлено на реализацию требований ФГОС ВО по направлению подготовки 38.03.01

Экономика

В результате выполнения практических работ закрепляются полученные теоретические знания. Каждое практическое занятие включает разделы: цель занятия; знания и умения; теоретическую и практическую части; контрольные вопросы к занятию.

Занятие-практикум **(*лабораторная работа, практическое занятие*).** Основная его задача – приобретение умений и навыков практического использования изученного материала. Основной формой их проведения являются работы, на которых студенты самостоятельно упражняются в практическом применении усвоенных теоретических знаний и умений. Главное их отличие состоит в том, что на лабораторных работах доминирующей составляющей является процесс формирования экспериментальных умений, а на практических работах – конструктивных.

После усвоения лекционного материала он будет закрепляться на практических занятиях как в результате обсуждения и анализа лекционного материала, так и с помощью решения проблемных ситуаций, задач. При этих условиях студент не только хорошо усвоит материал, но и научится применять его на практике, а также получит дополнительный стимул (и это очень важно) для активной проработки лекции.

Решение задач надо начинать с наиболее простых, элементарных, а затем переходить к более сложным, обосновывать каждый этап решения, исходя из теоретических положений курса. Если студент видит несколько путей решения проблемы (задачи), то нужно сравнить их и выбрать самый рациональный. Полезно до начала решения составить краткий план решения проблемы (задачи). Решение следует доводить до окончательного результата, промежуточные преобразования, выкладки и рассуждения выполнять последовательно и аккуратно.

Следует отметить, что учебный эксперимент как метод самостоятельного приобретения знаний студентами, имеет сходство с научным экспериментом.

Основным способом организации деятельности студентов на практикумах является групповая форма работы. При этом каждая группа, из 3–5 человек выполняет, как правило, отличающуюся от других практическую или лабораторную работу.

Средством управления учебной деятельностью студентов является инструкция (методические указания), которая по определенным правилам последовательно устанавливает действия студента.

Иногда недостаточность усвоения того или иного вопроса выясняется только при изучении дальнейшего материала. В этом случае надо вернуться назад и повторить плохо усвоенный материал. Важный критерий усвоения теоретического материала - умение решать задачи или пройти тестирование по пройденному материалу.

Вид работы: Решение производственной ситуации

Этап решения ситуации строится в соответствии с примерным планом:

– практический анализ ситуации (действующие лица, обстоятельства), определение проблемы с примерами из задания, доказательствами из теоретического материала, обязательное использование профессиональных терминов. Если есть необходимость проанализировать ошибочные или правильные действия участников (обоснованная личная позиция приветствуется);

– определение проблемных узлов (возможные причины и прогнозируемые последствия развития ситуации);

– обоснованные теоретически и, желательно, подкрепленные практическими примерами предлагаемые варианты действий;

– прогноз вероятностного развития ситуации, обоснованный и доказательный;

– определение гипотезы,

– формулировка решения ситуации;

– формулировка итоговых выводов.

Семинар (от латинского seminarium «рассадник»; переноси «школа») – составная часть учебного процесса, групповая форма занятий при активном участии студентов, дополняющая лекции. Семинары способствуют углубленному изучению наиболее сложных проблем науки и служат формой подведения итогов самостоятельной работы студентов. На семинарах студенты учатся грамотно излагать проблемы, свободно высказывать свои мысли и суждения, рассматривают ситуации, способствующие развитию профессиональной компетентности. Семинары способствуют развитию познавательных и исследовательских умений, повышению культуры общения, т. е. развитию коммуникативных навыков.
Семинар организовывается:

– при изучении нового материала, когда он доступен для самостоятельного изучения;
– после проведения вводных, установочных и текущих лекций;
– при обобщении и систематизации знаний студентов по изучаемой теме;
– при проведении занятий, посвященных различным методам решения задач, выполнения заданий и упражнений.

Семинар проводится со всей группой. Преподаватель заблаговременно определяет тему, цель и задачи семинара, планирует его проведение, формулирует основные и дополнительные вопросы по теме, распределяет задания между студентами с учетом их индивидуальных особенностей и возможностей, подбирает литературу, проводит индивидуальные консультации, проверяет конспекты. Преподаватель дополняет сообщения студентов, отвечает на возникшие вопросы и дает оценку выступлениям. Подводя итог, отмечает положительное.

Подготовка к семинару зависит от формы, места проведения семинара, конкретных заданий и поручений. Это может быть написание доклада, реферата (с последующим их обсуждением), подготовка презентаций, коллоквиум.

Вид работы: Подготовка к семинару

Этапы подготовки к семинару:

– проанализируйте тему семинара, подумайте о цели и основных проблемах, вынесенных на обсуждение;
– внимательно прочитайте материал, данный преподавателем по этой теме на лекции;
– изучите рекомендованную литературу, делая при этом конспекты прочитанного или тезисы, которые понадобятся при обсуждении на семинаре;
– постарайтесь сформулировать свое мнение по каждому вопросу и аргументировано его обосновать;
– запишите возникшие во время самостоятельной работы с учебниками и научной литературой вопросы, чтобы затем на семинаре получить на них ответы.

1.3 Организация самостоятельной работы

Самостоятельная работа по дисциплине – это педагогически управляемый процесс самостоятельной деятельности студентов, обеспечивающий реализацию целей и задач по овладению необходимым объемом знаний, умений и навыков, опыта творческой работы и развитию профессиональных интеллектуально-волевых, нравственных качеств будущего бакалавра. Выделяют два вида самостоятельной работы:

– аудиторная работа, выполняется на занятиях под руководством преподавателя и по его заданию;
– внеаудиторная, выполняется студентом по заданию преподавателя, но без его непосредственного участия.

Основные виды аудиторной самостоятельной работы студентов при изучении дисциплины:

– формулировка вопросов студентам, преподавателю;

- выполнение письменных заданий, тестирование;
- выступление с сообщением по новому материалу;
- конспектирование, работа с книгой;
- выполнение самостоятельных работ.

Основные виды внеаудиторной самостоятельной работы студентов при изучении дисциплины:

- работа с учебником;
- конспектирование отдельного вопроса пройденной темы;
- работа со справочной литературой;
- подготовка рефератов и презентаций по темам;
- составление кроссвордов;
- использование Интернета,
- выполнение контрольных работ.

Повышение роли самостоятельной работы студентов при проведении различных видов учебных занятий предполагает оптимизацию методов обучения, внедрение в учебный процесс новых технологий обучения, повышающих производительность труда преподавателя, активное использование информационных технологий, позволяющих студенту в удобное для него время осваивать учебный материал; совершенствование методики проведения практик и научно - исследовательской работы студентов, поскольку именно эти виды учебной работы студентов в первую очередь готовят их к самостоятельному выполнению профессиональных задач; использование знаний, умений и навыков в системе курсового и дипломного проектирования по дисциплинам профессионального направления, которая должна повышать роль студента в подборе материала, поиске путей решения задач.

Для успешной организации самостоятельной работы все активнее применяются разнообразные образовательные ресурсы в сети Интернет: системы тестирования по различным областям, виртуальные лекции, лаборатории. Студент может получать все задания и методические указания через электронную почту, что дает ему возможность привести в соответствие личные возможности с необходимыми для выполнения работ трудозатратами. Студент имеет возможность выполнять работу дома или в аудитории.

Основной формой контроля самостоятельной работы студента являются практические задания, защита презентаций и рефератов на занятиях. Массовой формой контроля являются зачеты, экзамены.

Большое образовательное значение в самостоятельном учебном труде студента имеет самоконтроль. Самоконтроль возбуждает и поддерживает внимание и интерес, повышает активность памяти и мышления, позволяет студенту своевременно обнаружить и устранить допущенные ошибки и недостатки, объективно определить уровень своих знаний, практических умений.

Самое доступное и простое средство самоконтроля с применением информационно-коммуникационных технологий - это ряд тестов, которые позволяют определить свой уровень владения предметным материалом, выявить свои ошибки и получить рекомендации по самосовершенствованию.

Критериями оценки результатов внеаудиторной самостоятельной работы студента являются:

- уровень освоения учебного материала;
- умение использовать теоретические знания и умения при выполнении практических задач;
- уровень сформированности общих и профессиональных компетенций.

Памятка педагогу по организации самостоятельной работы студентов

1. Самостоятельную работу необходимо организовывать во всех звеньях учебного процесса, в том числе и в процессе усвоения нового материала.
2. Студентов необходимо ставить в активную позицию, делать их непосредственными

участниками процесса познания.

3. Организация самостоятельной работы должна способствовать развитию мотивации учения.

4. Самостоятельная работа должна носить целенаправленный характер, быть четко сформулированной.

5. Содержание самостоятельной работы должно обеспечивать полный и глубокий комплекс заданий.

6. В ходе самостоятельной работы необходимо обеспечить сочетание репродуктивной и продуктивной учебной деятельности.

7. При организации самостоятельной работы необходимо предусмотреть адекватную обратную связь, т.е. правильно организовать систему контроля.

Рекомендации для студентов

Методика изучения материала (на что необходимо обращать внимание при изучении материала):

1. Первичное чтение одного параграфа темы;
2. Повторное чтение этого же параграфа темы с фиксированием наиболее значительных по содержанию частей;
3. Проработка материала данного параграфа (знать термины и определения);
4. После такого прохождения всех параграфов одной темы, повторное (третий раз) чтение параграфов этой темы с фиксированием наиболее значительных по содержанию частей;
5. Прохождение тренировочных упражнений по теме;
6. Прохождение тестовых упражнений по теме;
7. Возврат к параграфам данной темы для разбора тех моментов, которые были определены как сложные при прохождении тренировочных и тестовых упражнений по теме;
8. После прохождения всех тем раздела, закрепление пройденного материала на основе решения задач.

Критерии оценки ответов:

Оценка «5» (отлично) выставляется в случае полного рассмотрения вопроса, аргументированного выражения своей позиции, отсутствия ошибок, грамотного текста, точность формулировок и т.д.;

Оценка «4» (хорошо) выставляется в случае полного выполнения всего объема работ при наличии несущественных ошибок, не повлиявших на общий результат работы;

Оценка «3» (удовлетворительно) выставляется в случае недостаточно полного рассмотрения проблемы, при наличии ошибок, которые не оказали существенного влияния на окончательный результат;

Оценка «2» (неудовлетворительно) выставляется в случае, если тема не раскрыта, работа выполнена крайне небрежно и т.д.

Вид работы: Самостоятельная работа студентов при решении задач

В процессе изучения математики наряду с некоторыми теоретическими сведениями студенты овладевают и закрепляют способы решения задач. Преподаватель раскрывает перед студентами технологию решения задачи, показывает, чем мотивировано применение некоторого метода решения, чем обусловлен выбор того или иного пути.

Работа над задачей тоже может быть полностью самостоятельной работой студентов. Она преследует несколько целей:

- продолжить формирование умений самостоятельно изучать текст, который в данном случае представляет собой задачу;
- обучить рассуждениям;
- обучить оформлению решения задач. К тому же студенты будут знать, что у них имеется образец рассуждений и оформления задачи, к которому они могут обратиться при

решении другой задачи или при проверке правильности своего решения.

Непременным условием усвоения новых теоретических сведений и овладения новыми приемами решения задач является выполнение студентами тренировочных упражнений. А подготовка студентов к творческому труду и самостоятельному пополнению знаний имеет самостоятельное выполнение заданий. В этом случае студент без помощи должен наметить пути решения, правильно выполнить все построения, преобразования, вычисления и т. п. В таком случае мысль студента работает наиболее интенсивно. Он приобретает практический навык работы в ситуации, с которой ему неоднократно придется сталкиваться в последующей трудовой деятельности.

Форма контроля и критерии оценки

«Отлично» - задачи решены верно, все действия записаны точно, без помарок.
«Хорошо» - задачи решены верно, в действиях допущены неточности.
«Удовлетворительно» - задачи решены с ошибками и помарками.
«Неудовлетворительно» - задачи решены с ошибками, ответ не получен.

Вид работы: Написать реферат на определенную тему

Реферат как форма самостоятельной учебной деятельности студентов в вузе — это рассуждение на определенную тему на основе обзора литературы (нескольких источников информации), доказательство или опровержение какой-то главной мысли (тезиса), в котором информация нескольких источников используется для аргументации, иллюстрации и т. д. (объем — 10 – 15 страниц).

Цель реферата – приобретение студентом необходимой профессиональной подготовки, развитие умения и навыков самостоятельного научного поиска: изучения литературы по выбранной теме, анализа различных источников и точек зрения, обобщения материала, выделения главного, формулирования выводов. С помощью рефератов студент глубже постигает наиболее сложные проблемы курса, учится лаконично излагать свои мысли, докладывать результаты своего труда и последующего письменного оформления текста.

Изложение материала носит проблемно-тематический характер, показываются различные точки зрения, а также собственные взгляды на проблему. Содержание реферата должно быть логичным.

Перед началом работы над рефератом следует наметить план и подобрать литературу. Прежде всего, следует пользоваться литературой, рекомендованной учебной программой, а затем расширить список источников, включая и использование специальных журналов, где имеется новейшая научная информация.

Задачи реферата: научить студента подбирать список источников, необходимый для осмысления изучаемого вопроса; составлять логически обоснованный план, соответствующий цели и задачам; грамотно и логично излагать основные идеи по заданной теме, делать выводы.
Структура реферата и требования к его элементам:

1. Титульный лист.
2. План.
3. Введение.
4. Основная часть.
5. Заключение.
6. Список используемых источников.
7. Приложение (по необходимости).

Реферат оформляется в соответствии с требованиями к оформлению научных работ.

Основная часть реферата содержит материал, который отобран студентом для рассмотрения проблемы. Материал должен быть обоснованно распределён по разделам. В подаче материала должна соблюдаться логика изложения. Основная часть реферата, помимо почерпнутого из разных источников содержания, также должна включать в себя собственное мнение студента и сформулированные самостоятельные выводы, опирающиеся на приведенные факты. Объём основной части реферата должен составлять 7 – 9 страниц текста.

В заключении формируются выводы, оценки, предложения.

Темы рефератов охватывают дискуссионные вопросы курса. Они призваны отражать передовые научные идеи, обобщать тенденции практической деятельности. Рекомендованная ниже тематика рефератов примерная.

1. Математика и экономика.
2. Использование математических методов в различных отраслях производства.
3. Золотое сечение.
4. Число π .
5. Экспонента и сложные проценты.
6. Жизнь и творчество Эйлера.
7. Звездчатые многогранники. Кристаллы-природные многогранники.
8. Модели многогранников.
9. Теории управления процессами принятия решений.
10. Математические иллюзии

Студент при желании может сам предложить ту или иную тему, предварительно согласовав ее с научным руководителем.

Объем реферата - от 10 до 15 машинописных страниц. В списке литературы должно быть не менее 8–10 различных источников. Допускается включение таблиц, графиков, схем, как в основном тексте, так и в качестве приложений.

Этапы подготовки реферата:

1. выбор темы;
2. подбор учебной, научной и специальной литературы и иных источников изучение;
3. составление плана;
4. написание текста работы и ее оформление;
5. устное изложение реферата, возможно с презентацией.

Процесс написания реферат включает:

1. Прочитайте текст.
2. Составьте его развернутый план.
3. Подумайте, какие части можно сократить так, чтобы содержание было понято правильно и, главное, не исчезло.
4. Объедините близкие по смыслу части.
5. В каждой части выделите главное и второстепенное, которое может быть сокращено при конспектировании.
6. При записи старайтесь сложные предложения заменить простыми.

Тематическое и смысловое единство сообщения выражается в том, что все его компоненты связаны с темой первоисточника. Строго следите за точностью своих выражений и правильностью употребления терминов.

Содержание реферата студент докладывает на семинаре, научной конференции.

Рефераты могут быть представлены на теоретических занятиях в виде выступлений.

Предварительно подготовив тезисы доклада, студент в течение 5-7 минут должен кратко сообщить характеризующие задачи работы, ее актуальность, полученные результаты, вывод и предложения. Прежде чем отвечать на дополнительный вопрос, необходимо сначала правильно его понять. При ответе следует соблюдать принцип экономности мышления, а не высказывать без разбора все, что Вы можете сказать.

После доклада автор отвечает на вопросы, затем выступают оппоненты, которые заранее познакомились с текстом реферата, и отмечают его сильные и слабые стороны. На основе обсуждения, студенту выставляется соответствующая оценка.

Будьте доброжелательны и тактичны.

Критерии оценки реферата:

«Отлично» выставляется если выполнено соответствие теме; глубина проработки материала; правильность и полнота использования источников; отражена точка зрении автора на рассматриваемую проблему, владение терминологией и культурой речи; оформление реферата. При защите реферата студент продемонстрировал отличное знание материала работы приводил соответствующие доводы, давал полные развернутые ответы на вопросы и аргументировал их.

«Хорошо» выставляется если выполнено соответствие теме, текст напечатан аккуратно, встречаются небольшие опечатки, полностью раскрыта тема реферата, отражена точка зрения автора на рассматриваемую проблему. При защите реферата студент продемонстрировал хорошее знание материала работы, приводил соответствующие доводы, но не смог дать полные развернутые ответы на вопросы и привести соответствующие аргументы.

«Удовлетворительно» - в случае, когда объем реферата составляет менее 8 страниц, текст напечатан неаккуратно, много опечаток, тема реферата раскрыта не полностью, не отражена точка зрения автора на рассматриваемую проблему, реферат написан с ошибками. При защите реферата студент продемонстрировал слабое знание материала работы, не смог привести соответствующие доводы и аргументировать на свои ответы.

«Неудовлетворительно» - в случае, когда объем реферата составляет менее 5страниц, текст напечатан неаккуратно, много опечаток, тема реферата не раскрыта, не отражена точка зрения автора на рассматриваемую проблему, много ошибок в построении предложений. При защите реферата студент продемонстрировал слабое знание материала работы, не смог раскрыть тему не отвечал на вопросы.

Вид работы: Подготовка доклада

Доклад – это устное выступление на заданную тему на 5-15 минут.

Цели доклада:

1. Научиться убедительно и кратко излагать свои мысли в устной форме. Эффективно продавать свой интеллектуальный продукт.

2. Донести информацию до слушателя, установить контакт с аудиторией и получить обратную связь.

Важно при подготовке доклада учитывать три его фазы: мотивацию, убеждение, побуждение.

В первой фазе доклада рекомендуется использовать:

- риторические вопросы;
- актуальные местные события;
- личные происшествия;
- истории, вызывающие шок;
- цитаты, пословицы;
- возбуждение воображения;
- оптический или акустический эффект;
- неожиданное для слушателей начало доклада.

Как правило, используется один из перечисленных приёмов. Главная цель фазы открытия (мотивации) – привлечь внимание слушателей к докладчику, поэтому длительность её минимальна.

Ядром хорошего доклада является информация. Она должна быть новой и понятной. Важно в процессе доклада не только сообщить информацию, но и убедить слушателей в правильности своей точки зрения. Для убеждения следует использовать:

сообщение о себе кто? обоснование необходимости доклада почему? доказательство, кто? когда? где? сколько? пример берём пример с…. сравнение — это так же, как… проблемы что мешает?

Третья фаза доклада должна способствовать положительной реакции слушателей. В заключении могут быть использованы: обобщение; прогноз; цитата; пожелания; объявление о продолжении дискуссии; просьба о предложениях по улучшению; благодарность за внимание.

Средства достижения воздействия

Язык доклада. Короткие предложения. Выделение главных предложений. Выбор слов. Иностранные слова и сокращения. Образность языка. Голос Выразительность. Вариации громкости. Темп речи. Внешнее общение Зрительный контакт. Обратная связь. Доверительность. Жестикуляция.

Примерные темы докладов, рекомендуемых при изучении дисциплины «Линейная алгебра»

Динамическая модель планирования.

Линейная модель обмена (модель международной торговли).

Экстремум в задачах линейного программирования.

Пример задачи линейного программирования.

Формы контроля и критерии оценок

«Отлично» выставляется в случае, когда объем доклада составляет 5-6 страниц, полностью раскрыта тема доклада, информация взята из нескольких источников, доклад написан грамотно, без ошибок. При защите доклада студент продемонстрировал отличное знание материала работы, приводил соответствующие доводы, давал полные развернутые ответы на вопросы и аргументировал их.

«Хорошо» выставляется в случае, когда объем доклада составляет 4-5 страниц, текст напечатан аккуратно, в соответствии с требованиями, встречаются небольшие опечатки, полностью раскрыта тема доклада, информация взята из нескольких источников, реферат написан грамотно. При защите доклада студент продемонстрировал хорошее знание материала работы, приводил соответствующие доводы, но не смог дать полные развернутые ответы на вопросы и привести соответствующие аргументы.

«Удовлетворительно» - в случае, когда объем доклада составляет менее 4 страниц, текст напечатан неаккуратно, много опечаток, тема доклада раскрыта не полностью, информация взята из одного источника, реферат написан с ошибками. При защите доклада студент продемонстрировал слабое знание материала работы, не смог привести соответствующие доводы и аргументировать сои ответы.

«Неудовлетворительно» - в случае, когда объем доклада составляет менее 4 страниц, текст напечатан неаккуратно, много опечаток, тема доклада не раскрыта, информация взята из 1 источника, много ошибок в построении предложений. При защите доклада студент продемонстрировал слабое знание материала работы, не смог раскрыть тему не отвечал на вопросы.

Вид работы: Подготовить презентацию на тему. Рекомендации по дизайну презентации

Оформление и демонстрация каждого типа информации подчиняется определенным правилам. Так, например, для текстовой информации важен выбор шрифта, для графической – яркость и насыщенность цвета, для наилучшего их совместного восприятия необходимо оптимальное взаиморасположение на слайде.

Графическая информация рисунки, фотографии, диаграммы призваны дополнить текстовую информацию или передать ее в более наглядном виде;

желательно избегать в презентации рисунков, не несущих смысловой нагрузки, если они не являются частью стилевого оформления;

цвет графических изображений не должен резко контрастировать с общим стилевым оформлением слайда;

иллюстрации рекомендуется сопровождать пояснительным текстом;

если графическое изображение используется в качестве фона, то текст на этом фоне должен быть хорошо читаем.

Оформление слайдов	
Содержание и	информационных блоков не должно быть слишком много (3-6);

расположение информационных блоков на слайде	рекомендуемый размер одного информационного блока — не более 1/2 размера слайда; желательно присутствие на странице блоков с разнотипной информацией (текст, графики, диаграммы, таблицы, рисунки), дополняющей друг друга; логика предъявления информации на слайдах и в презентации должна соответствовать логике ее изложения.
Стиль	необходимо соблюдать единый стиль оформления; нужно избегать стилей, которые будут отвлекать от самой презентации; вспомогательная информация (управляющие кнопки) не должны преобладать над основной информацией (текст, рисунки)
Фон	для фона выбираются более холодные тона (синий или зеленый)
Использование цвета	на одном слайде рекомендуется использовать не более трех цветов: один для фона, один для заголовков, один для текста; для фона и текста используются контрастные цвета; особое внимание следует обратить на цвет гиперссылок (до и после использования); Черный цвет имеет негативный (мрачный) подтекст. Белый текст на черном фоне читается плохо (инверсия плохо читается).
Анимационные эффекты	Анимационные эффекты используются для привлечения внимания слушателей или для демонстрации динамики развития какого-либо процесса; не стоит злоупотреблять различными анимационными эффектами; анимационные эффекты не должны отвлекать внимание от содержания информации на слайде
Представление информации	
Содержание информации	в тексте ни в коем случае не должно содержаться орфографических ошибок; следует использовать короткие слова и предложения; времена глаголов должно быть везде одинаковым; следует использовать минимум предлогов, наречий, прилагательных; заголовки должны привлекать внимание аудитории
Расположение информации на странице	предпочтительно горизонтальное расположение информации; наиболее важная информация должна располагаться в центре экрана; если на слайде располагается картинка, надпись должна располагаться под ней; информационные блоки лучше располагать горизонтально, связанные по смыслу блоки — слева направо;
Шрифты	для заголовков не менее 32 и можно использовать декоративный шрифт; для остальной информации не менее 24; шрифты без засечек (Arial, Tahoma, Verdana), легче читать с большого расстояния; нельзя смешивать разные типы шрифтов в одной презентации; для выделения информации (ключевые слова) следует использовать жирный шрифт, курсив или подчеркивание того же типа; нельзя злоупотреблять прописными буквами (они читаются хуже, чем строчные).
Способы выделения	Следует использовать:

информации	рамки, границы, заливку разные цвета шрифтов, штриховку, стрелки рисунки, диаграммы, схемы для иллюстрации наиболее важных фактов
Объем информации	не стоит заполнять один слайд слишком большим объемом информации: люди могут единовременно запомнить не более трех фактов, выводов, определений; наибольшая эффективность достигается тогда, когда ключевые пункты отражаются по одному на каждом отдельном слайде.
Виды слайдов	Для обеспечения разнообразия следует использовать разные виды слайдов: с текстом, с таблицами, с диаграммами.
Звук	Звуковое сопровождение должно отражать суть или подчеркивать особенность темы слайда, презентации; необходимо выбрать оптимальную громкость, чтобы звук был слышен всем слушателям, но не был оглушительным (должна не отвлекать внимание слушателей и не заглушать слова докладчика);

После создания презентации и ее оформления, необходимо отрепетировать ее показ и свое выступление, проверить, как будет выглядеть презентация в целом (на экране компьютера или проекционном экране), насколько скоро и адекватно она воспринимается из разных мест аудитории, при разном освещении, шумовом сопровождении, в обстановке, максимально приближенной к реальным условиям выступления.

Рекомендации к содержанию презентации

По содержанию. На слайдах презентации не пишется весь тот текст, который произносит докладчик (во-первых, в этом случае сам факт произнесения доклада теряет смысл, так как аудитория обычно умеет читать, а во-вторых, длинный текст на слайде плохо воспринимается и только мешает слушанию и пониманию смысла).

Текст на слайде должен содержать только ключевые фразы (слова), которые докладчик развивает и комментирует устно.

Если презентация является основой устного доклада, то второй слайд должен содержать краткое перечисление всех основных вопросов, которые будут рассмотрены в докладе. Это дисциплинирует докладчика, концентрирует внимание слушателей, а, кроме того, во время создания такого слайда от автора требуется очень четко выделить и сформулировать ключевые проблемы доклада.

Если презентация имеет характер игры, викторины, или какой-либо другой, который требует активного участия аудитории, то на каждом слайде должен быть текст только одного шага, или эти «шаги» должны появляться на экране постепенно.

По оформлению. На первом слайде пишется не только название презентации, но и имена авторов, и дата создания.

Каждая прямая цитата, которую комментирует или даже приводит докладчик размещается на отдельном слайде, обязательно с полной подписью автора (имя и фамилия, инициалы и фамилия, но ни в коем случае – одна фамилия, исключение – псевдонимы). Допустимый вариант – две небольшие цитаты на одну тему на одном слайде, но не больше.
Все схемы и графики должны иметь названия, отражающие их содержание.

На каждом слайде выставляется колонтитул, включающий фамилию автора и/или краткое название презентации и год создания, номер слайда.

В конце презентации представляется список использованных источников, оформленный по правилам библиографического описания.

Правила хорошего тона требуют, чтобы последний слайд содержал выражение благодарности тем, кто прямо или косвенно помогал в работе над презентацией.
Кино и видеоматериалы оформляются титрами, в которых указываются: название фильма (репортажа), год и место выпуска, авторы идеи и сценария, руководитель проекта. Для правильной работы презентации все вложенные файлы (документы, видео, звук и пр.) размещайте в ту же папку, что и презентацию.

Форма контроля и критерии оценки

Презентацию необходимо предоставить преподавателю для проверки в электронном виде.

«Отлично» выставляется в случае, если презентация выполнена аккуратно, примеры проиллюстрированы, полностью освещены все обозначенные вопросы.

«Хорошо» выставляется в случае, если работа содержит небольшие неточности «Удовлетворительно» - в случае, если презентация выполнена неаккуратно, не полностью освещены заданные вопросы.

«Неудовлетворительно» - работа выполнена небрежно, не соблюдена структура, отсутствуют иллюстрации.

Примерные темы презентаций, рекомендуемых при изучении дисциплины «Линейная алгебра»

«Здоровый образ жизни. Задача о диете»

«Матричный метод на рынке ценных бумаг»

«Анализ деятельности предприятия и матрицы»

«Экономико – математические методы как средство повышения прибыли предприятия»

Вид работы: **Составить кроссворд по теме**

1.Составьте словник, то есть список (перечень) слов, которые должны войти в кроссворд.

2.Для этого найдите в своем конспекте основные понятия и подчеркните их.

3.Выпишите эти понятия на отдельный лист, желательно в клетку.

4.Подчеркните в них одинаковые повторяющиеся буквы.

5.Расположите слова так, чтобы повторяющееся буквы одновременно использовались в словах, написанных по вертикали и по горизонтали.

6.Пронумеруйте слова.

7.В соответствии с номерами выпишите определения понятий.

8.Начертите сетку кроссворда (количество клеток должно соответствовать количеству букв в слове).

9.Разметьте сетку кроссворда цифрами (номерами понятий).

10.Оформите кроссворд. Подпишите его.

11.Слова-задания – это существительные в единственном числе, именительном падеже.

12.Слов должно быть достаточно много (как правило, более 20), чтобы как можно полнее охватить всю тему (допустимо использование терминов из других тем и разделов, логически связанных с изучаемой темой).

Оформление кроссворда состоит из трех частей: заданий, кроссворда с решением, того же кроссворда без решения.

1. В общем случае определение должно состоять из одного предложения.
2. Определения должны быть по во возможности краткими. Следует избегать перечислений, не злоупотреблять причастными и деепричастными оборотами, не перегружать текст прилагательными. Определение кроссворда - своего рода компромисс между краткостью и содержательностью.
3. Запрещается использование в одной сетке двух и более одинаковых слов, даже с различными определениями.
4. В вопросах следует избегать энциклопедических определений. В целом работа должна быть авторской, а не перепечаткой статей из словаря.
5. Нежелательно начинать формулировку вопроса с цифры, глагола, деепричастия.
6. Запрещается использование однокоренных слов в вопросах и ответах.
7. В работе должна быть изюминка, то есть нечто, отличающее ее от миллионов других.
8. Запрещается помещать слова без пересечений.
9. Не используются слова, которые пишутся через тире и имеющие уменьшительно-ласкательную окраску.

Форма контроля и критерии оценки: смысловое содержание; грамотность; выполнение правил составления кроссвордов; эстетичность.

Критерии оценки:

Оценка «5» (отлично) выставляется в случае полного выполнения работы, отсутствия ошибок, грамотного текста, точность формулировок и т.д.;

Оценка «4» (хорошо) выставляется в случае полного выполнения всего объема работ при наличии ошибок, не повлиявших на общий результат работы;

Оценка «3» (удовлетворительно) выставляется в случае недостаточно полного выполнения всех разделов работы, при наличии ошибок, которые не оказали существенного влияния на окончательный результат, при очень ограниченном объеме используемых понятий и т.д.;

Оценка «2» (неудовлетворительно) выставляется в случае, если допущены принципиальные ошибки, работа выполнена крайне небрежно и т.д.

Методические указания к контрольной работе (см. методические указания к контрольной работе для заочной формы обучения)

Методические указания по выполнению исследовательской работы

Цель и порядок выполнения исследовательской работы

Выполнение исследовательской работы должно способствовать более глубокому изучению соответствующей дисциплины, развитию у студентов навыков научно-исследовательской работы, самостоятельного мышления, умения письменного изложения логики исследования вопроса. Студент должен научиться в процессе пользоваться общенаучной специальной литературой, критически оценивать мысли авторов, грамотно логично излагать результаты, выводы, обобщения, точно выражать собственные идеи и предложения, применяя при этом творческий подход, нестандартность мышления, научную любознательность, умение литературным и грамотным языком изложить на бумаге свои мысли. Полная самостоятельность студенту дана в подборе научной литературы, публикаций в периодических изданиях, информации в сети Интернет.

Студент может предложить собственную тему исследования, с последующим согласованием его с руководителем работы. Исследовательская работа может отражать современные процессы и быть направлена на конкретный объект исследования, будь то банк, акционерное общество или малое предприятие, но обязательно с показом использования математических методов в будущей профессиональной деятельности. Данные исследования могут быть использованы в дипломном проектировании. Важна возможность получения статистических данных о функционировании выбранного объекта исследования.

Исследовательская работа является результатом самостоятельной разработки студентом конкретных актуальных современных проблем, представляющих практическую значимость. Для ее написания необходимо привлекать как теоретические, так и фактические материалы, которые следует тщательно анализировать для последующего формирования предложений и рекомендаций.

Теоретический обзор проблемы. В данном разделе дается краткий анализ различных теоретических концепций, связанных с темой исследования. При этом данный анализ должен носить объективный характер, то есть должна быть дана как позитивная характеристика той или иной концепции, так и ее недостатки, дается их оценка.

Аналитический раздел. В этом разделе излагаются практические аспекты рассматриваемой проблемы на конкретном примере или используются собственные опытные данные.

Аналитический раздел должен заканчиваться выводами, в которых обобщено исследование данной темы, отражены недостатки, выявлены проблемы, требующие дальнейшего разрешения.

На протяжении всего исследования студент может получать от руководителя необходимые консультации по всем вопросам исследуемой темы.

Форма защиты исследовательской работы определяется научным руководителем. Это может быть собеседование или публичная защита в виде выступления на 5–10 минут и ответов на вопросы в группе из 3 и более человек.

Примерные групповые и/или индивидуальные творческие задания/проекты

1 Модель Леонтьева. Продуктивные модели Леонтьева.
2 Применение модели Леонтьева.
3 Динамическая модель планирования
4 Линейная модель обмена (модель международной торговли)
6 Экстремум в задачах линейного программирования
6 Пример задачи линейного программирования

Оценка работы производится по следующим критериям:

а) глубина и полнота раскрытия темы;
б) логика изложения представленного материала;
в) формирование собственных взглядов и разработка предложений по данным вопросам.

Вид работы: Консультация (урок-консультация).

На занятиях данного вида проводится целенаправленная работа не только по ликвидации пробелов в знаниях студентов, обобщению и систематизации программного материала, но и по развитию их умений. В зависимости от содержания и назначения выделяют тематические и целевые консультации.

Тематические консультации проводятся по каждой теме, по наиболее значимым или сложным вопросам программного материала. Целевые консультации входят в систему подготовки, проведения и подведения итогов самостоятельных и контрольных работ, зачетов, экзаменов. Это работа над ошибками, анализ результатов контрольной работы или зачета и т. д.

На консультации сочетаются различные формы работы со студентами: общегрупповые, групповые и индивидуальные.

К консультации подготавливаются и преподаватели, и студенты.

Накануне консультации можно предложить студентам домашнее задание: подготовить по изучаемой теме вопросы и задания, с которыми они не могут справиться. Преподаватель обобщает некоторые вопросы, отбирает наиболее значимые, перенося оставшиеся на другие занятия.

1.4 Формы контроля

Вид работы. Рубежный контроль (для очной форм обучения)

Целью проведения рубежного контроля является промежуточная оценка результатов изучения тем и разделов дисциплины.

Критерием положительной оценки рубежного контроля является усвоение студентами 60% изученного материала.

Методы проведения рубежного контроля выбирает преподаватель, оповещая студентов предварительно.

Вопросы рубежного контроля

1. Привести определение матрицы.
2. Перечислить вид матриц.
3. Сформулировать арифметические операции над матрицами.

4. Транспонирование матрицы.
5. Привести свойства транспонирования.
6. Сформулировать понятие определителя квадратной матрицы любого порядка.
7. Перечислить свойства определителей.
8. Как найти величину определителя второго порядка.
9. Метод треугольника для вычисления определителя третьего порядка.
10. Метод Саррюса.
11. Дать определения минора и алгебраического дополнения.
12. Метод разложения определителя по элементам строки (столбца)
13. Дать определение обратной матрицы.
14. Привести свойства обратной матрицы.
15. Элементарные преобразования матрицы.
16. Ранга матрицы.

Вопросы для самостоятельного изучения

1. Метод эффективного понижения порядка определителя.

Вопросы рубежного контроля

1. Привести определение системы линейных уравнений.
2. Определение совместных, несовместных, определенных и неопределенных систем уравнений.
3. Формулы Крамера.
4. Решения систем линейных уравнений методом Гаусса.
5. Суть матричной записи систем линейных уравнений.
6. Метод решения систем линейных уравнений с помощью обратной матрицы.
7. Сформулировать условия совместности систем линейных уравнений.
8. Базисные решения системы линейных уравнений.
9. Модель Леонтьева многоотраслевой экономики.
10. Дать определение линейного векторного пространства,
11. Определение n –мерного вектора.
12. Перечислить операции над n –мерными векторами.
13. Теоремы о линейной зависимости векторов.
14. Сформулируйте определение размерности и базиса векторного пространства.
15. Разложение произвольного вектора линейного пространства по базису.
16. Переход от одного базиса векторного пространства к другому.
17. Матрица перехода.

Вопросы для самостоятельного изучения

1. Однородные системы линейных уравнений.
2. Применение аппарата линейной алгебры для анализа балансовых моделей.

Вид работы: *Зачет* (*урок-зачет*).

Основная его цель – диагностика уровня усвоения знаний и умений каждым студентом на определенном этапе обучения. Положительная оценка за зачет ставится, если студент справился со всеми заданиями, соответствующими уровню обязательной подготовки по изученному предмету. Если хотя бы одно из таких заданий осталось невыполненным, то, как правило, положительная оценка не выставляется. В этом случае зачет подлежит пересдаче, причем студент может пересдать не весь зачет целиком, а только те виды заданий, с которыми он не справился.

Студентам предварительно сообщают примерный перечень заданий, выносимых на зачет, т.е. получаем открытый зачет.

Вид работы: ***Экзамен***

Изучение дисциплин завершается экзаменом. Экзамен является заключительным этапом процесса формирования компетенции студента при изучении дисциплины или ее части и имеет целью проверку и оценку знаний студентов по теории и применению полученных знаний, умений и навыков при решении практических задач.

Экзамены проводятся по расписанию, сформированному учебным отделом и утвержденному проректором по учебной работе, в сроки, предусмотренные календарным графиком учебного процесса. Расписание экзаменов доводится до сведения студентов не менее чем за две недели до начала экзаменационной сессии.

Экзамены принимаются преподавателями, ведущими лекционные занятия.

Экзамены проводятся в устной форме, в форме тестирования. Экзамен проводится только при предъявлении студентом зачетной книжки и при условии выполнения всех контрольных мероприятий, предусмотренных учебным планом и рабочей программой по изучаемой дисциплине (сведения фиксируются допуском в ведомости). При устном экзамене, студентам на экзамене предоставляется право выбрать один из билетов. Время подготовки к ответу составляет 30 минут. По истечении установленного времени студент должен ответить на вопросы экзаменационного билета.

Подготовка к экзамену способствует закреплению, углублению и обобщению знаний, получаемых, в процессе обучения, а также применению их к решению практических задач. Готовясь к экзамену, студент ликвидирует имеющиеся пробелы в знаниях, углубляет, систематизирует и упорядочивает свои знания. На экзамене студент демонстрирует то, что он приобрел в процессе обучения по конкретной учебной дисциплине.

На консультации перед экзаменом студентов познакомят с основными требованиями, ответят на возникшие у них вопросы. Поэтому посещение консультаций обязательно.

Требования к организации подготовки к экзаменам: важно соблюдать режим дня; наличие хороших собственных конспектов лекций; хороший учебник или конспект литературы, прочитанной по указанию преподавателя в течение семестра. Здесь можно эффективно использовать листы опорных сигналов.

Вначале следует просмотреть весь материал по дисциплине, отметить для себя трудные вопросы. Обязательно в них разобраться. В заключение еще раз целесообразно повторить основные положения, используя при этом листы опорных сигналов.

Систематическая подготовка к занятиям в течение семестра позволит использовать время экзаменационной сессии для систематизации знаний.

Правила подготовки к зачетам и экзаменам:

– обязательно расположить весь материал согласно экзаменационным вопросам (или вопросам, обсуждаемым на семинарах;

– переосмысление материала, и даже рассмотрение альтернативных идей;

– готовить «шпаргалки» полезно, но пользоваться ими рискованно. Главный смысл подготовки «шпаргалок» – это систематизация и оптимизация знаний по данному предмету – это очень сложная и важная для студента работа, так как у него сформирована общая ориентировка в сложном материале.

– сначала студент должен продемонстрировать, что он «усвоил» все, что требуется по программе обучения, и лишь после этого он вправе высказать иные, желательно аргументированные точки зрения.

Результаты экзамена оцениваются по четырех балльной системе («отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно») и заносятся в экзаменационную ведомость и зачетную книжку. В зачетную книжку заносятся только положительные оценки.

В случае неявки студента на экзамен в экзаменационной ведомости делается отметка «не явился».

1.5 Информационные технологии, используемые при осуществлении образовательного процесса по дисциплине

Информационные технологии, используемые при осуществлении образовательного процесса по дисциплине, включают:

- технические средства: компьютерная техника и средства связи (персональные компьютеры, проектор, акустическая система);
- методы обучения с использованием информационных технологий (компьютерное тестирование, демонстрация мультимедийных материалов, компьютерный лабораторный практикум);
- перечень Интернет-сервисов и электронных ресурсов (поисковые системы, электронная почта, профессиональные, тематические чаты и форум, системы аудио и видео конференций, онлайн энциклопедии и справочники; электронные учебные и учебно-методические материалы);
- перечень программного обеспечения:

Программное обеспечение, профессиональные базы данных и информационные справочные системы современных информационных технологий

– Операционная система Microsoft Windows 7 Academic
– Офисные приложения Microsoft Office 2010 Academic
– Яндекс-браузер. – Режим доступа: https://yandex.ru/
– Общероссийский математический портал. – Режим доступа: http://www.mathnet.ru/
– Большая российская энциклопедия. - Режим доступа: https://bigenc.ru/
– СПС «КонсультантПлюс». – Режим доступа: http://www.consultant.ru/
– Федеральная служба государственной статистики. – Режим доступа: http://www.gks.ru/wps/wcm/connect/rosstat_main/rosstat/ru/

Федеральный образовательный портал. – Режим доступа – http://www.edu.ru – «Российское образование» Федеральный портал. Каталог образовательных интернет ресурсов. Законодательство. Нормативные документы и стандарты // Учебно-методическая библиотека.

Образовательные технологии

Образовательный процесс по дисциплине строится на основе интегральной модели образовательного процесса по дисциплине: контекстное обучение, развивающее и проектное обучение, элементы технологии критического мышления.

Реализация данной модели предполагает использование следующих технологий стратегического уровня (задающих организационные формы взаимодействия субъектов образовательного процесса), осуществляемых с использованием определенных тактических процедур:

– лекционные (вводная лекция, лекция-презентация, проблемная лекция);
– практические (работа в малых группах, игровые методики, использование видеоматериалов);
– активизации творческой деятельности (дискуссия, мозговой штурм, ролевые игры, метод проектов и др.);
– самоуправления (самостоятельная работа студентов, создание глоссария по материалам дисциплины, подготовка презентаций по темам домашних заданий, метод экспертных оценок.

Рекомендуется использование информационных технологий при организации коммуникации со студентами для представления информации, выдачи рекомендаций и консультирования по оперативным вопросам (электронная почта), использование мультимедиа средств при проведении лекционных и семинарских занятий.

Вывод для студентов

Каждый студент с самого начала занятий должен выработать для себя рациональную систему работы над курсом и постоянно практиковаться в решении задач. В противном случае усвоение и практическое использование учебного материала затруднены. Чрезвычайно важны систематические занятия. Работа урывками не приносит положительных результатов.

2 Цели, задачи и требования к результатам дисциплины «Линейная алгебра»

Целью освоения дисциплины «Линейная алгебра» являются овладение основами линейной алгебры, приобретение навыков использования ее универсального понятийного аппарата и широкого арсенала вычислительных приемов при дальнейшем изучении профильных дисциплин.

Задачи:

– повысить уровень фундаментальной математической подготовки, формируя у студента базовые понятия дисциплины «Линейная алгебра», необходимые для решения теоретических и практических задач математики и экономики;

– изучить общие методы и приемы дисциплины - освоение математического инструментария и подготовка к изучению дальнейших математических и экономических дисциплин;

– развивать навыки логического и алгоритмического математического мышления, и доказательных рассуждений, оперирования с абстрактными объектами.

Требования к результатам обучения по дисциплине

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование следующих результатов обучения

Планируемые результаты обучения по дисциплине, характеризующие этапы формирования компетенций	Формируемые компетенции
Знать: – основные положения теоретического курса дисциплины, четко представлять его органическую связь с приложениями экономики; **Уметь:** –анализировать исходные данные, производить правильную постановку задачи, строить математические модели практических и прикладных задач, решать типовые задачи линейной алгебры и аналитической геометрии, в том числе, свободно использовать координатный, векторный, матричный или операторный способ записи математических соотношений; – анализировать результаты математических расчетов и обосновывать полученные выводы; **Владеть:** – методами линейной алгебры и аналитической геометрии: анализ стандартных теоретических математических и экономико-математических моделей, расчет данных и интерпретация полученных результатов, то есть навыками использования математического инструментария для решения практических задач в области экономики.	ОПК-3 способность выбирать инструментальные средства для обработки экономических данных в соответствии с поставленной задачей, проанализировать результаты расчетов и обосновывать полученные выводы

Содержание разделов дисциплины

Раздел I Матрицы и определители

Матрицы. Виды матриц (квадратная, единичная, нулевая, диагональная, каноническая). Транспонирование матриц, линейные операции над ними: алгебраическое сложение, умножение на число, умножение матриц. Свойства операций. Элементарные преобразования матриц. Определитель и элементарные преобразования. Методы вычисления определителя первого, второго, третьего порядков. Минор, алгебраическое дополнение. Свойства определителя матрицы. Определитель n-го порядка. Теорема Лапласа. Обратная матрица. Построение обратной матрицы. Необходимое и достаточное условие существования обратной матрицы. Ранг матрицы. Свойства ранга. Неизменность ранга при элементарных преобразованиях. Теорема о ранге матрицы. Критерий линейной независимости системы строк (столбцов). Понятие базисного минора. Методы нахождения ранга матрицы. Неотрицательные матрицы и модели Леонтьева

Использование матричного аппарата при математическое моделирование экономических процессов и решении задач экономического содержания.

Раздел II Системы линейных алгебраических уравнений

Системы линейных уравнений. Матричная запись системы уравнений. Равносильные СЛАУ, определенные и неопределенные, совместные и несовместные. Решение системы линейных уравнений методом обратной матрицы. Формула Крамера для решения систем n линейных уравнений с n неизвестными. Элементарные преобразования систем линейных уравнений. Обратимость элементарных преобразований. Метод Гаусса для решения n линейных уравнений с m неизвестными. Базисные и свободные неизвестные. Исследование систем линейных уравнений на совместность. Теорема Кронекера-Капелли о совместности системы линейных уравнений. Общее и частное решение систем линейных уравнений. Основные свойства однородной системы. Ненулевые решения однородной системы уравнений. Фундаментальная система решений системы. Геометрическая интерпретация систем линейных уравнений. Математическое моделирование экономических процессов с использованием систем линейных уравнений.

Раздел III Линейные пространства. Евклидовы пространства

Линейное пространство: определение, свойства, примеры. Понятие линейной зависимости независимости системы векторов, критерий линейной зависимости и независимости системы векторов в произвольном пространстве. Конечномерное линейное пространство: определение, базис, способ выбора базиса, координаты вектора. Формулы перехода от одного базиса к другому. Формулы связи координат одного вектора в двух базисах одного и того же линейного пространства. Линейное подпространство. Евклидово пространство: определение, неравенство Коши-Буняковского, ортогональные векторы, ортонормированные векторы. Независимость ортонормированной системы векторов. Существование ортонормированного базиса в евклидовом пространстве.

Раздел IV Комплексные числа

Расширение понятия числа. Комплексные числа: основные понятия и операции над комплексными числами. Алгебраическая, геометрическая, тригонометрическая и показательная формы комплексного числа.

Раздел V Векторная алгебра и элементы аналитической геометрии

Векторы на плоскости и в пространстве.Проекция вектора на ось, свойства проекций. Декартовы координаты вектора и точки на плоскости. Длина (модуль) вектора. Коллинеарность, компланарность, равенство векторов. Разложение вектора по базису. Декартов базис. Линейные и нелинейные операции над векторами (скалярное, векторное, смешанное) и их свойства. Некоторые приложения векторов при решении задач. Направляющие косинусы.

Деление отрезка в данном отношении. Полярная система координат и связь полярных координат точки с декартовыми координатами.

Прямая и плоскость в *n*-мерном пространстве. Линии на плоскости и их уравнения. Понятия нормального и направляющего векторов. Прямая на плоскости и в пространстве. Различные виды уравнений прямой. Угол между прямыми. Условия параллельности и перпендикулярности прямых.

Уравнения плоскости. Взаимное расположение плоскостей в пространстве. Угол между плоскостями. Расстояние от точки до прямой и плоскости. Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве, угол между прямой и плоскостью, определение координат точки пересечения.

Классификация кривых второго порядка. Эллипс, гипербола и парабола, их свойства и канонические уравнения. Приведение общего уравнения кривой второго порядка к каноническому виду.

Классификация поверхностей второго порядка. Эллипсоиды, параболоиды и гиперболоиды, их канонические уравнения.

Выпуклые множества в пространстве R^n. Полупространства, выпуклые многогранные области. Системы линейных неравенств и их геометрический смысл. Угловые точки выпуклых многогранных областей.

Раздел VI Линейные преобразования и квадратичные формы

Линейные преобразования пространства R^n.Линейные операторы. Ядро и образ линейного оператора Матрица линейного оператора. Собственные значения и собственные векторы линейных операторов. Собственные значения квадратных матриц.

Квадратичные формы, их матрицы в данном базисе. Приведение квадратичной формы к нормальному виду методом Лагранжа. Приведение квадратичнойформы к каноническому виду при помощи ортогонального преобразования. Закон инерции квадратичных форм. Критерий Сильвестра знакоопределенности квадратичной формы.

Учебно-программный материал, который должен изучить студент по дисциплине Линейная алгебра

Введение

Предмет и методы математики. Исторические сведения о развитии математики. Роль математики в современных науках.

Тема ***Матрицы***

Цель изучения – познакомить с основными понятиями темы и применением аппарата темы для решения экономических задач.

Данная тема включает в себя:

понятия матрицы, равенство матриц, виды матриц, транспонирование матриц;

действия с матрицами (алгебраическая сумма матриц, произведение матрицы на скаляр, произведение матриц, возведение матриц в степень);

понятие определитель матрицы, свойства определителя *n*-ого порядка, понятие и метод вычисления минора элемента матрицы, понятие и метод вычисления алгебраического дополнения элемента матрицы, правила вычисления определителя п-ого порядка, теорема Лапласса;

понятие обратная матрица, методы вычисления обратной матрицы, решение матричных уравнений;

ранг матрицы, свойства ранга матрицы, методы вычисления ранга матрицы, элементарные преобразования над матрицами .

Изучив тему, студент должен:

Знать: определения основных понятий, свойства всех операций с матрицами, понятие определитель матрицы, свойства определителя *n*-ого порядка, понятие минора элемента матрицы, понятие алгебраического дополнения элемента матрицы, теорему Лапласса; понятие обратная матрица, понятие ранг матрицы, свойства ранга матрицы, элементарные преобразования над матрицами .

Уметь: транспонировать матрицы; выполнять действия с матрицами (алгебраическая сумма матриц, произведение матрицы на скаляр, произведение матриц, возведение матриц в степень); вычислять минор элемента матрицы и алгебраическое дополнение элемента матрицы, вычислять определитель *n*-ого порядка, применять теорему Лапласса; вычислять обратную матрицу, решать матричные уравнения; находить ранг матрицы,

Владеть: навыком решения задач, связанных с применением математического аппарата в экономике.

Системы линейных уравнений

Цель: - дать основные понятия и определения темы «Системы линейных уравнений»;

- показать основные методы решения систем и отработать умения и навыки решения систем этими методами;

- показать как проводить исследование систем по теореме Кронекера – Копелли и отработать умения и навыки исследования систем;

- научит решать матричные уравнения.

Линейное (векторное) пространство

Цель: - дать основные понятия и определения темы «Линейное (векторное) пространство»;

- показать основные свойства линейного пространства;

- отработать умения и навыки по теме.

Операторы. Собственные вектора

Цель: - ввести основные понятия и определения темы

- отработать умения и навыки нахождения собственных значений и векторов

Аналитическая геометрия

1 Векторная алгебра

Цель изучения – познакомить с основными понятиями векторной алгебры и применением аппарата векторной алгебры для решения геометрических задач.

Данная тема включает в себя:

понятия свободный вектор, равенство, коллинеарность, компланарность векторов;

линейные операции с векторами (сумма векторов, произведение вектора на скаляр, разность векторов);

базис в пространстве, координаты вектора в базисе, ортонормированный базис, декартова прямоугольная система координат, координаты точки);

нелинейные операции с векторами (скалярное, векторное, смешанное произведения).

Изучив тему, студент должен:

Знать: определения основных понятий, свойства всех операций с векторами, выражение всех операций с векторами в координатной форме, условия необходимые и достаточные для: коллинеарности двух векторов, перпендикулярности (ортогональности) двух векторов, компланарности трех векторов.

Уметь: решать задачи, связанные с линейными и нелинейными операциями с векторами, приобрести навыки применения аппарата векторной алгебры для решения геометрических задач.

***Владеть*:** навыком решения задач, связанных с применением математического аппарата в экономике.

2 Геометрия на плоскости и в пространстве

Цель изучения – Понять возможность представления геометрических образов в форме уравнений, изучить особенности геометрических образов, соответствующих линейным и квадратным уравнениям в прямоугольной системе координат; познакомиться с полярной системой координат; понять возможность представления поверхностей и линий в форме уравнений и систем уравнений, изучить особенности геометрических образов, соответствующих линейным и квадратным уравнениям в прямоугольной системе координат.

Данная тема включает понятия:

линия соответствующая уравнению $F(x,y)=0$ в прямоугольной системе координат, линия соответствующая уравнению $F(r,\varphi)$ в полярной системе координат;

виды уравнения прямой в прямоугольной системе координат (общее уравнение прямой, уравнение прямой с угловым коэффициентом, уравнение прямой в отрезках, нормальное уравнение прямой);

параллельный перенос прямоугольной системы координат;

поверхность соответствующая уравнению $F(x,y,z)=0$ в прямоугольной системе координат, геометрический обзор, соответствующий системе уравнений;

соответствие линейного уравнения и плоскости;

нормаль вектор плоскости;

нормальное уравнение плоскости;

поверхности второго порядка соответствующие уравнениям второго порядка в пространственной прямоугольной системе координат.

Изучив тему, студент должен:

знать: основные виды уравнения прямой (общего вида, с угловым коэффициентом, в отрезках, нормальное, уравнение прямой заданной параметрически, уравнение прямой проходящей через две точки, уравнения прямой проходящей через точку в заданном направлении) в прямоугольной системе координат геометрический смысл коэффициентов этих уравнений, способ определения угла между прямыми, условия параллельности и перпендикулярности прямых, определения, канонические уравнения и геометрические свойства окружности, эллипса, гиперболы, параболы; изменения вида уравнения линии при параллельном переносе прямоугольной декартовой системы координат, основные два способа задания плоскости в пространстве и вид уравнения плоскости в каждом случае, особенность нормального уравнения плоскости и его применения для вычисления расстояния от точки до плоскости, способ определения угла между плоскостями;

уметь: решать геометрические задачи, связанные с прямой и кривыми второго порядка, решать геометрические задачи, связанные с прямой и плоскостью в пространстве.

Приобрести навыки определения формы линии, заданной уравнением в прямоугольной и полярной системах координат, определение формы поверхности, заданной уравнением в прямоугольной и цилиндрической системах координат.

***Владеть*:** навыком решения задач, связанных с применением математического аппарата в экономике.

Комплексные числа

Цель расширить понятие числа.

Изучив тему, студент должен:

знать: основные формы представления комплексного числа, методы вычисления – сложение, вычитание, умножение, деление, возведение в степень, извлечение корня *n* – ой степени.

уметь: представлять комплексные числа в алгебраической, тригонометрической и показательной формах, решать уравнения в комплексных числах.

Приобрести навыки выполнения действий над комплексными числами, решать уравнения, использовать комплексные числа при решении дифференциальных уравнений математического анализа.

Темы занятий и образовательные технологии для студентов дневной формы обучения(см. лекционный курс, методические рекомендации к практическим занятиям)

	Тема лекционного занятия	Образовательная технология	Тема практического занятия	Образовательная технология
	Матрицы и определители	Информационная лекция	Матрицы. Виды матриц. Действия над матрицами.	Тренинг Индивидуальный опрос Решение типовых задач
	Матрицы и определители	Информационная лекция	Определитель, свойства определителя и элементарные преобразования.	Решение типовых задач Анализ практической ситуации
	Матрицы и определители	Проблемная лекция	Обратная матрица. Построение обратной матрицы	Контрольно-корректирующее занятие Индивидуальный опрос
	Матрицы и определители	Метод укрупненных проблем	Ранг матрицы. Методы вычисления ранга матрицы. Теорема о ранге матрицы.	Решение типовых задач
	Системы линейных алгебраических уравнений	Лекция-визуализация «Приглашение к беседе»	Системы линейных уравнений. Формула Кремера.	Занятие по решению проблемных и творческих задач Мозговой штурм
	Системы линейных алгебраических уравнений	Информационная лекция	Матричная запись системы уравнений. Решение системы линейных уравнений методом обратной матрицы.	Решение задач. Индивидуальный опрос Форма организации занятия: индивидуально-групповая
	Системы линейных алгебраических уравнений	Проблемная лекция	Метод Гаусса решения систем линейных уравнений. Однородная система линейных уравнений.	Мозговой штурм
	Системы линейных алгебраических уравнений	Лекция-визуализация «Приглашение к беседе»	Теорема Кронекера-Капелли о совместности системы линейных уравнений.	Занятие по решению проблемных и творческих задач
	Линейные	Лекция по	Линейные преобразования	Решение задач.

	преобразования и квадратичные формы	готовому конспекту	пространства $\mathbf{R}^n$. Линейные операторы.	Индивидуальный опрос индивидуально-групповая работа
	Линейные преобразования и квадратичные формы	Лекция по готовому конспекту	Собственные значения и собственные векторы линейных операторов. Собственные значения квадратных матриц.	индивидуально-групповая работа
	Линейные преобразования и квадратичные формы	Информационная лекция	Квадратичные формы, их матрицы в данном базисе.	индивидуально-групповая работа
	Элементы аналитической геометрии. Вектор.	Лекция по готовому конспекту	Вектор. Действия над векторами. Угол между векторами.	Решение типовых задач
	Элементы аналитической геометрии. Уравнение линии. Прямая линия	Проблемная лекция	Прямая и гиперплоскость в *n*-мерном пространстве.	Анализ практической ситуации,
	Элементы аналитической геометрии. Уравнение линии. Кривые второго порядка.	Лекция по готовому конспекту	Классификация кривых второго порядка. Эллипс, гипербола и парабола, их свойства и канонические уравнения.	Занятие по решению проблемных и творческих задач
	Элементы аналитической геометрии. Плоскость. Поверхности второго порядка.	Метод укрупненных проблем	Классификация поверхностей второго порядка. Эллипсоиды, параболоиды и гиперболоиды, их канонические уравнения.	Решение типовых задач
	Элементы аналитической геометрии. Системы линейных неравенств и их геометрический смысл.	Информационная лекция	Системы линейных неравенств и их геометрический смысл.	Занятие по решению проблемных и творческих задач
	Неотрицательные матрицы и модели Леонтьева	Метод укрупненных проблем	Собственные значения и собственные векторы неотрицательных матриц.	Решение типовых задач
	Неотрицательные матрицы и модели Леонтьева	Лекция-визуализация «Приглашение к беседе»	Модель многоотраслевой, экономики Леонтьева.	Анализ практической ситуации,

Варианты вопросов к контролю знаний и самопроверки

1. Матрицы. Виды матриц. Равенство матриц.
2. Матрицы действия над матрицами.

3. Определитель матрицы. Свойства определителей.
4. Транспонирование определителя свойства определителей.
5. Определитель третьего порядка. Способы его вычисления.
6. Разложение определителя третьего порядка по элементам строки (столбца). Миноры и алгебраические дополнения.
7. Обратная матрица. Алгоритм вычисления обратной матрицы.
8. Решение систем линейных уравнений. Формулы. Крамера.
9. Решение систем линейных уравнений. Метод Гаусса.
10. Матричная запись системы линейных уравнений и ее решение.
11. Линейная однородная система n - уравнений с n – неизвестными.
12. Матрицы. Ранг матрицы.
13. Система m -линейных уравнений с n - переменными. Теорема Кронекера -Капелли.
14. Понятие вектора. Линейные операции над векторами.
15. Проекция вектора на ось.
16. Действия над векторами, заданными своими координатами.
17. Скалярное произведение векторов. Свойства скалярного произведения.
18. Скалярное произведение векторов, заданных своими координатами. Угол между векторами.
19. Линейная зависимость векторов. Базис на плоскости.
20. n – переменный вектор и векторное пространство.
21. Размерность и базис векторного пространства.
22. Переход к новому базису.
23. Эвклидово пространство.
24. Линейные операторы.
25. Собственные векторы и собственные значения линейного оператора.
26. Квадратичные формы.
27. Понятие об уравнении линии. Общее уравнение прямой.
28. Уравнение прямой, проходящей через две данные точки. Уравнение прямой в отрезках.
29. Уравнение прямой, проходящей через данную точку в данном направлении.
30. Уравнение прямой, проходящей через точку с заданным угловым коэффициентом.
31. Уравнение прямой, проходящей через данную точку перпендикулярно данному вектору.
32. Угол между прямыми. Условия параллельности и перпендикулярности о двух прямых.
33. Плоскость. Уравнение плоскости, проходящей через данную точку перпендикулярно данному вектору.
34. Угол между плоскостями. Условие параллельности и перпендикулярности двух плоскостей.
35. Кривые второго порядка. Каноническое уравнение окружности.
36. Каноническое уравнение эллипса. Исследование формы эллипса по его уравнению
37. Каноническое уравнение гиперболы. Равносторонняя гипербола.
38. Каноническое уравнение параболы.
39. Поверхности второго порядка.
40. Каноническое уравнение эллипсоида.
41. Каноническое уравнение параболоида.
42. Каноническое уравнение гиперболоида.
43. Собственные значения и собственные векторы неотрицательных матриц. Теорема Фробениуса-Перрона.
44. Число и вектор Фробениуса, их свойства.
45. Продуктивность неотрицательных матриц.
46. Модель многоотраслевой, экономики Леонтьева.
47. Продуктивные модели Леонтьева.
48. Различные критерии продуктивности модели Леонтьева.

Задания для самостоятельной работы по темам

Тема 1 Матрицы. Определители. Обратные матрицы. Ранг матрицы

<u>Цель:</u> Приобретение базовых знаний в области фундаментальных разделов математики. Проверка усвоения знаний по вычислению определителей 2-го и 3-го порядков, выполнения действий над матрицами, нахождению алгебраических дополнений. Повторить и систематизировать знания по данной теме.

Основные понятия

Определение 1. Матрицей размерности $m \times n$ (читается "m" на "n") называется прямоугольная таблица чисел, состоящая из m строк и n столбцов:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & .... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & .... & a_{2n} \\ .... & .... & ..... & ..... \\ a_{m1} & a_{m2} & ..... & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Числа a_{ij} называются <u>элементами матрицы</u> A, индекс i указывает номер строки, индекс j - номер столбца, на пересечении которых находится элемент a_{ij}. Так, например, элемент a_{45} стоит на пересечении четвертой строки и пятого столбца.

Для обозначения матрицы используются следующие символы:

$$A, \quad (a_{ij}), \quad \|a_{ij}\|, \quad \{a_{ij}\}, \qquad i = \overline{1,m}, \; j = \overline{1,n}.$$

Определение 2. Матрица A называется <u>квадратной матрицей</u> n - ого порядка, если $n = m$ (число строк равно числу столбцов):

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & .... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & .... & a_{2n} \\ .... & .... & ..... & ..... \\ a_{n1} & a_{n2} & ..... & a_{nn} \end{pmatrix}$$

.Элементы a_{ij}, где $i = j$, называются <u>диагональными</u> элементами матрицы A.

Определение 3. Квадратная матрица A называется диагональной, если $a_{ij} = 0, i \neq j$ (все элементы матрицы, за исключением, быть может, диагональных, равны нулю):

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & .... & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & .... & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & .... & 0 \\ .... & .... & ..... & .... & .... \\ 0 & 0 & 0 & .... & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Определение 4. Диагональная матрица A называется <u>единичной</u>, если все ее диагональные элементы равны единице ($a_{ij} = 1, \quad i = j; \; i = \overline{1,n}$). Единичная матрица обычно обозначается буквой E:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & .... & 0 \\ 0 & 1 & .... & 0 \\ .... & .... & ..... & ..... \\ 0 & 0 & ..... & 1 \end{pmatrix}.$$

Для обозначения единичной матрицы используют также символ Кронекера:

$$E = \{\delta_{ij}\} \qquad \delta_{ij} = \begin{cases} 1, \, i = j, \\ 0, \, i \neq j, \end{cases} \quad \delta_{ij} - \text{символ Кронекера.}$$

Определение 5. Матрица называется нулевой, если все ее элементы равны нулю:

$$0=\begin{pmatrix} 0 & .... & 0 \\ .... & .... & .... \\ 0 & .... & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрицей – столбцом называется матрица A , состоящая из одного столбца (размерность $m\times 1$):

$$A=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ .... \\ a_m \end{pmatrix}.$$

Матрицей – строкой называется матрица A, состоящая из одной строки (размерность $1\times n$): $A=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & .... & a_n \end{pmatrix}$.

Определение 6. Две матрицы $A=\{a_{ij}\}$ и $B=\{b_{ij}\}$ называются равными, если

1) размерности матриц совпадают;
2) соответствующие элементы матриц равны:

$$a_{ij}=b_{ij}, \quad i=\overline{1,m}; \quad j=\overline{1,n}.$$

Пусть задана матрица A размерности $m\times n$. Заменим 1-ую строку на 1-ый столбец, 2-ую строку на 2-ой столбец и т.д., m-ую строку на m-ый столбец. Такая операция называется транспонированием матрицы A.

Определение 7. Матрица, полученная в результате транспонирования, называется транспонированной по отношению к матрице A и обозначается символом A^T.

П р и м е р. Транспонировать матрицу

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 7 \\ 2 & \sqrt{2} & 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad A^T=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & \sqrt{2} \\ 3 & 0 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}.$$

Понятие определителей

Пусть дана матрица второго порядка – квадратная матрица, состоящая из двух строк и двух столбцов $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$.

Определителем второго порядка, соответствующим данной матрице, называется число, получаемое следующим образом: $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$.

Определитель обозначается символом $|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$.

Итак, для того чтобы найти определитель второго порядка нужно из произведения элементов главной диагонали вычесть произведение элементов по второй диагонали.

Примеры. Вычислить определители второго порядка.

1. $\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -4 \end{vmatrix}=-8-15=-23$
2. $\begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=0+6=6$.
3. Вычислить определитель матрицы D, если $D=-A+2B$ и

$$A=\begin{pmatrix}11 & -2\\ -3 & 4\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}5 & -1\\ 7 & 2\end{pmatrix}$$

$$D=\begin{pmatrix}-11 & 2\\ 3 & -4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}10 & -2\\ 14 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 17 & 0\end{pmatrix},\quad |D|=0.$$

Аналогично можно рассмотреть матрицу третьего порядка и соответствующий ей определитель.
Определителем третьего порядка, соответствующим данной квадратной матрице третьего порядка, называется число, обозначаемое и получаемое следующим образом:

$$|A|=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}\begin{vmatrix}a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix}a_{21} & a_{23}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix}a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix}.$$

Таким образом, эта формула даёт разложение определителя третьего порядка по элементам первой строки a_{11}, a_{12}, a_{13} и сводит вычисление определителя третьего порядка к вычислению определителей второго порядка.

Определители *n*-ого порядка

Введем теперь понятие определителя 4-ого порядка. Аналогично определениям минора и алгебраического дополнения элементов матрицы 3-го порядка, можно ввести эти понятия для элементов матрицы 4-го порядка :

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34}\\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44}\end{pmatrix},$$

понимая под минором M_{ij} ($i=\overline{1,4},\ j=\overline{1,4}$) ее элемента a_{ij}, определитель матрицы 3-го порядка, которая получается вычеркиванием из матрицы A i–ой строки и j–ого столбца, а под алгебраическим дополнением A_{ij} – произведение

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}.$$

Определение 1. <u>Определителем 4-ого порядка</u> называется число

$$\Delta(A)=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34}\\ a_{41} & a_{42} & a_{42} & a_{44}\end{vmatrix}=a_{11}\cdot A_{11}+a_{12}\cdot A_{12}+a_{13}\cdot A_{13}+a_{14}\cdot A_{14}. \qquad (1)$$

Аналогичным образом можно ввести понятие определителя 5-ого порядка, опираясь на определение определителя 4-ого порядка.
В общем случае, предположим, что мы определили, что такое определитель (n- 1)-ого порядка, тогда можно ввести понятиеопределителя *n*-ого порядка.
Определение 2. <u>Определитель *n*-ого порядка</u> квадратной матрицы A n -ого порядка

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & .... & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & .... & a_{2n}\\ .... & .... & ..... & .....\\ a_{n1} & a_{n2} & ..... & a_{nn}\end{pmatrix}$$

есть число

$$\Delta(A)=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}\cdot A_{11}+a_{12}\cdot A_{12}+\ldots+a_{1n}\cdot A_{1n}, \qquad (2)$$

где A_{1j} $(j=\overline{1,n})$ - алгебраическое дополнение элемента a_{1j} матрицы A

$$A_{1j}=(-1)^{i+j}M_{1j},$$

M_{1j} - минор элемента a_{1j} матрицы A, т.е. определитель матрицы $(n-1)$ -ого порядка, которая получается вычеркиванием из матрицы A *1*–ой строки и j–ого столбца. Формула *(2)* называется разложением определителя $\Delta(A)$ по элементам 1-ой строки.

В качестве п р и м е р а вычислим определитель 4-ого порядка, опираясь на его определение.

$$\Delta(A)=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & -3 \\ 5 & -2 & 6 & 3 \\ -5 & 0 & 4 & -6 \\ -4 & 7 & -7 & 8 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} -2 & 6 & 3 \\ 0 & 4 & -6 \\ 7 & -7 & 8 \end{vmatrix} + 2\cdot(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} 5 & 6 & 3 \\ -5 & 4 & -6 \\ -4 & -7 & 8 \end{vmatrix} +$$

$$+(-1)\cdot(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix} 5 & -2 & 3 \\ -5 & 0 & -6 \\ -4 & 7 & 8 \end{vmatrix} + (-3)\cdot(-1)^{1+4}\cdot\begin{vmatrix} 5 & -2 & 6 \\ -5 & 0 & 4 \\ -4 & 7 & -7 \end{vmatrix} =$$

$$=1\cdot(-316)-2\cdot 487-1\cdot(-23)+3\cdot(-248)=-2011.$$

Примеры. Вычислить определитель третьего порядка.

1. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 8-3\cdot(-1)-4\cdot 2 = 3$.

3. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1+2\cdot 4 = 9$

Самостоятельная работа по теме 1 Матрицы
Вариант 1

1. Найдите матрицу C = A^2+ 2B, если A= $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, B = $\begin{pmatrix} -7 & 4 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$.

2. Найдите: A · B – B · A, где A = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, B = $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Вычислите: 3A · 2B, если A = $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, B = $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

4. Найдите обратную матрицу для матрицы A = $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 6 & 2 \\ 4 & -1 & -3 \end{pmatrix}$.

5. Решить уравнение и неравенство: $\begin{vmatrix} 1 & 3 & x \\ 4 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 0$ и $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & x & -2 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} < 1$

Вариант 2

1. Найдите матрицу $C = A^2 + 2B$, если $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -4 & 7 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$.

2. Найдите: $A \cdot B - B \cdot A$, где $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Вычислите: $3A \cdot 2B$, если $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$.

4. Найдите обратную матрицу для матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -6 \\ 3 & 2 & 5 \\ 2 & 5 & -3 \end{pmatrix}$.

5. Решить уравнение и неравенство: $\begin{vmatrix} 3 & x & -4 \\ 2 & -1 & 3 \\ x+10 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$ и $\begin{vmatrix} 2 & x+2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 5 & -3 & x \end{vmatrix} > 0$

Контрольные вопросы по теме1

1. Что называется матрицей?
2. Что называется матрицей-строкой, матрицей столбцом?
3. Какие матрицы называются прямоугольными, квадратными?
4. Какие матрицы называются равными?
5. Что называется главной диагональю матрицы?
6. Какая матрица называется диагональной?
7. Какая матрица называется единичной?
8. Какая матрица называется треугольной?
9. Что значит транспонировать матрицу?
10. Что называется суммой матриц?
11. Что называется произведением матрицы на число?
12. Как найти произведение двух матриц?
13. В чем состоит обязательное условие существования произведения матриц?
14. Что называется определителем матрицы?
15. Как вычислить определитель третьего порядка по схеме треугольников?
16. Что называется минором?
17. Что называется алгебраическим дополнением элемента определителя?
18. Как разложить определитель по элементам столбца или строки?
19. Перечислите свойства определителя.
20. Какая матрица называется невырожденной?
21. Какая матрица называется обратной по отношению к данной?
22. Каков алгоритм нахождения обратной матрицы?

Самостоятельная работа по теме 2«Системы линейных уравнений»

Цель: приобретение базовых знаний в области фундаментальных разделов математики. Проверка усвоения знаний по системам *n* линейных уравнений с *n* переменными по формулам Крамера. Повторить и систематизировать знания по данной теме.

Примеры с решением

Пример1 Решить систему уравнений по формулам Крамера:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 1 \end{cases}$$

-3x + y = 2z = 0
x + 4y + 3z = 2

1) Вычислим определитель системы $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -3 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$ = 1*1*3+2*2*1+(-1)*4*(-3) – (1*1*(-1)+4*2*1+3*2*(-3))=3+4+12 – (-1 + 8 – 18) = 19+11 = 30.
   Система имеет единственное решение, т.к. определитель $\Delta = 30 \neq 0$.
2) Вычислим определители Δx, Δy, Δz заменив столбцы матрицы коэффициентов на свободные члены..
   $\Delta x = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 5$; $\Delta y = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 13$; $\Delta z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 1$.
3) По формулам Крамера находим решение системы:
   X = Δx/Δ = 5/30 = 1/6; y = Δy/Δ = 13/30; z = Δz/Δ = 1/30;
   Ответ: решение системы (1/6; 13/30; 1/30).
   По формулам Крамера можно решить систему *n* линейных уравнений с *n* неизвестными.

Пример 2 Решить систему уравнений.

$$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ x + y - z = 2 \\ 5x + y - z = 7 \end{cases}$$

1) Составим и вычислим определитель системы $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 5 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$.
2) Вычислим определители Δx, Δy, Δz.
   $\Delta x = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 7 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$, $\Delta y = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 5 & 7 & -1 \end{vmatrix} = -2$

Т.к. определитель $\Delta y = -2 \neq 0$, мы делаем заключение: Система несовместна, т.е. она не имеет решения.

Пример 3 Решить систему уравнений методом Гаусса

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 11 \\ 4x_1 + 6x_2 - x_3 = -1 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 3 \\ 5x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 2 \end{cases}.$$

Составим расширенную матрицу и приведем ее к ступенчатому виду

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 & 11 \\ 4 & 6 & -1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 2 & -1 & 3 \\ 5 & -1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 & 11 \\ 0 & 10 & -13 & -8 & -45 \\ 0 & 5 & -7 & -7 & -30 \\ 0 & 4 & -13 & -9 & -53 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 & 11 \\ 0 & 10 & -13 & -8 & -45 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 15 \\ 0 & 0 & 39 & 29 & 175 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 & 11 \\ 0 & 10 & -13 & -8 & -45 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 205 & 410 \end{pmatrix} \begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 11 \\ 10x_2 - 13x_3 - 8x_4 = -45 \\ x_3 + 6x_4 = 15 \\ 205x_4 = 410 \end{cases}$$

Из последнего уравнения этой системы получаем $x_4 = 2$. Подставив это значение в третье уравнение, получим $x_3 = 3$. Теперь из второго уравнения следует, что $x_2 = 1$, а из первого – $x_1 = -1$. Очевидно, что полученное решение единственно (так как единственным образом определяется значение x_4, затем x_3 и т. д.).

Пример 4 Найти общее и частное решение СЛУ

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 + 4x_5 = -2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 7 \\ x_1 - 2x_2 + 5x_3 - 5x_4 + 10x_5 = -10 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 - 3x_5 = 9 \end{cases}$$

Составим расширенную матрицу и приведем ее к ступенчатому виду

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & 4 & -2 \\ 0 & 5 & -5 & 0 & -5 & 5 \\ 0 & 5 & -7 & 4 & -11 & 13 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 6 & -8 \\ 0 & 5 & -7 & 4 & -11 & 13 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & 4 & -2 \\ 0 & 5 & -5 & 0 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 6 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 6 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 6 & -8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 3 & -4 \end{pmatrix} \text{обратный ход} \begin{cases} x_1 = 4 - r + s \\ x_2 = -3 + 2r - 2s \\ x_3 = -4 + 2r - 3s \\ x_4 = r \\ x_5 = s \end{cases}$$

Пример 5 Найти общее и частное решение СЛУ

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + 4x_4 + x_5 = 2 \\ 2x_1 + 3x_3 + 7x_4 - x_5 = 7 \\ 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 9x_4 + 5x_5 = 1 \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 + 14x_4 - 2x_5 = 8 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & -3 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & -3 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & -5 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{cases} x_1 = \frac{14}{3} - \frac{3}{2}r - \frac{11}{6}s \\ x_2 = \frac{4}{3} + \frac{1}{2}r + \frac{11}{6}s \\ x_3 = r \\ x_4 = -\frac{1}{3} + \frac{2}{3}s \\ x_5 = s \end{cases}$$

Пример 6 Найти решение СЛУ

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 7 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 5 \\ 4x_1 + 7x_2 - 3x_3 = 4 \end{cases}.$$

Преобразуем матрицу системы по методу Гаусса:

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 7 \\ 3 & 2 & -1 & 5 \\ 4 & 7 & -3 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 7 \\ 0 & 13 & -5 & -11 \\ 0 & 13 & -5 & -10 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 7 \\ 0 & 13 & -5 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Последняя строка последней матрицы соответствует не имеющему решения уравнению $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 1$. Следовательно, исходная система несовместна.

Пример 7 Найти общее и частное решение СЛУ

Решить систему уравнений, приняв в качестве базисных переменных y и z:

$$\begin{cases} 3x - 2y + z = 4, \\ 2x + 9y - 5z = 2. \end{cases}$$

Решение. Решаем систему методом Гаусса. Запишем расширенную матрицу системы – матрицу из коэффициентов при неизвестных и свободных членов.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 1 & 4 \\ 2 & 9 & -5 & 2 \end{array}\right) 5 \quad \sim$$

Среди коэффициентов при неизвестных есть 1, ей соответствует переменная z. Назовем z базисной переменной. Исключим базисную переменную z из 2-го уравнения, для чего умножим 1-е уравнение на 5 и сложим со вторым. Получим эквивалентную исходной систему уравнений с матрицей

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 1 & 4 \\ 17 & -1 & 0 & 22 \end{array}\right) \quad \sim$$

Умножим 2-е уравнение на (-1):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 1 & 4 \\ -17 & 1 & 0 & -22 \end{array}\right) 2 \sim$$

Считая новой базисной переменной y, исключим её из 1-го уравнения. Для этого умножим 2-е уравнение на 2 и сложим с первым:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -31 & 0 & 1 & -40 \\ -17 & 1 & 0 & -22 \end{array}\right).$$

В каждом уравнении выбирают одну базисную переменную, оставшиеся переменные называют свободными (в данном случае это x).

Запишем систему уравнений, соответствующую последней матрице:

$$\begin{cases} -31x + z = -40, \\ -17x + y = -22. \end{cases}$$

Выразив базисные переменные (y и z) через свободную (x), получим общее решение системы уравнений

$$\begin{cases} y = 17x - 22, \\ z = 31x - 40. \end{cases}$$

Проверочная работа по теме

№	**Вариант 2.1**	***Вариант 2.2***	***Вариант 2.3***
1	По формулам Крамера решить систему:		
	$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 1, \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 = 1, \\ 5x \quad + x_3 = -1 \end{cases}$	$\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 - x_3 = -1, \\ 3x_1 \quad + x = -4, \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 = 5 \end{cases}$	$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = -5, \\ \quad x_2 - 2x_3 = 4, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = -1 \end{cases}$
2	Решить матричное уравнение:		
	$\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$X=$\begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$	X$\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$=$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 9 & 6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$X=$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 6 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$
3	Методом Гаусса решить систему уравнений, заданную в матричной форме: AX= B. Дано: X= (x_1 x_2 x_3 x_4)		
	$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ A=$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 & 7 \\ -2 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & -3 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, B ^{т}=(4 6 2 4)	$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$, A=$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, B ^{т}= (-6 -4 -5 2)	$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ A=$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & -4 & -1 \\ 5 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & -1 \end{pmatrix}$, B ^{т}=(5 -5 5 -2)
4	Решить систему, составленную из первых трех уравнений системы в задаче 3. Указать число базисных решений и найти одно из них.		
5	Найти фундаментальную систему решений системы линейных уравнений:		

	$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+4x_4 \\ 2x_1+2x_2+5x_3+8x_4 \end{cases}$	$\begin{cases} x_1-x_2-2x_3+3x_4 \\ -2x_1+x_2-x_3-5x_4 \end{cases}$	$\begin{cases} -x_1+x_2-3x_3+4x_4 = \\ 3x_1-5x_2+2x\ \ -10x_4 = \end{cases}$
6	Дана матрица прямых затрат А. Найти изменение векторов: а) конечного продукта ΔY при данном изменении векторов валового продукта Δ X; б) валового выпуска Δ X при необходимом изменении при необходимом изменении вектора конечного продукта Δ Y.		
	А=$\begin{pmatrix} 0,3 & 0,2 \\ 0,4 & 0,1 \end{pmatrix}$; а) ΔX=$\begin{pmatrix} 200 \\ 100 \end{pmatrix}$; б) ΔY=$\begin{pmatrix} 55 \\ 110 \end{pmatrix}$;	А=$\begin{pmatrix} 0,1 & 0,4 \\ 0,5 & 0,2 \end{pmatrix}$; а) ΔX=$\begin{pmatrix} 140 \\ 100 \end{pmatrix}$; б) ΔY=$\begin{pmatrix} 52 \\ 104 \end{pmatrix}$;	А=$\begin{pmatrix} 0,2 & 0,3 \\ 0,6 & 0,2 \end{pmatrix}$; а) ΔX=$\begin{pmatrix} 100 \\ 120 \end{pmatrix}$; б) ΔY=$\begin{pmatrix} 92 \\ 138 \end{pmatrix}$

Упражнения

Составить экономико-математическую модель задачи

1 На предприятии для производства двух видов продукции используется 2 вида ресурсов. Расход каждого вида ресурса на изготовление единицы каждого вида продукции, запасы каждого вида ресурсов, а также доходы от реализации единицы каждого вида продукции приведены в таблице 1.5.

Составить план выпуска продукции, обеспечивающий предприятию максимальную прибыль от реализации всей продукции.

Таблица 1.5 – Исходная информация задачи 1

Вид ресурса	Необходимое количество условных единиц ресурсов на единицу продукции		Запас ресурса
	$П_1$	$П_2$	
S_1	2	1	8
S_2	1	2	10
Доход от реализации единицы продукции	1	1	

2 При откорме животных каждое животное должно ежедневно получить не менее 13 ед. питательного вещества *A*, не менее 18 ед. вещества *B* и не более 68 ед. витамина *C*. Эти питательные вещества содержат два вида корма. Содержание единиц питательного вещества в 1 кг каждого вида корма и цена приведены в таблице 1.6.

Таблица 1.6 – Исходная информация задачи 2

Питательное вещество	Вид корма		Минимальная суточная потребность в питательном веществе, усл .ед.
	$П_1$	$П_2$	
A	4	13	13
B	3	2	18
C	1	11	68
Стоимость 1кг корма	4	1	

Составить рацион питания животных, обеспечивающий организм минимальными суточными потребностями в питательных веществах и имеющий минимальную стоимость.

3 При производстве двух видов продукции $П_1$ и $П_2$ используются три вида сырья S_1, S_2, S_3. Известны запасы каждого вида сырья: 40, 15 и 28. Для изготовления единицы продукции вида $П_1$ необходимо 3 ед. сырья S_1, 2 ед. сырья вида S_2 и 4 ед. сырья вида S_3. Производство единицы продукции вида $П_2$ требует затрат 5 ед. сырья вида S_1, 1 ед. сырья вида S_2 и 1 ед. сырья вида S_3. При реализации одной единицы продукции вида $П_1$ предприятие получает прибыль в 2 ден.ед, а при реализации одной единицы продукции вида $П_2$ прибыль составит 4 ден.ед. Требуется составить план выпуска продукции, при котором предприятие получит наибольшую прибыль.

4 Завод тяжелого машиностроения производит станки двух видов 3СБШ и 6СБШ. Для данного производства используется три вида сырья: металлопрокат в объеме 77 усл.ед., трубы в объеме 78 усл.ед, чугуны в объеме 54 усл.ед. На производство одного станка вида 3СБШ расходуется 1 усл.ед. металлопроката, 4 усл.ед. труб, 4 усл.ед. чугунов. Выпуск одного станка вида 6СБШ требует затрат металлопроката в количестве 7 усл.ед, труб в количестве 5 усл.ед. и 1 усл.ед. чугунов. Прибыль завода от реализации одного станка вида 3СБШ составит 3 ден.ед., а прибыль от реализации одного станка вида 6СБШ равна 4 ден.ед. Составит план производства станков указанного вида, который приносил бы заводу наибольшую прибыль.

Тема 4 Комплексные числа
Самостоятельная работа по теме «История открытия комплексных чисел»

Цель: Расширить понятие числа. Развитие интереса к предмету.
Форма самостоятельной деятельности: создание презентации по заявленной теме.

Методические рекомендации

Работа должна соответствовать методическим рекомендациям по созданию презентаций.

Справочный материал

История развития науки о числе.

Сложность цивилизации, как в зеркале отражается в сложности используемых ею чисел. Две с половиной тысячи лет назад вавилоняне довольствовались натуральными числами, подсчитывая принадлежащие им несколько овец, сегодня экономисты пользуются метрической алгеброй для описания взаимосвязей сотен предприятий.

Числовые системы, применяемые в математике, могут быть расчленены на пять главных ступеней: 1) множество целых положительных чисел – натуральное множество N 2) относительные числа, включающие положительные числа, отрицательные числа и нуль; 3) рациональные числа, в которые входят целые числа и дроби; 4) действительные числа, включая иррациональные числа, т.е. числа, которые можно представить бесконечной непериодической десятичной дробью, такие как π, e, $\sqrt{2}$ и т.д. 5) комплексные числа, вводящие в рассмотрение «мнимое число» $\sqrt{-1}$. Множество комплексных чисел является расширением множества действительных чисел за счет включения множества мнимых чисел. Комплексные числа включают в себя все множества чисел, которые изучались ранее. Так натуральные, целые, рациональные, иррациональные, действительные числа являются, вообще говоря, частными случаями комплексных чисел.

С эпохи Возрождения математики стали использовать числа вида z = x+iy для решения квадратных уравнений, дискриминант у которых отрицателен, где

$i = \sqrt{-1}$, $i^2 = -1$, *x и y* – вещественные числа

Комплексными числами называют выражения вида $a+b\cdot\boldsymbol{i}$, где a и b –действительные числа, а $\boldsymbol{i}$ – некоторый символ, такой что $\boldsymbol{i}^2 = -1$ или $i = \sqrt{-1}$, и обозначают буквой *z*. Нельзя назвать число *i* ни положительным ни отрицательным.

Число a называется действительной частью комплексного числа $a + b\cdot\boldsymbol{i}$**,** а число b – его мнимой частью. Число $\boldsymbol{i}$ называется мнимой единицей.

Например, действительная часть комплексного числа $2+3\cdot\boldsymbol{i}$ равна 2, а мнимая равна 3.

1. Если $a = 0$, $b \neq 0$, то $a + b\cdot\boldsymbol{i} = b\cdot\boldsymbol{i}$ – чисто мнимое число.
2. Если $a \neq 0$, $b = 0$, то $a + b\cdot\boldsymbol{i} = a$– комплексное число является действительным.
3. Если $a = 0$, $b = 0$, то $a + b\cdot\boldsymbol{i} = 0$ – единственное число, которое является и действительным и мнимым.

«Мнимые числа – поразительный полет духа божьего» – писал Лейбниц в 1702 году. Сегодня комплексные числа прочно вошли в математический аппарат. Языком комплексных чисел написаны многие труды по математике, физике, технике.

Пример 1 Найти корни уравнения $x^2+x+1=0$.

1) Находим дискриминант D= 1 – 4 = –3 < 0; 2) Находим корни уравнения $x_1 = (-1+\sqrt{-3})/2 = (-1+i\sqrt{3})/2$;

$x_2 = (-1-\sqrt{-3})/2 = (-1-i\sqrt{3})/2$;

Это уравнение имеет комплексные корни, где $i = \sqrt{-1}$.

Пример z = 2 + 3i, Rez = 2 - вещественная часть числа, Imz = 3 мнимая часть числа.

z = -15 + i, Rez = -15 - вещественная часть числа, Imz =1 - мнимая часть числа.

Свойства комплексных чисел

1. Комплексное число равно нулю тогда и только тогда, когда равны нулю его вещественная и мнимая части, т.е. z = 0 <=>Rez = x=0, Imz =y=0.

(<=> - знак эквивалентности, или можно заменить слова «тогда и только тогда», необходимо и достаточно).

2. Если мнимая часть числа Imz =y=0, то z = x есть вещественное число, т.е. вещественные числа являются частью комплексных чисел.

Например, . z = 5+i0 = 5. Мнимая часть числа 5 равна 0.

3. Два комплексных числа равны тогда и только тогда, когда соответственно равны их вещественные и мнимые части. Пусть. $z_1 = x_1+iy_1$, $z_2 = x_2+iy_2$, $z_1 = z_2$ если $x_1 = x_2$ и $y_1 = y_2$.

4. Множество комплексных чисел неупорядоченное множество, т.е. из двух комплексных чисел нельзя указать последующее и предыдущее. Между двумя комплексными числами нельзя поставить знаки неравенства >или<.

Например, $z_1 = 10+15i$, $z_2 = 2-100i$. Нельзя сказать которое из двух чисел больше.

Определение. Числа $z = x + iy$ и $\bar{z} = x - iy$ называются комплексно сопряженными.

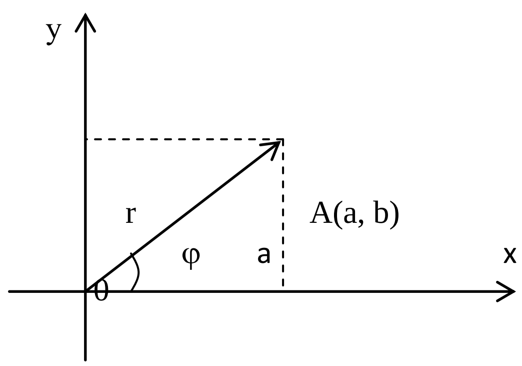
Например, z = -2 + 3i, $\bar{z} = -2 - 3i$

z = 1 – i, $\bar{z} = 1 + i$

Справочный материал

Понятие комплексного числа имеет геометрическое истолкование.

Любое действительное число может быть геометрически представлено в виде точки на числовой прямой, то комплексное число представляется точкой на плоскости, координатами которой будут соответственно действительная и мнимая части комплексного числа. При этом горизонтальная ось будет являться действительной числовой осью, а вертикальная - мнимой осью.



Таким образом, на оси OX располагаются действительные числа, а на оси OY – чисто мнимые.

Тригонометрическая форма числа.

Из геометрических соображений видно, что $a = r\cos\varphi;\quad b = r\sin\varphi$. Тогда комплексное число можно представить в виде:

$z = a + ib = r\cos\varphi + ir\sin\varphi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ - форма записи называется **тригонометрической формой записи комплексного числа или формула Муавра**.

При этом величина r называется **модулем** комплексного числа, а угол наклона φ - **аргументом** комплексного числа.

$r = |z|;\qquad \varphi = Arg\, z$.

Из геометрических соображений видно:

$$r = |a + ib| = \sqrt{a^2 + b^2};\quad \varphi = Arg\, z = arctg\frac{b}{a};$$

Очевидно, что комплексно – сопряженные числа имеют одинаковые модули и противоположные аргументы.

$|z| = |\bar{z}|;\qquad Arg\, z = -Arg\, \bar{z}.$

Деление в тригонометрической форме: $z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2))$

$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$ - возведение в степень

Извлечение корня из комплексного числа: $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \rho(\cos\psi + i\sin\psi)$

Возводя в степень, получим:

$$\rho^n(\cos n\psi + i\sin n\psi) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

Отсюда: $\rho = \sqrt[n]{r};\qquad n\psi = \varphi + 2\pi k;\qquad k \in Z.$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right)$$

Таким образом, корень n – ой степени из комплексного числа имеет n различных значений.

Показательная форма комплексного числа.

Рассмотрим показательную функцию $w = e^z;\qquad z = x + iy.$

Можно показать, что функция w может быть записана в виде:

$w = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$. Данное равенство называется **уравнением Эйлера.**

Пример 2 Найти формулы sin2φ и cos2φ.

Рассмотрим некоторое комплексное число $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.

Тогда с одной стороны $z^2 = r^2(\cos^2\varphi + 2i\cos\varphi\sin\varphi - \sin^2\varphi)$.

По формуле Муавра: $z^2 = r^2(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi)$

Приравнивая, получим $\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi + 2i\cos\varphi\sin\varphi$

Т.к. два комплексных числа равны, если равны их действительные и мнимые части, то $\cos 2\varphi = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi$ и $\sin 2\varphi = 2\sin\varphi\cos\varphi$

Получили известные формулы двойного угла.

Самостоятельная работа по теме 4 «Действия над комплексными числами»

Цель: Уметь выполнять действия над комплексными числами., заданными разными формами.

Методические рекомендации

Формы комплексного числа.

1. Алгебраическая $z = a + bi$

сложение: $(a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$

умножение: $(a_1 + b_1 i)\cdot(a_2 + b_2 i) = a_1 a_2 + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i - b_1 b_2$

деление: $\dfrac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} = \dfrac{(a_1 + b_1 i)(a_2 - b_2 i)}{(a_2 + b_2 i)(a_2 - b_2 i)}$

2. Тригонометрическая $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

умножение: $z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$

деление: $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2))$

возведение в степень: $z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$

извлечение корня: $z_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\dfrac{\psi}{n} + \dfrac{2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\dfrac{\psi}{n} + \dfrac{2\pi k}{n}\right)\right), \quad k = 0,1,2,3,...$

3. Показательная $z = r \cdot e^{i\varphi}$

умножение: $z_1 \cdot z_2 = e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$

деление: $\dfrac{z_1}{z_2} = e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$

возведение в степень: $z^n = e^{in\varphi}$

Примеры:

Задача 1. Представить в тригонометрической и показательной форме число $z = -5\sqrt{3} + 5i$.

Решение. Число задано в алгебраической форме и в общем случае имеет вид $z = x + i*y$. Здесь x и y – соответственно действительная и мнимая части комплексного числа z, а i – мнимая единица ($i^2 = -1$).

Число z изображается на комплексной плоскости точкой с координатами x и y (рис. 1).

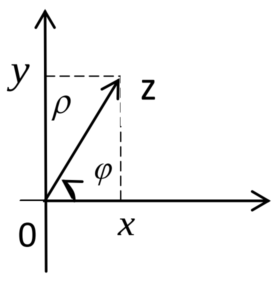


Рис. 1

Алгебраическая, тригонометрическая и показательная формы связаны соотношениями

$$z = x + iy = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi) = \rho e^{i\varphi},$$

где ρ – модуль комплексного числа z (радиус-вектор, соединяющий начало координат с точкой z); φ - аргумент комплексного числа z (угол между осью Ox и радиус-вектором ρ).

При этом $x = \rho\cos\varphi, \qquad y = \rho\sin\varphi.$

С другой стороны, $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad tg\,\varphi = \dfrac{y}{x} \quad (x \neq 0).$

В силу многозначности φ будем рассматривать только его главное значение из промежутка $(-\pi;\pi]$, используя соотношение

$$\varphi=\begin{cases} arctg\,\dfrac{y}{x} & \text{для 1 и 4 четвертей,}\\ arctg\,\dfrac{y}{x}+\pi & \text{для 2 четверти,}\\ arctg\,\dfrac{y}{x}-\pi & \text{для 3 четверти.}\end{cases}.$$

Для $z=-5\sqrt{3}+5i$ имеем $x=-5\sqrt{3}$, $y=5$,поэтому $\rho=\sqrt{(-5\sqrt{3})^2+5^2}=10$.

Так как $tg\,\varphi=\dfrac{5}{-5\sqrt{3}}=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

и число z расположено во второй четверти (рис. 2), получим

$$\varphi=arctg\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\pi=-arctg\,\frac{1}{\sqrt{3}}+\pi=-\frac{\pi}{6}+\pi=\frac{5\pi}{6}$$

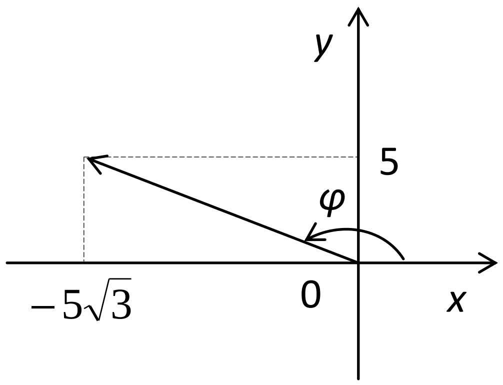


Рис. 2.Изображение комплексного числа в плоскости

Тогда $z=-5\sqrt{3}+5i=10\left(\cos\dfrac{5\pi}{6}+i\sin\dfrac{5\pi}{6}\right)=10e^{\frac{5\pi}{6}i}$.

Задача 2. Представить в тригонометрической и показательной форме число $z=-2i$.

Решение. Здесь $x=0$, $y=-2$ (см. задачу 1), поэтому $\rho=\sqrt{0+(-2)^2}=2$. Построив $z=-2i$ (рис. 3), найдем $\varphi=-\dfrac{\pi}{2}$ (формула $tg\,\varphi=\dfrac{y}{x}$ неприменима, так как $x=0$).

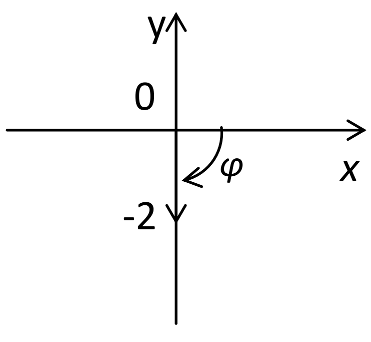


Рис. 3Изображение комплексного числа в плоскости

Итак, $z = -2i = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = 2e^{-\frac{\pi}{2}i}$.

Задача 3. Вычислить $\frac{1+2i}{2-3i}$.

Решение. Выполнить действия с комплексными числами − значит представить результат в алгебраической, тригонометрической или показательной формах (см. задачу 1). В данном случае получим алгебраическую форму вида $z = x + iy$, для чего умножим числитель и знаменатель дроби на комплексно сопряженное к знаменателю число ($2+3i$). В результате получим

$$\frac{1+2i}{2-3i} = \frac{(1+2i)(2+3i)}{(2-3i)(2+3i)} = \frac{2+3i+4i+6i^2}{4-9i^2} = \frac{-4+7i}{13} = -\frac{4}{13} + \frac{7}{13}i.$$

Задача 4. Вычислить $(1-i\sqrt{3})^9$.

Решение. Возвести комплексное число в степень *n* можно по формуле Муавра

$$z^n = \rho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) = \rho^n e^{in\varphi},$$

где ρ и φ − соответственно модуль и аргумент комплексного числа *z*.

Найдем ρ и φ (см. задачу 1). Так как $x = 1$, $y = -\sqrt{3}$, получим

$$\rho = \sqrt{1+(-\sqrt{3})^2} = 2.$$

Поскольку число *z* расположено в четвертой четверти (рис. 4), имеем

$$\varphi = arctg\left(-\sqrt{3}\right) = -arctg\sqrt{3} = -\frac{\pi}{3}$$

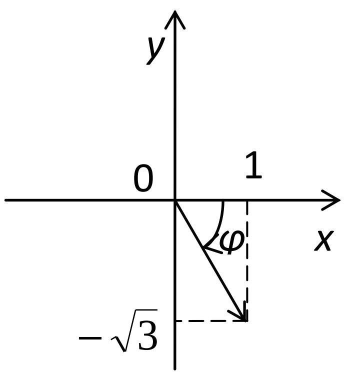


Рис. 4Изображение комплексного числа в плоскости

Тогда

$$(1-i\sqrt{3})^9 = 2^9\left(\cos\left(-\frac{9\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{9\pi}{3}\right)\right) = 2^9\left(\cos 3\pi - i\sin 3\pi\right) = -512.$$

Задача 5. Решить уравнение $z^5 + 4 + 4i = 0$.

Решение. Преобразуем уравнение к виду $z^5 = -4 - 4i$.

Тогда $z = \sqrt[5]{-4-4i}$

и, значит, следует применить формулу Муавра извлечения корня степени n из комплексного числа

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n}+i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right)=\sqrt[n]{\rho}e^{i\cdot\frac{\varphi+2\pi k}{n}},\quad k=0,1,\ldots,(n-1).$$

Здесь ρ и φ − соответственно модуль и аргумент подкоренного выражения z (в данной задаче − это $(-4-4i)$).

Находим ρ и φ для числа $-4-4i$ (см. задачу 1):

$$\rho=\sqrt{(-4)^2+(-4)^2}=\sqrt{32}=(\sqrt{2})^5.$$

Так как число расположено в третьей четверти (рис. 5), то

$$\varphi=arctg\frac{-4}{-4}-\pi=arctg1-\pi=\frac{\pi}{4}-\pi=-\frac{3\pi}{4}.$$

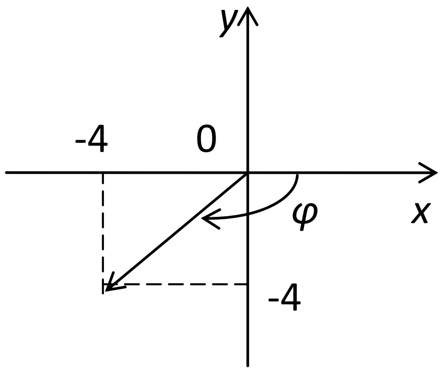


Рис. 5Изображение комплексного числа в плоскости

Далее получаем

$$\sqrt[5]{-4-4i}=\sqrt[5]{\left(\sqrt{2}\right)^5}\,e^{i\cdot\frac{-\frac{3\pi}{4}+2\pi k}{5}}=\sqrt{2}\cdot e^{\frac{i(-3\pi+8\pi k)}{20}},\quad k=0,1,2,3,4.$$

Используя методические рекомендации, выполните задания:

1 вариант	2 вариант
1. Найдите $\frac{z_1}{z_2}$, если $z_1=3+i$, $z_2=2-8i$	1. Найдите $\frac{z_1}{z_2}$, если $z_1=1+2i$, $z_2=-4+2i$
2. Найдите модуль к.ч. $z=-2+2\sqrt{3}i$	2. Найдите модуль к.ч. $z=3-4\sqrt{5}i$
3. Найдите $z_1\cdot z_2$, если $z_1=6-2i$, $z_2=3-4i$	3. Найдите $z_1\cdot z_2$, если $z_1=1+2i$, $z_2=3+i$
4. Изобразите число на комплексной плоскости $z=2+4i$	4. Изобразите число на комплексной плоскости $z=-3+4i$
5. Вычислите: $(-5x+4y^2i)\cdot(5x-4y^2i)$	5. Вычислите: $(6x^3+yi)\cdot(-6x^3+yi)$
6. Разложите на множители:	6. Разложите на множители:
а) x^2+1; б) $25x^2+9y^2$	а) x^2+y^2; б) $16x^2+9y^2$
7. Решите уравнения:	7. Решите уравнения:
а) $x^2+x+1=0$; б) $x^2+2x+2=0$	а) $5x^2=7x+3=0$; б) $2x^2+2x+1=0$
8. Выполнить умножение, деление и возведение в степень к.ч. $(z_1\cdot z_2,\frac{z_1}{z_2},z_1^{\ 2},z_2^{\ 3})$, если	8. Выполните умножение, деление и возведение в степень к.ч. $(z_1\cdot z_2,\frac{z_1}{z_2},z_1^{\ 2},z_2^{\ 3})$, если

а) $z_1 = \cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}$,

$z_2 = 2(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$

б) $z_1 = e^{i\frac{\pi}{5}}$; $z_2 = e^{i\frac{4\pi}{5}}$

9. Запишите в тригонометрической и показательной форме к.ч.

а) $z = \sqrt{3} + i$; б) $z = -1 + i$

а) $z_1 = 3(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4})$,

$z_2 = 2(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4})$

б) $z_1 = 3e^{i\frac{\pi}{4}}$; $z_2 = 4e^{i\frac{\pi}{3}}$

9. Запишите в тригонометрической и показательной форме к.ч.

а) $z = \sqrt{3} - i$; б) $z = 1 - i$

Тема 5 Векторная алгебра. Координаты вектора

Требования к знаниям и умениям

Студент должен:

иметь представление:

- о компланарных векторах, базисе, разложении вектора по заданному базису на плоскости и в пространстве;
- о системах координат – полярной, декартовой, о радиус-векторе точки, о координатах радиуса вектора, о векторе на плоскости и в пространстве;
- о задачах линейного программирования.

Знать:

- определение вектора, действия над векторами;
- свойства действий над векторами;
- понятие прямоугольной декартовой системы координат на плоскости и в пространстве;
- правила действий над векторами с заданными координатами;
- формулы для вычисления длины вектора, угла между векторами, расстояния между двумя точками;
- формулы уравнения прямой, сферы и плоскости.

Уметь:

- выполнять действия над векторами;
- разлагать векторы на составляющие на плоскости и в пространстве;
- вычислять угол между векторами, длину векторами;
- применять координатно-векторный метод для вычисления отношений, расстояний и углов.

Виды самостоятельной работы студентов.

Домашняя самостоятельная работа «Использование координат и векторов при решении прикладных задач».

Вариант 1

1. Заполните пропуски, чтобы получилось верное утверждение:

1) ненулевые векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются сонаправленными, если …..

2) $\vec{a} = \vec{b}$, если….

3) векторы $\vec{a}$ и $k \cdot \vec{a}$ противоположно направлены, если ….

4) Если ABCD – параллелограмм, то $\overline{AB} + \overline{AD} = ...$

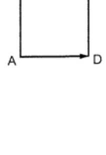
2. Установите истинность утверждений:

1) разностью векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется такой вектор $\vec{n}$, что $\vec{n} + \vec{a} = \vec{b}$;

2) средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме;

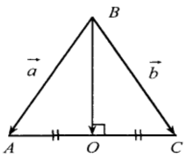
3) ненулевые векторы называются равными, если они равны по длине.

3. ABCD – квадрат. AB = 5. $|\overline{AB} + \overline{AD}|$ равно



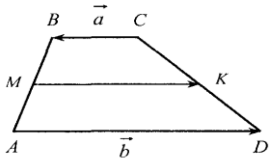
1) 10; 2) $5\sqrt{2}$; 3) $\sqrt{10}$

4.



$\overrightarrow{BA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$.

Тогда $\overrightarrow{BO} = ...$

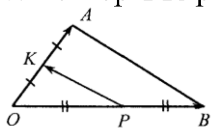


$\overrightarrow{CB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$.

Тогда $\overrightarrow{MK} = ...$

5.МК – средняя линия трапеции ABCD

6. Вектор $\overline{PK}$ равен.



1) $\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$;

2) $\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB})$;

3) $\frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA})$.

7. В параллелограмме ABCD диагонали пересекаются в точке О. Выразите через векторы $\overline{a} = \overline{AB}$ и $\overline{b} = \overline{AD}$ вектор $\overline{OA}$.

а) $\overrightarrow{OA} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$;

б) $\overrightarrow{OA} = -\frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$;

в) $\overrightarrow{OA} = \frac{1}{2}(\vec{a} - \vec{b})$.

8. На стороне ВС ромба ABCD лежит точка К так, что ВК=КС, О – точка пересечения диагоналей. Выразите $\overline{AO}, \overline{AK}, \overline{KD}$ через векторы $\overline{a} = \overline{AB}$ и $\overline{b} = \overline{AD}$.

9. В равнобедренной трапеции высота делит большее основание на отрезки 5 см и 12 см. Найдите среднюю линию трапеции.

10. Начертите два неколлинеарных вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$. Постройте векторы: $\bar{n} = \frac{1}{2}\bar{a} + 3\bar{b}$; $\overline{d} = 2\overline{b} - \overline{a}$.

11. Какие из данных точек Y(7; 3; 0), D (2; 0; 0), A(0; 0; -7), L(-1; 0; -32), O(0; -0,1; 0), S(10; 1; 0); M(0; 2,5; -1),

N(4; 2; 1), K(-9;0;0) принадлежат а) оси абсцисс; б) оси ординат; в) оси аппликат; г) плоскости Oxy; д) плоскости Oyz; е) плоскости Oxz?

12. а) Запишите координаты векторов: $\overline{a} = -0{,}4\overline{i} + \overline{j} - \overline{k}$; $\overline{b} = 9\overline{i} - 5\overline{j}$; $\overline{c} = -8\overline{k}$

б) Запишите разложения векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ по координатным векторам $\overline{i}$, $\overline{j}$, $\overline{k}$ и найдите их скалярное произведение: $\overline{a}\{9;-2;4\}$; $\overline{b}\left\{\frac{5}{9};0;-4\right\}$

13. Даны векторы $\overline{a}\{-2;0{,}5;-1\}$; $\overline{b}\{4;-3;5\}$; $\overline{c}\ \{0;2;0\}$. Найдите координаты вектора $\overline{h} = (2\overline{k} - \overline{b}) + (2\overline{c} - \frac{1}{2}\overline{a})$

14. Даны точки A(1; 3; 0), B(2; 3; -1), C(1; 2; -1). Вычислите угол между векторами $\overline{CA}$ и $\overline{CB}$. Найдите длины этих векторов.

Вариант 2

1. Заполните пропуски, чтобы получилось верное утверждение:

1) ненулевые векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются коллинеарными, если ….

2) $\vec{a} = -\vec{b}$, если….

3) векторы $\vec{a}$ и $k \cdot \vec{a}$ сонаправлены, если ….

4) Если ABCD – ромб, то $\overline{CB} + \overline{CD} = ...$

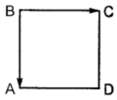
2. Установите истинность утверждений:

1) произведением ненулевого вектора $\vec{a}$ на число k называется такой вектор $\vec{b}$, что $|\bar{b}| = |k| \cdot |\bar{a}|$;

2) средней линией трапеции называется отрезок, соединяющий середины ее противоположных сторон;

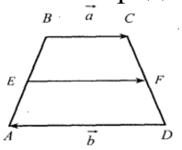
3) от любой точки А можно отложить вектор, равный вектору $\vec{a}$, и притом только один.

3. ABCD – квадрат. AB = 4. $|\overline{BA} + \overline{BC}|$ равно



1) 8; 2) $4\sqrt{2}$; 3) $\sqrt{8}$

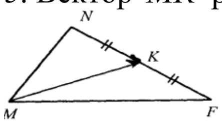
4. EF – средняя линия трапеции ABCD



$\overrightarrow{BC} = \vec{a}$, $\overrightarrow{DA} = \vec{b}$.

Тогда $\overrightarrow{EF} = \ldots$

5. Вектор $\overline{MK}$ равен

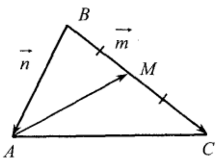


1) $\frac{1}{2}(\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{MF})$;

2) $\frac{1}{2}(\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{MF})$;

3) $\frac{1}{2}(\overrightarrow{MF} - \overrightarrow{MN})$.

6.



$\overrightarrow{AB} = \vec{n}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{m}$.

Тогда $\overrightarrow{AM} = \ldots$

7. В параллелограмме ABCD диагонали пересекаются в точке О. Выразите через векторы $\bar{a} = \overline{AB}$ и $\bar{b} = \overline{AD}$ вектор $\overline{OD}$.

а) $\overrightarrow{OD} = \frac{1}{2}(\vec{a} - \vec{b})$;

б) $\overrightarrow{OD} = -\frac{1}{2}(\vec{a} - \vec{b})$;

в) $\overrightarrow{OD} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$.

8. На стороне DC квадрата ABCD лежит точка P так, что CP=PD, O – точка пересечения диагоналей. Выразите $\overline{BO}, \overline{BP}, \overline{PA}$ через векторы $\bar{a} = \overline{BA}$ и $\bar{b} = \overline{BC}$.

9. В равнобедренной трапеции один из углов равен 60°, боковая сторона равна 8 см, а меньшее высота основание 7см. Найдите среднюю линию трапеции.

10. Начертите два неколлинеарных вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Постройте векторы: $\bar{n} = \frac{1}{3}\bar{a} + 2\bar{b}$; $\bar{d} = 2\bar{a} - \bar{b}$.

11. Какие из данных точек A(0; 3; 0), B (2; 0; 8), C(0; 5; -7), D(-1; 5; -3), E(5; -3,5; 0), F(10; 0; 0); G(0; 8; -1),

N(4; 2; 1), K(0;0;6) принадлежат а) оси абсцисс; б) оси ординат; в) оси аппликат; г) плоскости Oxy; д) плоскости Oyz; е) плоскости Oxz?

12. а) Запишите координаты векторов: $\bar{a} = 4\bar{i} - 7\bar{j}$; $\bar{b} = 12\bar{i} + 5\bar{j} - 2{,}8\bar{k}$; $\bar{c} = -0{,}8\bar{i}$

б) Запишите разложения векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ по координатным векторам $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ и найдите их скалярное произведение: $\bar{a}\left\{\frac{1}{3};1;0\right\}$; $\bar{b}\{6;-2;1\}$

13. Даны векторы $\bar{a}\{-2;0{,}5;-1\}$; $\bar{b}\{4;-3;5\}$; $\bar{c}\ \{0;2;0\}$. Найдите координаты вектора $\bar{h} = (-\bar{k} + 2\bar{b}) + (-\frac{1}{2}\bar{c} + 3\bar{a})$

14. Даны точки A(1; 3; 0), B(2; 3; -1), C(1; 2; -1). Вычислите угол между векторами $\overline{BC}$ и $\overline{AC}$. Найдите длины этих векторов.

2. ***Вопросы для самопроверки***

- Дайте определение вектора.
- Какие векторы называются коллинеарными?
- Какие векторы называются равными?
- Как производится сложение и вычитание векторов?
- Дайте определение угла между векторами.
- Какой вектор называется единичным?
- Как находится проекция вектора на ось?
- Как записываются координаты радиус-вектора?
- Перечислите правила действий над векторами, заданными своими координатами.
- Сформулируйте условие коллинеарности двух векторов.
- Как вычисляется длина вектора?
- Дайте определение скалярного произведения двух векторов.
- Сформулируйте условие перпендикулярности двух векторов.
- Как выражается скалярное произведение векторов через их координаты?
- Как найти угол между векторами (формула)?
- Как вычисляется расстояние между двумя точками?
- Как найти координаты середины отрезка?
- Как найти точку, делящую отрезок в данном отношении?

Критерии оценки:
«Отлично» –выполнено 14 заданий, можно с небольшими недочетами.
«Хорошо» – выполнено 12-13 заданий.
«Удовлетворительно» – выполнено 10-11 заданий.

Самостоятельная работа

Тема: Операции над векторами.

Цель: Проверить на практике знания понятия вектор, закрепить умение и навык вычислять сумму векторов, разность векторов, произведение вектора на число, находить угол между векторами, скалярное произведение векторов, определять перпендикулярность векторов. Обобщить и систематизировать знания по теме «Вектора».

Обеспечение практической работы:
Теоретический материал методической рекомендации к практической работе.
Индивидуальные карточки с вариантом практической работы.

Проекция вектора.

Проекцией вектора $\vec{a}$ на ось l называется число

$$np_l\,\vec{a} = |\vec{a}| \times \cos\alpha,$$

где α- угол между направлениями оси l и вектора $\vec{a}$.

Свойства проекций:

1) $np_l\,(\vec{a}+\vec{b}) = np_l\,\vec{a} + np_l\,\vec{b}$

2) $\lambda \times np_l\,(\lambda \times \vec{a}) = \lambda \times np_l\,\vec{a}$, где λ-произвольное число.

Разложение вектора по координатным осям.

Пусть вектор $\bar{a} = (a_x, a_y, a_z)$ задан своими проекциями на оси координат Ox, Oy, Oz.

Выберем на оси Ox вектор $\bar{i}$ = (1,0,0), на оси Oy – вектор $\bar{j}$ = (0,1,0), на оси Oz - вектор $\bar{k}$ (0,0,1) .

Они взаимно-перпендикулярны и имеют единичную длину. Векторы $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ называют *ортами* координатных осей .

Вектор $\overrightarrow{a_x}$ лежит на оси Ох и его длина равна *x* , поэтому $\overrightarrow{a_x} = x\vec{i}$. Аналогично $\overrightarrow{a_y} = y\vec{j}$ и $\overrightarrow{a_z} = z\vec{k}$. Сумма этих векторов дает вектор $\vec{a}$: $\bar{a} = \bar{i} * a_x + \bar{j} * a_y + \bar{k} * a_z)$

Это выражение называется формулой разложения вектора по ортам координатных осей. Используя эту формулу , нетрудно получить :

$$\vec{a} + \vec{b} = (\vec{a}_x + \vec{b}_x)\,\vec{i} + (\vec{a}_y + \vec{b}_y)\,\vec{j} + (\vec{a}_z + \vec{b}_z)\,\vec{k}$$

$$\overline{\lambda \times a} = \lambda\vec{a}_x\vec{i} + \lambda\vec{a}_y\vec{j} + \lambda\vec{a}_z\vec{k}$$

Пример Радиусами-векторами вершин треугольника ABC являются **r**$_1$, **r**$_2$, и **r**$_3$, . Найти радиус-вектор точки пересечения медиан треугольника.

Решение. Имеем $\overline{BC} = r_3 - r_2;\quad \overline{BD} = (r_3 - r)/2$ (D — середина стороны BC);

$$\overline{AB} = r_2 - r_1;\quad \overline{AD} = \overline{BD} + \overline{AB} = (r_3 - r_2)/2 + r_2 - r_1 = (r_2 + r_3 - 2r_1)/2;\quad \overline{AM} = (2/3)\overline{AD}$$

(M – точка пресечения медиан), поэтому $\overline{AM} = (r_2 + r_3 - 2r_1)/3$. Итак ,

$$r = \overline{OM} = r_1 + \overline{AM} = (r_2 + r_3 - 2r_1)/3 + r_1, \text{ или } r = (r_1 + r_2 + r_3)/3.$$

Пример Найти длину вектора $\vec{a} = 20\vec{i} + 30\vec{j} - 60\vec{k}$ и его направляющие конусы.

Решение.

$$|a| = \sqrt{20\ \ +30^2 + 60^2} = 70;\quad \cos\alpha = 20/70 = 2/7,$$

$$\cos\beta = 30/70 = 3/7,\quad \cos\gamma = -60/70 = -6/7.$$

Деление отрезка в данном отношении.

Пусть *l* – некоторая прямая, АВ – отрезок на *l*.

Точка С , принадлежащая отрезку АВ , делит его в отношении λ , если

$$\overline{AC} = \lambda \times \overline{CB} .$$

Запишем это соотношение в координатном виде :

$$(x_2 - x_0, y_2 - y_0, z_2 - z_0) = \lambda(x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2),$$

здесь(x_2,y_2,z_2) - координаты точки С ,(x_0,y_0,z_0)- координаты точки А и (x_1,y_1,z_1) - координаты точки В. Отсюда :

$$x_2 = \frac{x_0 + \lambda x_1}{1+\lambda},\quad y_2 = \frac{y_0 + \lambda y_1}{1+\lambda},\quad z_2 = \frac{z_0 + \lambda z_1}{1+\lambda}.$$

Пример Отрезок АВ, где А(3,-5,2), В(5,-3,1), точками С и D разделен на три равные части. Найти координаты точек С и D.

Решение. По условию АС:СВ=1:2, AD:DB=2:1. Подставляя в формулы деления отрезка в данном отношении значения x_1 =3, y_1 =5, z_1 =2, x_2=5, y_2 =-3, z_2 =1, $\lambda = 1/2$ получим координаты точки С:

$$x = \frac{3 + (1/2)x5}{1 + (1/2)} = 11/3,\quad y = \frac{-5 + (1/2)x(-3)}{1 + 1/2} = -13/3,\quad z = \frac{2 + (1/2)x1}{1 + 1/2} = 5/3.$$

Аналогично находятся координаты точки D при λ=2:

$$x = \frac{3 + 2x5}{1+2} = 13/3,\quad y = \frac{-5 + 2x(-3)}{1+2} = -11/3,\quad z = \frac{2 + 2x1}{1+2} = 4/3.$$

Задачи для самостоятельного решения.

1. Даны 3 вершины А(3,-4,7), В(-5,3,-2), С(1,2,-3) параллелограмма ABCD. Найти его вершину D.

2. Даны 2 смежные вершины параллелограмма A(-2,6), B(2,8) и точка пересечения его диагоналей M(2,2). Найти 2 его другие вершины.

3. На оси абсцисс найти тоску M, расстояние до которой от точки A(3,-3) равно 5.

4. На оси ординат найти точку M, равноудаленную от точек A(1,-4,7) и B(5,6,-5).

5. Даны вершины треугольника A(3,-1,5). B(4,2,-5), C(-4,0,3). Найти длину медианы, проведенной из вершины A.

6. Треугольник задан координатами своих вершин A(3,-2,1), B(3,1,5), C(4,0,3). Вычислить расстояние от начала координат до точки пересечения медиан этого треугольника.

7. Отрезок с концами в точках A(3,-2) и B(6,4) разделен на три равные части. Найти координаты точек деления.

8. Определить координаты концов отрезка, который точками C(2,0,2) и D(5,-2,0) разделен на три равные части.

9. Даны точки A(1,-3,-2), B(8,0,-4), C(4,8,-3). Найти такую точку D, чтобы четырехугольник ABCD был параллелограммом.

Контрольные вопросы.

1. Понятие прямоугольной системы координат в пространстве. Ее элементы.
2. Понятие вектора. Действия над векторами в координатной форме.
3. Скалярное произведение векторов.
4. Угол между векторами.
5. Длина вектора. Разложение вектора по координатным векторам.
6. Формула Расстояния между двумя точками. Координаты середины отрезка

Пример Даны векторы $\bar{a}\{5;3;0\}$; $\bar{b}\left\{\frac{1}{2};-2;-4\right\}$; $\bar{c}\ \{-3;1;1\}$ $\bar{d}\ \{-1;1;-1\}$. Вычислить $|(2\bar{a}+\bar{k})|-4(2\bar{b}-\bar{c})\bar{d}$

Решение. $2\bar{a}\ \{5\cdot 2;3\cdot 2;0\cdot 2\}\Rightarrow 2\bar{a}\ \{10;6;0\}$

$\bar{k}\ \{0;0;1\}$

$2\bar{a}+\bar{k}\ \{10+0;6+0;0+1\}\Rightarrow 2\bar{a}+\bar{k}\ \{10;6;1\}$

$\left|2\bar{a}+\bar{k}\right|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{10^2+6^2+1^2}=\sqrt{100+36+1}=\sqrt{137}$

$2\bar{b}\left\{2\cdot\frac{1}{2};2\cdot(-2);2\cdot(-4)\right\}\Rightarrow 2\bar{b}\{1;-4;-8\}$

$2\bar{b}-\bar{c}\ \{1-(-3);-4-1;-8-1\}\Rightarrow 2\bar{b}-\bar{c}\ \{4;-5;-9\}$

$4(2\bar{b}-\bar{c})\ \{4\cdot 4;4\cdot(-5);4\cdot(-9)\}\Rightarrow 4(2\bar{b}-\bar{c})\{16;-20;-36\}$

Так как $4(2\bar{b}-\bar{c})\bar{d}$ - это скалярное произведение векторов, то по формуле скалярного произведения $\bar{a}\cdot\bar{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$ получим:

$4(2\bar{b}-\bar{c})\bar{d}=16\cdot(-1)+(-20)\cdot 1+(-36)\cdot(-1)=-16-20+36=0$

Тогда $|(2\bar{a}+\bar{k})|-4(2\bar{b}-\bar{c})\bar{d}=\sqrt{137}+0=\sqrt{137}$

Ответ: $|(2\bar{a}+\bar{k})|-4(2\bar{b}-\bar{c})\bar{d}=\sqrt{137}$

Пример Выяснить при каких значениях *m и n* данные векторы коллинеарные: $\bar{a}\{m;2;5\}$ и $\bar{b}\{1;-1;n\}$.

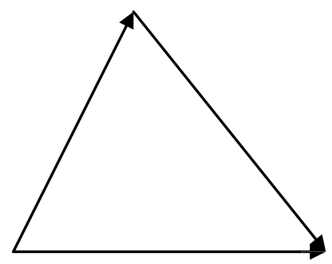
Решение. У коллинеарных векторов соответствующие коэффициенты пропорциональны. Запишем соответствующую пропорцию, из которой найдем m и n:

$\frac{m}{1}=\frac{2}{-1}=\frac{5}{n}$, откуда $m=\frac{2\cdot 1}{-1}=-2;\quad n=\frac{5\cdot(-1)}{2}=-\frac{5}{2}=-2.5$

Ответ: m = -2, n = -2.5.

Пример Вершины треугольника имеют координаты A(1; 2; 0), B(5; -1; 3), C(6; 5; 4). Найдите длины сторон треугольника и угол A треугольника ABC.

Решение



1. Найдем координаты векторов $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$

$$\overline{AB}\ \{5-1;-1-2;3-0\} \Rightarrow \overline{AB}\ \{4;-3;3\}$$
$$\overline{BC}\ \{6-5;5-(-1);4-3\} \Rightarrow \overline{BC}\ \{1;6;1\}$$
$$\overline{AC}\ \{6-1;5-2);4-0\} \Rightarrow \overline{AC}\ \{5;3;4\}$$

2. Найдем длины каждого вектора. Это и будет длины сторон треугольника ABC.

$$\left|\overline{AB}\right| = \sqrt{4^2+(-3)^2+3^2} = \sqrt{16+9+9} = \sqrt{34}$$

- длина стороны AB

$\left|\overline{BC}\right| = \sqrt{1^2+6^2+1^2} = \sqrt{1+36+1} = \sqrt{38}$ - длина стороны BC

$\left|\overline{AC}\right| = \sqrt{5^2+3^2+4^2} = \sqrt{25+9+16} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$ - длина стороны AC

3. Найдем угол BAC – это угол между векторами $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$.

$$\cos BAC = \frac{4\cdot5+(-3)\cdot3+3\cdot4}{\sqrt{34}\cdot5\sqrt{2}} = \frac{20-9+12}{5\sqrt{68}} = \frac{23}{10\sqrt{17}}.$$

$$\angle A = \arccos\frac{23\sqrt{17}}{170}$$

Ответ: $AB=\sqrt{34}, BC=\sqrt{38}, AC=5\sqrt{2}$, $\angle A = \arccos\frac{23\sqrt{17}}{170}$

Выполнить задания

Задание 1.

Какие из данных точек A(5; 9; 0), B (5; 0; 0), C(0; 0; 9), D(-6; 0; 2), E(0; 1; 0), F(5; 1; 0); G(0; 25; -1), H(9; 10; 11) принадлежат **а)** оси абсцисс; **б)** оси ординат; **в)** оси аппликат; **г)** плоскости Oxy; **д)** плоскости Oyz; **е)** плоскости Oxz?

Задание 2.

а) Запишите координаты векторов: $\overline{a} = 5\overline{i} - 2\overline{j} - 3\overline{k}$**;** $\overline{b} = -\overline{i} - 7\overline{k}$; $\overline{c} = 8\overline{j}$

б) Запишите разложения векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ по координатным векторам $\overline{i}$**,** $\overline{j}$**,** $\overline{k}$ и найдите их скалярное произведение**:** $\overline{a}\{-2;3;5\}$; $\overline{b}\left\{\frac{1}{2};-1;4\right\}$

Задание 3.

Даны векторы $\overline{a}\{2;-3;4\}$; $\overline{b}\left\{-\frac{1}{2};2;0\right\}$; $\overline{c}\ \{-3;2;-6\}$; $\overline{d}\{1;-1;0\}$

Вычислить $|(-4\overline{a}+5\overline{i})| - (4\overline{b}-3\overline{c})\overline{d}$

Задание 4.

При каких значениях k и c данные векторы коллинеарные:

а) $\overline{a}\{2;c;3\}$, $\overline{b}\{3;2;k\}$

б) $\overline{a}\{k;c;2\}$, $\overline{b}\{6;9;3\}$

Задание 5.

Докажите что точки A(14; -8; -1), B(7; 3; -1), C(-6; 4; -1), D(1; -7; 1) являются вершинами ромба ABCD. Найти периметр, площадь и углы ромба.

Проверочная самостоятельная работа по теме «Действия над векторами»

Форма самостоятельной деятельности: подготовить реферат по предложенной теме. Реферат должен быть выполнен с соблюдением методических рекомендаций по написанию реферата. Решить задачи.

1 Векторное произведение двух векторов

Пример Найти модуль векторного произведения векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$, если $|\bar{a}|=10, |\bar{b}|=2$ и скалярное произведение этих векторов равно 12.

Решение: По формуле: $\left|\left[\bar{a},\bar{b}\right]\right| = |\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cdot\sin\left(\widehat{\bar{a},\bar{b}}\right)$

Угол между векторами определим из условия:

$\left(\bar{a},\bar{b}\right)=12$, но $\left(\bar{a},\bar{b}\right)=|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cdot\cos\left(\widehat{\bar{a},\bar{b}}\right)$,

откуда $\cos\left(\widehat{\bar{a},\bar{b}}\right)=\dfrac{\left(\bar{a},\bar{b}\right)}{|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|}=\dfrac{12}{2\cdot 10}=\dfrac{3}{5}.$

$$\sin(\widehat{\bar{a},\bar{b}}) = \pm\sqrt{1-\cos^2(\widehat{\bar{a},\bar{b}})} = \pm\sqrt{1-\frac{9}{25}} = \pm\frac{4}{5}$$

Знак возьмем только "+", т.к. находим модуль векторного произведения.

$$\left|\left[\bar{a},\bar{b}\right]\right| = 10\cdot 2\cdot\frac{4}{5}=16$$

Ответ: $\left|\left[\bar{a},\bar{b}\right]\right| = 16$

Пример Даны векторы $\bar{a}=(2,3,1), \bar{b}=(1,1,0)$ Найти $\left|\left[\bar{a},\bar{b}\right]\right|$

Решение:

$$\left[\bar{a},\bar{b}\right]=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 2 & 3 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{vmatrix}=\bar{i}\cdot\begin{vmatrix}3 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix}-\bar{j}\cdot\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix}+\bar{k}\cdot\begin{vmatrix}2 & 3\\ 1 & 1\end{vmatrix}=-1\cdot\bar{i}+1\cdot\bar{j}-1\cdot\bar{k}$$

$$\left|\left[\bar{a},\bar{b}\right]\right| = \left|-1\cdot\bar{i}+1\cdot\bar{j}-1\cdot\bar{k}\right| = \sqrt{(-1)^2+1^2+(-1)^2} = \sqrt{3}$$

Ответ: $\sqrt{3}$

2 Смешанное произведение трех векторов

Пример В треугольнике *ABC* даны вершины *A*(3,2), *B*(5,-2), *C*(1,0).

Найти:

а) уравнение стороны *AB* и ее угловой коэффициент,

б) уравнение стороны, проходящей через точку *C* параллельно прямой *AB*,

с) уравнение высоты, опущенной из точки *C* на основание *AB*,

г) длину высоты.

Решение:

а) составляя уравнение стороны *AB*, используем уравнение прямой, проходящей через две данные точки:

$$\frac{x-x_A}{x_B-x_A}=\frac{y-y_A}{y_B-y_A},\quad \frac{x-3}{5-3}=\frac{y-2}{-2-2},\ \text{откуда}\quad y+2x-8=0$$

или $y=-2x+8$, следовательно, $k_{AB}=-2$,

б) запишем уравнение прямой, проходящей через данную точку $C(x_c, y_c)$: $y-y_c=k(x-x_c)$.

Так как искомая прямая параллельна прямой AB, то их угловые коэффициенты равны, поэтому $k = k_{AB}$= -2.
Итак, y-0 = -2(x-1) или y = -2x+2,
в) воспользуемся тем же уравнением, но, так как высота, опущенная из точки C, перпендикулярна AB, то $k = -\frac{1}{k_{AB}} = \frac{1}{2}$, поэтому $y - 0 = \frac{1}{2}(x-1)$ или $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$,
г) длину высоты, опущенной из точки C, можно определить как расстояние от прямой AB до точки C, для чего общее уравнение прямой ABy+2x-8=0 приведем к нормальному виду, определив нормирующий множитель μ:

$$\mu = \frac{1}{\pm\sqrt{A^2+B^2}} = \frac{1}{\sqrt{1^2+2^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Нормальное уравнение прямой AB будет иметь вид: $\frac{y+2x-8}{\sqrt{5}} = 0.$

Следовательно, $h_c = \left|\frac{y_c+2x_c-8}{\sqrt{5}}\right| = \frac{6}{\sqrt{5}}.$

Проверочная контрольная работа

Вариант 1

№ п/п	Название операции	Формулы
1	Найти сумму векторов	$\vec{a}\{1;-2;3\}$, $\vec{b}\{4;0;-1\}$ $\vec{a}+\vec{b}\{x_1+x_2\ ;\ y_1+y_2\ ;\ z_1+z_2\}$
2	Найти разность векторов	$\vec{a}\{4;1;-3\}$, $\vec{b}\{0;-5;2\}$ $\vec{a}-\vec{b}\{x_1-x_2\ ;\ y_1-y_2\ ;\ z_1-z_2\}$
3	Найти произведение вектора на число	$\vec{a}\{-1;3;1\}$, δ – число $\delta=-3$ $\delta\vec{a}\{\delta\cdot x;\ \delta y\ ;\delta z\}$
4	Вычислить координаты середины отрезка	Точка А$(1;2;-3)$. Точка В (-3;4;-1) .Точка С-середина отрезка АВ. С(x_c $y_c;z_c$) $x_c = \frac{x_1+x_2}{2}$ $y_c = \frac{y_1+y_2}{2}; z_c = \frac{z_1+z_2}{2}$.
5	Найти координаты вектора	Точка А$(5;0;-3)$. Точка В (-1;4;-7) .Находим координаты вектора $\overrightarrow{AB}$. Из координат конца вычислить координаты начала вектора $\overrightarrow{AB}\ \{x_2-x_1\ ;y_2-y_1;\ z_2-z_1\}$
6	Найти длину вектора	$\vec{a}\{3,-2,0\}$ $\|\vec{a}\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$
7	Вычислить скалярное произведение векторов	$\vec{a}\{-2;3;7\}$, $\vec{b}\{-9;0;2\}$ $\vec{a}\cdot\vec{b} = x_1\cdot x_2 + y_1\cdot y_2 + z_1\cdot z_2$
8	Найти косинус угла между векторами	$\vec{a}\{2;0;1\}$, $\vec{b}\{-3;1;2\}$

		$\cos\alpha = \dfrac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$
9	При каких значениях m и n векторы коллинеарны?	$\vec{a}\{m;3;1\}$, $\vec{b}\{1;n;2\}$ $\dfrac{x_1}{x_2} = \dfrac{y_1}{y_2} = \dfrac{z_1}{z_2} = k$
10	Проверьте перпендикулярность векторов	$\vec{a}\{-4;0;1\}$, $\vec{b}\{2;7;8\}$ $x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2 = 0$ - условие перпендикулярности векторов

Вариант 2

№ п/п	Название операции	Формулы
1	Найти сумму векторов	$\vec{a}\{2;-3;4\}$, $\vec{b}\{-1;2;0\}$ $\vec{a} + \vec{b}\{x_1 + x_2\ ;\ y_1 + y_2\ ;\ z_1 + z_2\}$
2	Найти разность векторов	$\vec{a}\{4;-5;7\}$, $\vec{b}\{3;-1;2\}$ $\vec{a} - \vec{b}\{x_1 - x_2\ ;\ y_1 - y_2\ ;\ z_1 - z_2\}$
3	Найти произведение вектора на число	$\vec{a}\{-2;4;0\}$, δ – число $\delta = -4$ $\delta\vec{a}\{\delta \cdot x;\ \delta y;\delta z\}$
4	Вычислить координаты середины отрезка	Точка А$(-3;1;2)$ Точка В (2;-3;1] Точка С-середина отрезка АВ. С(x_c, y_c, z_c) $x_c = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$, $y_c = \dfrac{y_1 + y_2}{2}$, $z_c = \dfrac{z_1 + z_2}{2}$.
5	Найти координаты вектора	Точка А$(6;-3;4)$. Точка В (1;-4;7] . Находим координаты вектора $\overrightarrow{AB}$. Из координат конца вычислить координаты начала вектора $\overrightarrow{AB}\ \{x_2 - x_1\ ; y_2 - y_1,\ z_2 - z_1\}$
6	Найти длину вектора	$\vec{a}\{0,2,-2\}$ $\lvert\vec{a}\rvert = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
7	Вычислить скалярное произведение векторов	$\vec{a}\{-3;2;9\}$, $\vec{b}\{-7;0;3\}$ $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2$
8	Найти косинус угла между векторами	$\vec{a}\{4;1;0\}$, $\vec{b}\{-5;3;1\}$ $\cos\alpha = \dfrac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$
9	При каких значениях m и n векторы коллинеарны?	$\vec{a}\{m;5;3\}$, $\vec{b}\{2;n;4\}$ $\dfrac{x_1}{x_2} = \dfrac{y_1}{y_2} = \dfrac{z_1}{z_2} = k$
10	Проверьте перпендикулярность векторов	$\vec{a}\{0;\ -3;2\}$, $\vec{b}\{9;4;6\}$ $x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2 = 0$ - условие перпендикулярности векторов

Самостоятельная работа по теме «Уравнение линии»
Цель: В ходе решения задач закрепить полученные знания и умения

Решить самостоятельно

Пример: Привести к каноническому виду уравнения следующих прямых:

1) $\begin{cases} x-2y+3z-4=0, \\ 3x+2y-5z-4=0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x-2y+3z+1=0, \\ 2x+y-4z-8=0; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 5x+y+z=0, \\ 2x+3y-2z+5=0; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 2x-y+3z-1=0, \\ 5x+4y-z-7=0. \end{cases}$

Пример: Составить каноническое уравнение прямой, проходящей через точку M0(2;0;-3) параллельно: 1) вектору $\bar{a}=(2,-3,5)$; 2) прямой $\frac{x-1}{5}=\frac{y+2}{2}=\frac{z+1}{-1}$; 3) оси Ох; 4)оси Оу.

Пример: Составить каноническое уравнение прямой, проходящей через две точки: 1) (1;-2;1) и (3;1;-1); 2) (3;-1;0) и (1;0;-3); 3) (0;-2;3) и (3;-2;1); 4) (1;2;-4) и (-1;2;-4).

Пример: Составить параметрические уравнения следующих прямых:

1) $\begin{cases} 2x+3y-z-4=0, \\ 3x-5y+2z+1=0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x+2y-z-6=0, \\ 2x-y+z+1=0; \end{cases}$

Пример: Найти угол между прямыми:

1) $\begin{cases} x-y+z-4=0, \\ 2x+y-2z+5=0; \end{cases}$ и $\begin{cases} x+y+z-4=0, \\ 2x+3y-z-6=0; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 4x-y-z+12=0, \\ y-z-2=0; \end{cases}$ и $\begin{cases} 3x-2y+16=0, \\ 3x-z=0; \end{cases}$

Пример: Написать уравнение перпендикуляра, опущенного из точки M0(2;-3;4) на ось Ох.

Пример: Найти угол между прямыми и плоскостями:

1) $\begin{cases} y=3x-1, \\ 2z=-3x+2 \end{cases}$ $и \quad 2x+y+z-4=0;$

.

Самостоятельная работа по теме «Прямые и плоскости в пространстве»

Цель: Развитие пространственного представления.

Требования к знаниям и умениям

Студент должен:

иметь представление:

- о логической структуре геометрии, аксиомах, теоремах и системе аксиом планиметрии;
- о скрещивающихся, параллельных и пересекающихся прямых;
- о параллельной проекции точки, прямой, фигуры;
- об угле наклона прямой к плоскости;
- о двугранном угле, линейном угле двугранного угла и его величине;
- об ортогональном и параллельном проектированиях;
- о расстоянии токи до плоскости, от прямой до плоскости, расстояния между скрещивающимися прямыми и между фигурами;
- о многогранном угле и свойствах его плоских углов.

Знать:

- основные понятия стереометрии;
- аксиомы стереометрии и следствия из них;
- взаимное расположение прямых, прямой и плоскости, двух плоскостей в пространстве;
- основные теоремы о параллельности прямой и плоскости, параллельности двух плоскостей;
- понятие угла между прямыми, угла между прямой и плоскостью, двугранного угла, угла между плоскостями;
- основные теоремы о перпендикулярности прямой и плоскости, перпендикулярности двух плоскостей;
- формулу расстояния от точки до плоскости.

Уметь:

- устанавливать в пространстве параллельность прямых, прямой и плоскости, двух плоскостей, используя признаки и основные теоремы параллельности;
- применять признак перпендикулярности прямой и плоскости, теорему о трёх перпендикулярах, признак перпендикулярности плоскостей для вычисления углов и расстояний в пространстве;
- вычислять углы между плоскостями;
- находить расстояние между скрещивающимися прямыми, от прямой

Виды самостоятельной работы студентов

Работа над учебным материалом: чтение текста, составление плана и конспектирование текста.

Подготовка презентаций на тему:

- «Взаимное расположение прямых в пространстве»
- «Взаимное расположение прямых и плоскостей в пространстве»
- «Взаимное расположение плоскостей в пространстве»
- «Параллельное проектирование»
- «Ортогональное проектирование»

Работа должна соответствовать методическим рекомендациям по созданию презентации.

Самостоятельная работа Составление кроссворда на тему: «Взаимное расположение прямых и плоскостей в пространстве»

Цель: Развитие интереса к предмету, интуиции, логического мышления.

Кроссворд-это игра, состоящая в разгадывании слов по определениям.

Методические рекомендации

При выполнении задания воспользуйтесь методическими рекомендациями по составлению кроссворда.

Образец оформления и составления кроссвордов

По горизонтали:

1. Сторона прямоугольного треугольника.
4. Он есть у функции и последовательности.
8. Его штаны равны во все стороны.
10. Полный круг вращения.
13. Французский математик, специалист теории вероятностей.
14. Арифметическое действие.
16. Гектар — ... площади.

17. Часть матрицы.
18. Свойство углов.
19. Полупрямая.
22. Нейтральный элемент относительно умножения.
23. Группа повторяющихся цифр в бесконечной десятичной дроби.
24. Наибольший общий ...

По вертикали:

2. Бублик как математический объект.
3. Положение, нуждающееся в доказательстве.
4. Поверхность, имеющая 2 измерения.
5. Линейное алгебраическое уравнение.
6. Тригонометрическая функция.
7. Один из двух экстремумов.
9. Функция по своей сути.
11. Часть прямой.
12. Линия.
15. Геометрическая фигура, образованная двумя лучами.
17. Полный квадрат первого двузначного числа.
18. Для него необходимы натуральные числа.
20. В теории графов: маршрут, все ребра которого различны.
21. В теории графов: замкнутый маршрут, все ребра которого различны.

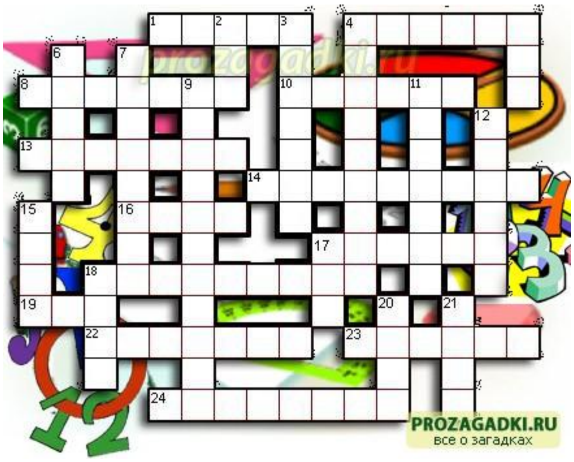
Ответы:

По горизонтали:

1-катет;
4-предел;
8-пифагор;
10-оборот;
13-пуассон;
14-умножение;
16-мера;
17-строка;
18-смежность;
19-луч;
22-единица;
23-период;
24-делитель;

По вертикали:

2-тор;
3-теорема;
4-плоскость;
5-лау;
8-синус;
7-максимум;
9-отображение;
11-отрезок;
12-кривая;
15-угол;
17-сто;
18-счёт;
20-цепь;
21-цикл.



Самостоятельная работа по теме « Кривые второго порядка. Приведение к каноническому виду общего уравнения кривой второго порядка»

Цель: Проверка усвоения знаний по составлению уравнений прямых и кривых 2-го порядка.. Повторить и систематизировать знания по данной теме. Освоить способы составления уравнений прямых и кривых 2-го порядка, их

Справочный материал

Рассмотрим в декартовой прямоугольной системе координат Oxy уравнение второго порядка общего вида:

$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$,

где не все коэффициенты A, B и C равны одновременно нулю.

Оно задаёт кривую второго порядка.

Наша цель: поменять систему координат так, чтобы максимально упростить данное уравнение.

Для этого сначала (если $B \neq 0$) повернём исходный базис (координатные оси Ox и Oy) на угол α против часовой стрелки таким образом, чтобы новые оси Ox' и Oy' стали параллельны осям кривой, при этом исчезнет слагаемое 2Bxy:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix},$$

где $A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ -

матрица линейного преобразования: поворот на угол α против часовой стрелки.

Или, наоборот, $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

$A(x'\cos\alpha - y'\sin\alpha)^2 + 2B(x'\cos\alpha - y'\sin\alpha)(x'\sin\alpha + y'\cos\alpha) +$
$+ C(x'\sin\alpha + y'\cos\alpha)^2 + 2D(x'\cos\alpha - y'\sin\alpha) + 2E(x'\sin\alpha + y'\cos\alpha) + F = 0$

Выберем угол α так, чтобы коэффициент при произведении x'y' обратился в ноль, т.е. чтобы выполнялось равенство

$-2A\cos\alpha\sin\alpha + 2B(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) + 2C\sin\alpha\cos\alpha = 0$

или $\mathrm{tg}\,2\alpha = \dfrac{2B}{A - C}$ или $2B\,\mathrm{tg}^2\alpha + 2(A - C)\mathrm{tg}\,\alpha - 2B = 0$

В новой системе координат Ox'y' (после поворота на угол α), учитывая, что

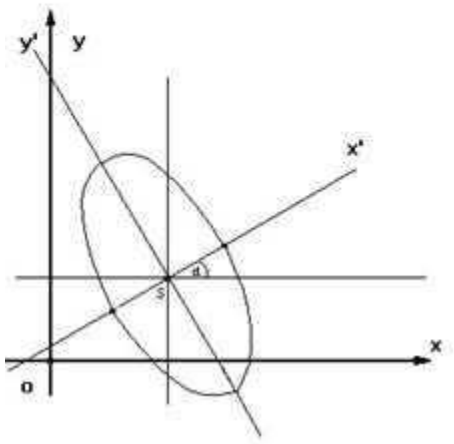
$$\sin^2\alpha = \frac{\mathrm{tg}^2\alpha}{1 + \mathrm{tg}^2\alpha};\ \cos^2\alpha = \frac{1}{1 + \mathrm{tg}^2\alpha},$$

уравнение будет иметь вид

$A'x'^2 + C'y'^2 + 2D'x' + 2E'y' + F' = 0$, где коэффициенты A' и C' не равны одновременно нулю.

Выполним параллельный перенос осей Ox' и Oy' до совпадения их с осями кривой, при этом начало координат совпадёт с центром (или вершиной, в случае параболы) кривой. Техника преобразований на данном этапе заключается в выделении полного квадрата.

Таким образом, мы получим канонические уравнения кривых второго порядка.



Всего возможны 9 качественно различных случаев (включая случаи вырождения и распадения):

1. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (эллипс),
2. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ (гипербола),
3. $y^2 = 2px$ (парабола),
4. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$ (мнимый эллипс),
5. $y^2 + a^2 = 0$ (пара мнимых параллельных прямых),
6. $y^2 - a^2 = 0$ (пара параллельных прямых),
7. $y^2 = 0$ (пара совпавших прямых),
8. $a^2x^2 + c^2y^2 = 0$ (точка (пара мнимых пересекающихся прямых)),
9. $a^2x^2 - c^2y^2 = 0$ (пара пересекающихся прямых).

Пример Записать классическое уравнение гиперболы $y = \frac{1}{x}$ в канонической форме. Сделать чертёж.

Решение.

$y = \frac{1}{x} \Rightarrow yx-1=0$,

сделаем замену переменных:

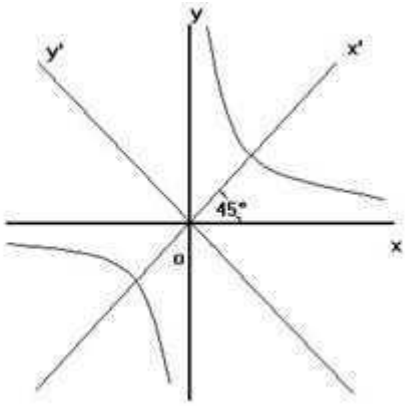
$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, тогда

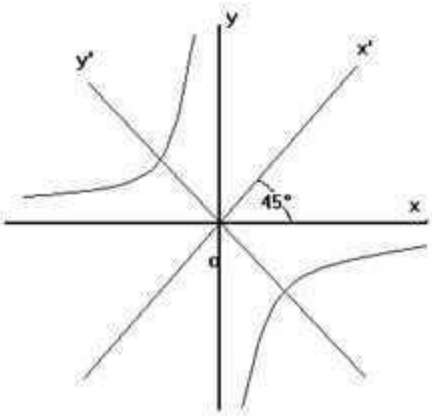
$(x'\cos\alpha - y'\sin\alpha)(x'\sin\alpha + y'\cos\alpha) - 1 = 0$,

$x'^2\cos^2\alpha - y'^2\cos\alpha\sin\alpha + x'y'(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) - 1 = 0$,

$(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = 0 \Rightarrow \alpha = 45^\circ \Rightarrow \frac{x'^2}{2} - \frac{y'^2}{2} = 1.$

Совершенно аналогично, каноническое уравнение для гиперболы $y = -\frac{1}{x}$ будет иметь вид: $\frac{x'^2}{2} - \frac{y'^2}{2} = -1$ или $\frac{y'^2}{2} - \frac{x'^2}{2} = 1.$





Самостоятельная работа по теме «Собственные значения и собственные векторы, линейного преобразования»

Справочный материал Рассмотрим <u>частный случай</u>. Пусть А – некоторое линейное преобразование плоскости, матрица которого равна $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$. Тогда преобразование А может быть задано формулами:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}; \qquad \begin{cases} x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{cases}$$

в некотором базисе $\overline{e_1}, \overline{e_2}$.

Если преобразование А имеет собственный вектор с собственным значением λ, то А $\bar{x} = \lambda\bar{x}$.

$$\begin{cases} x_1' = \lambda x_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ x_2' = \lambda x_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 = 0 \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 = 0 \end{cases}$$

Т.к. собственный вектор $\bar{x}$ ненулевой, то x_1 и x_2 не равны нулю одновременно. Т.к. данная система однородна, то для того, чтобы она имела нетривиальное решение, определитель системы должен быть равен нулю. В противном случае по правилу Крамера система имеет единственное решение – нулевое, что невозможно.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - a_{12}a_{21} = \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})$$

Полученное уравнение является **характеристическим уравнением линейного преобразования А**.

Таким образом, можно найти собственный вектор $\bar{x}$ (x_1, x_2) линейного преобразования А с собственным значением λ, где λ - корень характеристического уравнения, а x_1 и x_2 – корни системы уравнений при подстановке в нее значения λ.

Понятно, что если характеристическое уравнение не имеет действительных корней, то линейное преобразование А не имеет собственных векторов.

Следует отметить, что если $\bar{x}$ - собственный вектор преобразования А, то и любой вектор ему коллинеарный – тоже собственный с тем же самым собственным значением λ.

Действительно, $A(k\bar{x}) = kA\bar{x} = k\lambda\bar{x} = \lambda(k\bar{x})$. Если учесть, что векторы имеют одно начало, то эти векторы образуют так называемое **собственное направление** или **собственную прямую**.

Т.к. характеристическое уравнение может иметь два различных действительных корня λ_1 и λ_2, то в этом случае при подстановке их в систему уравнений получим бесконечное количество решений. (Т.к. уравнения линейно зависимы). Это множество решений определяет две **собственные прямые**.

Если характеристическое уравнение имеет два равных корня $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, то либо имеется лишь одна собственная прямая, либо, если при подстановке в систему она превращается в систему вида: $\begin{cases} 0\cdot x_1 + 0\cdot x_2 = 0 \\ 0\cdot x_1 + 0\cdot x_2 = 0 \end{cases}$. Эта система удовлетворяет любым значениям x_1 и x_2. Тогда все векторы будут собственными, и такое преобразование называется **преобразованием подобия**.

Пример Найти характеристические числа и собственные векторы линейного преобразования с матрицей A = $\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Запишем линейное преобразование в виде: $\begin{matrix} x_1' = \lambda x_1 = 5x_1 + 4x_2 \\ x_2' = \lambda x_2 = 2x_1 + 3x_2 \end{matrix}$

Составим характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 4 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)(3-\lambda) - 8 = 15 - 3\lambda - 5\lambda + \lambda^2 - 8 = 0$$

$$\lambda^2 - 8\lambda + 7 = 0;$$

Корни характеристического уравнения: $\lambda_1 = 7$; $\lambda_2 = 1$;

Для корня $\lambda_1 = 7$: $\begin{cases} (5-7)x_1 + 4x_2 = 0 \\ 2x_1 + (3-7)x_2 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} -2x_1 + 4x_2 = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 = 0 \end{cases}$

Из системы получается зависимость: $x_1 - 2x_2 = 0$. Собственные векторы для первого корня характеристического уравнения имеют координаты: ***(t; 0,5t)*** где *t*- параметр.

Для корня $\lambda_2 = 1$: $\begin{cases} (5-1)x_1 + 4x_2 = 0 \\ 2x_1 + (3-1)x_2 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 4x_1 + 4x_2 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases}$

Из системы получается зависимость: $x_1 + x_2 = 0$. Собственные векторы для второго корня характеристического уравнения имеют координаты: ***(t; -t)*** где *t*- параметр.

Полученные собственные векторы можно записать в виде:

$$\overrightarrow{u_1} = t(\overrightarrow{e_1} + 0{,}5\overrightarrow{e_2}); \quad \overrightarrow{u_2} = t(\overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2}).$$

Пример Найти характеристические числа и собственные векторы линейного преобразования с матрицей A = $\begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$.

Запишем линейное преобразование в виде: $\begin{matrix} x_1' = \lambda x_1 = 6x_1 - 4x_2 \\ x_2' = \lambda x_2 = 4x_1 - 2x_2 \end{matrix}$

$$\begin{cases} (6-\lambda)x_1 - 4x_2 = 0 \\ 4x_1 - (2+\lambda)x_2 = 0 \end{cases}$$

Составим характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} 6-\lambda & -4 \\ 4 & -2-\lambda \end{vmatrix} = -(6-\lambda)(2+\lambda) + 16 = -12 - 6\lambda + 2\lambda + \lambda^2 + 16 = 0$$

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0;$$

Корни характеристического уравнения: $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$;

Получаем: $\begin{cases} (6-2)x_1 - 4x_2 = 0 \\ 4x_1 - 4x_2 = 0 \end{cases}$

Из системы получается зависимость: $x_1 - x_2 = 0$. Собственные векторы для первого корня характеристического уравнения имеют координаты: ***(t; t)*** где *t*- параметр.

Собственный вектор можно записать: $\vec{u} = (\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2})t$.

Рассмотрим другой <u>частный случай</u>. Если $\bar{x}$ - собственный вектор линейного преобразования A, заданного в трехмерном линейном пространстве, а x_1, x_2, x_3 – компоненты этого вектора в некотором базисе $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$, то

$$x_1' = \lambda x_1; \quad x_2' = \lambda x_2; \quad x_3' = \lambda x_3,$$

где λ - собственное значение (характеристическое число) преобразования А.

Если матрица линейного преобразования А имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \text{ то } \begin{cases} \lambda x_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ \lambda x_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ \lambda x_3 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{cases}$$

Характеристическое уравнение: $\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix} = 0$

Раскрыв определитель, получим кубическое уравнение относительно λ. Любое кубическое уравнение с действительными коэффициентами имеет либо один, либо три действительных корня.

Тогда любое линейное преобразование в трехмерном пространстве имеет собственные векторы.

Пример Найти характеристические числа и собственные векторы линейного преобразования А, матрица линейного преобразования А = $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Составим характеристическое уравнение:

$$\begin{cases} x_1' = \lambda x_1 = 1\cdot x_1 + 1\cdot x_2 + 3\cdot x_3 \\ x_2' = \lambda x_2 = 1\cdot x_1 + 5\cdot x_2 + 1\cdot x_3 \\ x_3' = \lambda x_3 = 3\cdot x_1 + 1\cdot x_2 + 1\cdot x_3 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 3 \\ 1 & 5-\lambda & 1 \\ 3 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(1 - \lambda)((5 - \lambda)(1 - \lambda) - 1) - (1 - \lambda - 3) + 3(1 - 15 + 3\lambda) = 0$$

$$(1 - \lambda)(5 - 5\lambda - \lambda + \lambda^2 - 1) + 2 + \lambda - 42 + 9\lambda = 0$$

$$(1 - \lambda)(4 - 6\lambda + \lambda^2) + 10\lambda - 40 = 0$$

$$4 - 6\lambda + \lambda^2 - 4\lambda + 6\lambda^2 - \lambda^3 + 10\lambda - 40 = 0$$

$$-\lambda^3 + 7\lambda^2 - 36 = 0$$

$$-\lambda^3 + 9\lambda^2 - 2\lambda^2 - 36 = 0$$

$$-\lambda^2(\lambda + 2) + 9(\lambda^2 - 4) = 0$$

$$(\lambda + 2)(-\lambda^2 + 9\lambda - 18) = 0$$

Собственные значения: $\lambda_1 = -2$; $\lambda_2 = 3$; $\lambda_3 = 6$;

1) Для $\lambda_1 = -2$: $\begin{cases} (1+2)x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + 7x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 + 7x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$

Если принять $x_1 = 1$, то $\begin{cases} 7x_2 + x_3 = -1 \\ x_2 + 3x_3 = -3 \end{cases}$ $\Rightarrow$ $x_2 = 0$; $x_3 = -1$;

Собственные векторы: $\vec{u}_1 = (\vec{e}_1 - \vec{e}_3)\cdot t$.

2) Для $\lambda_2 = 3$: $\begin{cases} -2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$

Если принять $x_1 = 1$, то $\begin{cases} 2x_2 + x_3 = -1 \\ x_2 - 2x_3 = -3 \end{cases} \Rightarrow$ $x_2 = -1$; $x_3 = 1$;

Собственные векторы: $\overrightarrow{u_2} = (\overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3}) \cdot t.$

3) Для $\lambda_3 = 6$: $\begin{cases} -5x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 = 0 \end{cases}$

Если принять $x_1 = 1$, то $\begin{cases} -x_2 + x_3 = -1 \\ x_2 - 5x_3 = -3 \end{cases} \Rightarrow$ $x_2 = 2$; $x_3 = 1$;

Собственные векторы: $\overrightarrow{u_3} = (\overrightarrow{e_1} + 2\overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3}) \cdot t.$

Самостоятельная работа по теме «*Модель Леонтьева многоотраслевой экономики*»

Цель*:* Закрепить знания, умения действий над матрицами при решении экономических задач

1. В таблице приведены коэффициенты прямых затрат и конечная продукция отраслей на плановый период, усл. ден. ед,

Отрасль		*Потребление*		*Конечный продукт*
		Промышленность	Сельское хозяйство	
Производство	Промышленность	0,3	0,2	300
	Сельское хозяйство	0,15	0,1	100

Найти:

а) плановые объемы валовой продукции отраслей, межотраслевые поставки, чистую продукцию отраслей;

б) необходимый объем валового выпуска каждой отрасли, если конечное потребление продукции сельского хозяйства увеличится на 20%, а промышленности на 10%.

Решение:

а) выпишем матрицу коэффициентов прямых затрат A, вектор конечной продукции Y:

$A=\begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}2 \\ 0{,}15 & 0{,}1 \end{pmatrix}$, $Y=\begin{pmatrix} 300 \\ 100 \end{pmatrix}$.

Заметим, что матрица A продуктивна, т.к. ее элементы положительны и сумма элементов в каждом столбце меньше единицы.

Найдем матрицу

$E - A = \begin{pmatrix} 1-0{,}3 & -0{,}2 \\ -0{,}15 & 1-0{,}1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}7 & -0{,}2 \\ -0{,}15 & 0{,}9 \end{pmatrix}$.

Тогда матрица полных затрат

$S=(E-A)^{-1}= \frac{1}{0{,}6}\begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}2 \\ 0{,}15 & 0{,}7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}5 & 0{,}33 \\ 0{,}25 & 1{,}17 \end{pmatrix}$.

По формуле вычислим вектор валового продукта X:$X=\begin{pmatrix} 1{,}5 & 0{,}33 \\ 0{,}25 & 1{,}17 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 300 \\ 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 483 \\ 192 \end{pmatrix}$.

Межотраслевые поставки x_{ij} найдем по формулам $x_{ij}=a_{ij}*x_{ij}$.

Например; $x_{11}=a_{11}x_{11}$=0,3*483=144,9.

Валовые продукты отраслей, межотраслевые поставки, а так же чистая продукция отраслей, найденная в соответствии с п. 6, приведены в таблице (в усл. ден.ед):

Отрасль		*Потребление*		*Конечный продукт*	*Валовой продукт*
		Промыш-леность	*Сельское хозяйство*		
Производство	*Промыш-леность*	*144,9*	*38,4*	*300*	*483*

	Сельское хозяйство	*72,5*	*19,2*	*100*	*192*
Чистая продукция		*265,6*	*134,4*		
Валовая продукция		*483*	*192*		

б) По условию вектор конечного потребления
$Y=\begin{pmatrix}300*1,1\\100*1,2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}330\\120\end{pmatrix}$.

Тогда по формуле вектор продукции$X=S*Y=\begin{pmatrix}1,5 & 0,33\\0,25 & 1,17\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}330\\120\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}534,6\\221,9\end{pmatrix}$.

Таким образом, выпуск в промышленности нужно увеличить до 534,6 усл.ден.ед, а в сельском хозяйстве – до 221,9 усл.ден.ед.

Задачи для самоконтроля

2. Выяснить продуктивна ли матрица A:

а)$A=\begin{pmatrix}0,6 & 0,5\\0,7 & 0,8\end{pmatrix}$; *б)*$A=\begin{pmatrix}0,6 & 0,2\\0,2 & 0,8\end{pmatrix}$;

в)$A=\begin{pmatrix}0,2 & 0,3 & 0\\0,1 & 0 & 0,3\\0,6 & 0,5 & 0,7\end{pmatrix}$; *г)* $A=\begin{pmatrix}0,1 & 0,9 & 0,4\\0,5 & 0,5 & 0,5\\0,3 & 1,1 & ,03\end{pmatrix}$.

1. Дана матрица прямых затрат $A=\begin{pmatrix}0,1 & 0,5\\0,3 & 0,2\end{pmatrix}$.

Найти: а) вектор валовой продукции X для обеспечения выпуска конечной продукции $\mathrm{Y}=\begin{pmatrix}400\\500\end{pmatrix}$;

б) приращение вектора ΔX для увеличения выпуска конечной продукции на $\Delta\mathrm{Y}=\begin{pmatrix}100\\50\end{pmatrix}$.

2. Работа системы, состоящей из двух отраслей, в течение некоторого периода характеризуется следующими данными (усл.ден.ед):

Отрасль	*Потребление*		*Чистая продукция*
	I	*II*	
I	*100*	*160*	*240*
II	*275*	*40*	*85*

Вычислить матрицу прямых затрат.

3. Имеются данные о работе системы нескольких отраслей в прошлом периоде и план выпуска конечной продукции Y_1 в будущем периоде (усл.ден.ед):

Отрасль	*Потребление*		*Чистая продукция*	*План* Y_1
	I	II		
I	80	120	300	350
II	70	30	200	300

Найти матрицы прямых и полных затрат, а также выпуск валовой продукции в плановом периоде, обеспечивающей выпуск конечной продукции Y_1.

4. Дана матрица S полных затрат некоторой модели межотраслевого баланса. Найти: а)приращение валового выпуска ΔX_1, обеспечивающее приращение конечной продукции ΔY_1; б)приращение конечной продукции Y_2, соответствующее приращению валового выпуска ΔX_2:

$S=\begin{pmatrix}1,5 & 0,2 & 0,1\\0,5 & 1,5 & 0,3\\0,2 & 0,1 & 1,1\end{pmatrix}$; а) $\Delta Y_1=\begin{pmatrix}10\\30\\20\end{pmatrix}$; б) $\Delta X_2=\begin{pmatrix}5\\-10\\20\end{pmatrix}$.

5. Частным лицом куплены три пакета акций общей стоимостью 485 ден.ед., причем акции первой группы куплены по 5 ден.ед за акцию, второй – по 20, третьей – по 13. Через месяц стоимость акций первой, второй и третьей групп составила соответственно 6, 14 и 19 ден.ед., а стоимость всего пакета была 550 ден.ед. Еще через месяц они стоили по 8, 22 и 20 ден.ед. соответственно, а весь пакет стоил 660 ден.ед. Сколько акций каждой группы было куплено?

6. Дана матрица прямых затрат $A=\begin{pmatrix}0{,}5 & 0{,}3\\ 0{,}2 & 0{,}4\end{pmatrix}$. Найти: а) матрицу полных затрат S; б) вектор валовой продукции X для обеспечения выпуска конечной продукции $Y=\begin{pmatrix}1200\\ 840\end{pmatrix}$; в) приращение вектора конечной продукции $\Delta\ Y$, соответствующее приращению валового выпуска $\Delta X=\begin{pmatrix}1500\\ 1000\end{pmatrix}$.

Условия итоговой домашней контрольной работы для очной и заочной форм обучения

Задания для контрольных работ

Задание 1 **Дана система линейных уравнений. Требуется показать, что система совместна и найти ее решение тремя способами: а) по формулам Крамера, выполнить проверку решения; б) методом Гаусса, в) методом обратной матрицы**

1. $\begin{cases}2x_1+3x_2-x_3=5\\ 3x_1+2x_2-2x_3=1\\ 4x_1+3x_2+x_3=13\end{cases}$

2. $\begin{cases}x_1-x_2+4x_3=-3\\ x_1+3x_2+7x_3=-2\\ 7x_1-3x_2+6x_3=5\end{cases}$

3. $\begin{cases}2x_1+x_2-8x_3=0\\ x_1+x_2-2x_3=-1\\ 7x_1-5x_3=16\end{cases}$

4. $\begin{cases}2x_1+3x_2-5x_3=-1\\ x_1+4x_2-x_3=9\\ x_1-3x_3=-5\end{cases}$

Задание 2 **Методом исключения неизвестных найти общее и базисные решения систем уравнений:**

11. $\begin{cases}5x_1-8x_2-4x_3=-10\\ 7x_1-x_2+11x_3=0\end{cases}$

12. $\begin{cases}5x_1-x_2+4x_3=25\\ x_1+4x_2+3x_3=16\end{cases}$

13. $\begin{cases}4x_1-3x_2-x_3=4\\ 7x_1-8x_2-7x_3=-25\end{cases}$

14. $\begin{cases}12x_1-8x_2-3x_3=0\\ 8x_1-2x_2=2\end{cases}$

Задание 3 **Найти произведение матриц $AB=C$, если A, B даны:**

21. $A\begin{pmatrix}-1 & 2 & 5\\ 3 & 4 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}10 & 3\\ -2 & 4\\ 1 & 8\end{pmatrix}$

22. $A\begin{pmatrix}11 & 3 & -2\\ 4 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 3 & 5\\ 0 & 2\end{pmatrix}$

23. $A\begin{pmatrix}3 & -3 & 1\\ 2 & 10 & 5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}7 & 1\\ -1 & 3\\ 2 & 8\end{pmatrix}$

24. $A\begin{pmatrix}6 & 4 & 0\\ -1 & 8 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}12 & 1\\ -7 & 1\\ 4 & 0\end{pmatrix}$

Задание 4 Даны вершины треугольника $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$, $C(x_3,y_3)$. Найти:

а) уравнения всех трех его сторон;
б) систему неравенств, определяющих множество точек, принадлежащих треугольнику, включая его стороны;
в) внутренний угол A треугольника в градусах и минутах;
г) уравнение и длину высоты, проведенной из вершины A;
д) площадь треугольника.

31	$A(6;14)$, $B(1;2)$, $C(9;8)$.	36	$A(4;14)$, $B(-1;2)$, $C(7;8)$.
32	$A(4;10)$, $B(-1;-2)$, $C(7;4)$.	37	$A(6;13)$, $B(1;1)$, $C(9;7)$.
33	$A(6;11)$, $B(1;-1)$, $C(9;5)$.	38	$A(7;11)$, $B(2;-1)$, $C(10;5)$.
34	$A(4;13)$, $B(-1;1)$, $C(7;7)$.	39	$A(3;13)$, $B(-2;1)$, $C(6;7)$.
35	$A(6;10)$, $B(1;-2)$, $C(9;4)$.	40	$A(4;11)$, $B(-1;-1)$, $C(7;5)$.

Задание 5 Даны координаты векторов $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$. Найти:

a) длину вектора $\left|2\overline{a}-\overline{b}\right|$;
b) скалярное произведение векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$;
c) косинус угла между векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$;
d) смешанное произведение векторов $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$;
e) объем параллелепипеда V_1 и объем пирамиды V_2, построенных на векторах $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$.

41	$\overline{a}=(2; 3; 1)$,	$\overline{b}=(2; 3; 4)$,	$\overline{c}=(3; 1; -1)$.
42	$\overline{a}=(1; -1; -3)$,	$\overline{b}=(2; 3; 1)$,	$\overline{c}=(2; 3; 4)$.
43	$\overline{a}=(3; 1; -1)$,	$\overline{b}=(-2; -1; 0)$,	$\overline{c}=(5; 2; -1)$.
44	$\overline{a}=(4; 3; 1)$,	$\overline{b}=(6; 7; 4)$,	$\overline{c}=(2; 0; -1)$.

Задание 6 Решите задачу и сделайте чертеж

51 По уравнению сторон треугольника 2x-3y+5=0, x+y-10 = 0 и 2x+7y-25=0. Найти координаты его вершин. Сделать построение.

52 Написать уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых x + y - 6 =0, 2x + y - 13 = 0 и отсекающей на осях координат равные положительные отрезки. Сделать построение.

53 При каком значении С прямая 15x + 17y + C = 0 будет проходить через точку пересечения прямых 2x + 3y - 5 = 0 и 7x - 8y + 1 = 0? Сделать построение.

54 Даны уравнения сторон треугольника 2x - 5y +23 = 0, 4x + y - 9 = 0 и x + 3y - 5 = 0. Составить уравнение прямой, проходящей через вершину треугольника параллельно его стороне, образующей с осью абсцисс острый угол. Сделать построение.

Задание 7 Дано общее уравнение кривой второго порядка *F(x, y) = 0.*
1) Преобразовать уравнение к каноническому виду;
2) построить кривую.

	F(x, y)
61	$5x^2-40x-2y+92 = 0$

62	$2x^2+3y^2+4x-12y+2=0$
63	$28x^2-112x+3y+106=0$
64	$2x^2+5y^2+8x-20y+8=0$

Задание 8 Коллинеарны ли векторы $\bar{c}_1, \bar{c}_2$. Перпендикулярны ли векторы $\bar{c}_3$, $\bar{c}_4$, если $\bar{c}_1 = \bar{a} + 2\bar{b}$ **;** $\bar{c}_2 = 3\bar{a} + 3\bar{b}$ **;** $\bar{c}_3 = \bar{a} - \bar{b}$ **;** $\bar{c}_4 = 2\bar{a} - \bar{b}$

	$\bar{a}$	$\bar{b}$
71	$4\bar{i} + \bar{j} + 3\bar{k}$	$8\bar{i} + 3\bar{j} - \bar{k}$
72	$5\bar{i} + 4\bar{j} + 3\bar{k}$	$7\bar{i} + 9\bar{j} - 2\bar{k}$
73	$\bar{i} - 5\bar{j} + 2\bar{k}$	$2\bar{i} + \bar{j} - 7\bar{k}$
74	$5\bar{i} + \bar{j} + 3\bar{k}$	$2\bar{j} + 6\bar{k}$

Задание 9 Решить систему линейных уравнений $A \cdot X = B$ методом последовательного исключения неизвестных, выяснив предварительно вопрос о ее совместности с помощью теоремы Кронекера-Каппели. В случае неопределенности системы найти ее общее, базисное и любое частное решение.

81 $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 + 3x_5 = 6 \\ 3x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = 2 \\ 5x_1 - 22x_2 - 7x_3 + 18x_4 + 11x_5 = 11 \\ 3x_1 - 7x_2 + 2x_3 + 11x_4 + 2x_5 = 5 \end{cases}$

82 $\begin{cases} x_1 - 4x_2 - 3x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 1 \\ -5x_1 - 8x_2 - 6x_3 + 10x_4 - 7x_5 = -4 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + 3x_5 = 4 \\ -x_1 + 3x_2 - 3x_3 + x_4 - 2x_5 = 6 \end{cases}$

83 $\begin{cases} 5x_2 + 8x_3 - 4x_4 - 4x_5 = 8 \\ x_1 - x_2 + 4x_3 + x_4 - x_5 = 4 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 2 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 3x_4 + x_5 = 6 \end{cases}$

84 $\begin{cases} x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 + 2x_5 = -1 \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 3x_4 - x_5 = 3 \\ x_1 - 2x_2 - 3x_4 + x_5 = 6 \\ -3x_1 - 9x_2 - 10x_4 + 8x_5 = -5 \end{cases}$

Задание № 10 (пирамиды) Даны координаты вершин пирамиды *ABCD*. Требуется:

1. Записать векторы $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}$ в системе орт и найти модули этих векторов.
2. Найти угол между векторами $\overline{AB}$ *и* $\overline{AC}$.
3. Найти площадь грани *ABC*.
4. Найти объем пирамиды.
5. Найти каноническое уравнение прямой, проходящей через точку *D* перпендикулярно плоскости *ABC*.
6. Найти точки пересечения полученной прямой с плоскостью *ABC* и с координатными плоскостями *xOy; xOz; yOz.*
7. Найти уравнение плоскости, проходящей через точку *D и C* и перпендикулярно плоскости *ABC.*
8. Длину ребра *AB*;
9. Длину высоты пирамиды, проведенной из вершины *D*;
10. Уравнение ребра *AC*.

91 A(2;-3,1); B(6,1,-1);C(4,8,-9); D(2,-1,2)

92 A(1, -4,-0); B(5,0,-2); C(3,7,-10,) D (1,-2,1)

93 A(5, -1,-4); B(9,3,-6); C(7,10,-4) D (5,1,-3)

94 A(-3, -6,2); B(1,-2,0); C(-1,5,-8) D (-3,-4,3)

Задание 11 Выполните действия в алгебраической форме. Результаты запишите в тригонометрической и показательной формах

1в $\frac{1+i}{1-2i}-\left(\frac{4}{5}-\frac{2}{5}i\right)$	**6в** $\frac{(1-3i)(1+3i)}{-3-i}-2i^{19}$
2в $\frac{\left(1+i\sqrt{3}\right)}{2i^5}$	**7в** $\frac{(-2+i)^2}{1+3i}-(0{,}1-0{,}3i)$
3в $\frac{(4-i)^2}{i^8}-8\left(2-i^{13}\right)$	**8в** $\frac{2\left(1-i\sqrt{3}\right)}{1+i\sqrt{3}}$
4в $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{20}+i^{17}$	**9в** $\frac{(1-2i)(1+2i)}{2+i}-\left(1+i\sqrt{3}\right)$
5в $\frac{2\left(1+i\sqrt{3}\right)}{1-i}-\left(1+i\sqrt{3}\right)$	**10в** $\frac{2\left(1-i\sqrt{3}\right)}{i\left(\sqrt{3}-i\right)}$

Варианты вопросов к контролю знаний

Контрольные вопросы для самоподготовки

1. Матрицы. Виды матриц. Равенство матриц.
2. Матрицы действия над матрицами.
3. Определитель матрицы. Свойства определителей.
4. Транспонирование определителя свойства определителей.
5. Определитель третьего порядка. Способы его вычисления.
6. Разложение определителя третьего порядка по элементам строки (столбца). Миноры и алгебраические дополнения.
7. Обратная матрица. Алгоритм вычисления обратной матрицы.
8. Решение систем линейных уравнений. Формулы. Крамера.
9. Решение систем линейных уравнений. Метод Гаусса.
10. Матричная запись системы линейных уравнений и ее решение.
11. Линейная однородная система n - уравнений с n – неизвестными.
12. Матрицы. Ранг матрицы.
13. Система m -линейных уравнений с n - переменными. Теорема Кронекера -Капелли.
14. Понятие комплексного числа. Действия с комплексными числами, Форма записи комплексного числа геометрическое изображение на плоскости.
15. Понятие вектора. Линейные операции над векторами.
16. Проекция вектора на ось.
17. Действия над векторами, заданными своими координатами.
18. Скалярное произведение векторов. Свойства скалярного произведения.
19. Скалярное произведение векторов, заданных своими координатами. Угол между векторами.
20. Линейная зависимость векторов. Базис на плоскости.
21. n – переменный вектор и векторное пространство.
22. Размерность и базис векторного пространства.
23. Переход к новому базису.
24. Эвклидово пространство.
25. Комплексные числа. Формы записи.
26. Действия над комплексными числами.
27. Линейные операторы.
28. Собственные векторы и собственные значения линейного оператора.
29. Квадратичные формы.
30. Понятие об уравнении линии. Общее уравнение прямой.
31. Уравнение прямой, проходящей через две данные точки. Уравнение прямой в отрезках.
32. Уравнение прямой, проходящей через данную точку в данном направлении.

33. Уравнение прямой, проходящей через точку с заданным угловым коэффициентом.
34. Уравнение прямой, проходящей через данную точку перпендикулярно данному вектору.
35. Угол между прямыми. Условия параллельности и перпендикулярности о двух прямых.
36. Плоскость. Уравнение плоскости, проходящей через данную точку перпендикулярно данному вектору.
37. Угол между плоскостями. Условие параллельности и перпендикулярности двух плоскостей.
38. Кривые второго порядка. Каноническое уравнение окружности.
39. Каноническое уравнение эллипса. Исследование формы эллипса по его уравнению
40. Каноническое уравнение гиперболы. Равносторонняя гипербола.
41. Каноническое уравнение параболы.
42. Поверхности второго порядка.
43. Каноническое уравнение эллипсоида.
44. Каноническое уравнение параболоида.
45. Каноническое уравнение гиперболоида.
46. Собственные значения и собственные векторы неотрицательных матриц. Теорема Фробениуса-Перрона.
47. Число и вектор Фробениуса, их свойства.
48. Продуктивность неотрицательных матриц.
49. Модель многоотраслевой, экономики Леонтьева.
50. Продуктивные модели Леонтьева.
51. Различные критерии продуктивности модели Леонтьева.

Учебно-методическое обеспечение дисциплины

Основная литература

– Ильин, В.А. Линейная алгебра : учебник [Электронный ресурс]. / В.А. Ильин, Э.Г. Позняк. - 6-е изд., стереотип. - Москва : Физматлит, 2010. - 278 с. - ISBN 978-5-9221-0481-4; - Режим доступа: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=68974 .

– Балдин, К.В. Высшая математика : учебник / К.В. Балдин, В.Н. Башлыков, А.В. Рокосуев ; под общ. ред. К.В. Балдина. - 2-е изд., стер. - Москва : Издательство «Флинта», 2016. - 361 с. : табл., граф., схем. - Библиогр. в кн. - ISBN 978-5-9765-0299-4 ; - Режим доступа: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=79497

– Краткий курс высшей математики : учебник [Электронный ресурс]. / К.В. Балдин, Ф.К. Балдин, В.И. Джеффаль и др. ; под общ. ред. К.В. Балдина. - 2-е изд. - Москва : Издательско-торговая корпорация «Дашков и К°», 2017. - 512 с. : табл., граф., схем., ил. - Библиогр. в кн. - ISBN 978-5-394-02103-9 ; - Режим доступа: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=450751

Дополнительная литература

– Элементы линейной алгебры : учебное пособие [Электронный ресурс]. / Т.А. Гулай, А.Ф. Долгополова, В.А. Жукова и др. - Ставрополь : Сервисшкола, 2017. - 89 с. : ил. - Библиогр.: с. 86. ; - Режим доступа: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=485076

– Романников, А.Н. Линейная алгебра : учебное пособие [Электронный ресурс]. / А.Н. Романников. - Москва : Московский государственный университет экономики, статистики и информатики, 2007. - 148 с. - ISBN 5-7764-0356-1 ; - Режим доступа: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=91062

– Пихтилькова, О. Линейная алгебра и аналитическая геометрия: курс лекций : учебное пособие [Электронный ресурс]. / О. Пихтилькова, С.А. Пихтильков, А. Павленко ; Минобрнауки РФ, ФГБОУ ВО «Оренбургский государственный университет». - Оренбург : ОГУ, 2015. - 281 с. : ил. - Библиогр. в кн. - ISBN 978-5-7410-1324-3 ; - Режим доступа: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=485374

– Чеголин, А.П. Линейная алгебра и аналитическая геометрия : учебное пособие [Электронный ресурс]. / А.П. Чеголин ; Минобрнауки РФ, ФГАОУ ВО «Южный федеральный университет». - Ростов-на-Дону : Издательство Южного федерального университета, 2015. - 149 с. - Библиогр. в кн. - ISBN 978-5-9275-1728-2 ; - Режим доступа: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=445132

Периодические издания

– Высшее образование в России: журнал. – Москва : Московский госуд. Университет печати им. И. Федорова, 2019

–Высшее образование сегодня: журнал. – Москва : Логос, 2019

–Экономист: журнал. – Москва : Издательство Экономист, 2019

Интернет-ресурсы

– http://www.biblioclub.ru – ЭБС «Университетская библиотека он-лайн» » / (принадлежность Общество с ограниченной ответственностью «НексМедиа»).

– http://e.lanbook.com/ – ЭБС «Лань» (принадлежность (Общество с ограниченной ответственностью «ЭБС ЛАНЬ»)

– http://znanium.com/ – ЭБС научно – издательского центра «ИНФРА-М» (принадлежность Общество с ограниченной ответственностью «НексМедиа»)

– http://rucont.ru/ – ЭБС Руконт (принадлежность ООО Центральный коллектор библиотек «БИБКОМ», ООО «Агентство «Книга-Сервис»).

– Научная электронная библиотека eLIBRARYhttp://elibrary.ru/defaultx.asp Режим свободного доступа

Ресурс свободного доступа:

– http://www.vilenin.narod.ru/Books/Books.htm – Математическая библиотека

– http://www. exponenta.ru – «Образовательный математический сайт Exponenta.ru».

– http://www. matclub.ru – Лекции, примеры решения задач, интегралы и производные, дифференцирование, ТФКП, Электронные учебники. Типовой расчет из задачника Кузнецова.

http://www. mathelp.spb.ru – «Высшая математика» (помощь студентам) – Лекции, электронные учебники, решение контрольных работ.