МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Оренбургский государственный университет»
Бузулукский колледж промышленности и транспорта

Предметно-цикловая комиссия общеобразовательных и общепрофессиональных дисциплин

М.И.Матвеева

МАТЕМАТИКА

методические указания для обучающихся по выполнению практических работ

Бузулук 2019

Методические указания предназначены для обучающихся по специальности 35.02.16. «Эксплуатация и ремонт сельскохозяйственной техники и оборудования»

Методические указания являются приложением к рабочей программе по дисциплине Математика.

Методические указания рассмотрены и утверждены на заседании ПЦК

общеобразовательных и общепрофессиональных дисциплин

наименование ПЦК

протокол № 1 от "29" 08 2018г.

Председатель ПЦК

ООПД

наименование ПЦК — подпись — Ямкина И.Н — расшифровка подписи

Исполнители:

преподаватель

должность — подпись — Матвеева И.И.— расшифровка подписи

должность — подпись — расшифровка подписи

Содержание

Введение

Сборник практических работ служит для организации практических занятий по математике в объеме 20 часов. Данное пособие предназначено для студентов 2 курса и разработано в соответствии с рабочей программой по математике. Практические занятия служат связующим звеном между теорией и практикой. Они необходимы для закрепления теоретических знаний, полученных на уроках теоретического обучения, а так же для получения практических знаний. Практические задания выполняются студентом самостоятельно, с применением знаний и умений, полученных на уроках, а так же с использованием необходимых пояснений, полученных от преподавателя при выполнении практического задания.

Целью практических занятий является формирование учебных практических умений по математике и содействие оптимальному освоению студентами учебного материала. Выполнение студентами практических работ направлено на обобщение, систематизацию, углубление, закрепление полученных знаний по конкретным темам, формирование умений применять полученные знания на практике, формирование профессионально значимых качеств таких, как самостоятельность, ответственность, точность.

В сборнике содержится 10 практических работ. Практическое занятие проводится в учебной аудитории. Оценки за выполнение практических работ выставляются по пятибалльной системе. Практические работы выполняются в специально заведённых для практических работ тетрадях.

Методические указания предназначены для оказания помощи студентам при выполнении практических работ по дисциплине «Математика»

В результате проведения практических занятий по дисциплине студент должен:

уметь:

- анализировать сложные функции и строить их графики;
- выполнять действия над комплексными числами;
- вычислять значения геометрических величин;
- производить операции над матрицами и определителями;
- решать задачи на вычисление вероятности с использованием элементов комбинаторики;
- решать прикладные задачи с использованием элементов дифференциального и интегрального исчислений;
- решать системы линейных уравнений различными методами

знать:

- основные математические методы решения прикладных задач;
- основные понятия и методы математического анализа, линейной алгебры, теорию комплексных чисел, теории вероятностей и математической статистики;
- основы интегрального и дифференциального исчисления;
- роль и место математики в современном мире при освоении профессиональных дисциплин и в сфере профессиональной деятельности.

Критерии оценки выполнения обучающимися практических работ.

Оценка знаний студентов производится по пятибалльной системе.

Критерии оценки практических заданий.

Отметка «5» ставится, если:

- работа выполнена полностью;
- в логических рассуждениях и обосновании решения нет пробелов и ошибок;
- в решении нет математических ошибок (возможна одна неточность, описка, не являющаяся следствием незнания или непонимания учебного материала).

Отметка «4»ставится, если:

- работа выполнена полностью, но обоснования шагов решения недостаточны (если умение обосновывать рассуждения не являлось специальным объектом проверки);
- допущена одна существенная ошибка или два-три несущественных ошибки;
- правильно выполнено более 75% заданий.

Отметка «3» ставится, если:

- допущены более одной существенной ошибки или более двух-трех несущественных ошибок, но обучающийся владеет обязательными умениями по проверяемой теме;
- при этом правильно выполнено неменее половины работы.

Отметка «2» ставится, если:

- допущены существенные ошибки, показавшие, что обучающийся не владеетобязательными умениями по данной теме в полной мере.

Отметка «1» ставится, если:

- работа показала полное отсутствие у обучающегося обязательных знаний и умений по проверяемой теме или значительная часть работы выполнена не самостоятельно.

К категории *существенных ошибок* следует отнести ошибки, связанные с незнанием, непониманием обучающимися основных положений теории и с неправильным применением методов, способов, приемов решения практических заданий, предусмотренных программой.

К категории *несущественных ошибок* следует отнести погрешности, связанные с небрежным выполнением записей, рисунков, графиков, чертежей, а также погрешности и недочеты, которые не приводят к искажению смысла задания и его выполнения.

При наличии существенной ошибки задание считается невыполненным.

Выполнять пропущенные работы по уважительным и неуважительным причинам обучающийся может на дополнительных занятиях (согласно расписанию), в читальном зале или дома.

Практическая работа №1

Тема: «Нахождение пределов функций с помощью замечательных пределов

Цель: сформировать умение находить пределы функций, использовать замечательные пределы для нахождения пределов.
Содержание работы.
1.Внимательно изучите теоретический материал.
2.Выполните предложенное задание

Теоретическая часть:
Число *A* называют *пределом функции* *f*(*x*) при $x \to x_0$ (и пишут $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$), если для любого $\varepsilon >$ найдется число $\delta > 0$, такое, что для всех $x \neq x_0$, удовлетворяющих условию $|x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Теоремы о пределах:

1. $\lim\limits_{x\to x_0} c = c$ (*c*=const).
2. Если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A,\ \lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = B,$ то:

$$\lim_{x\to x_0}(f(x) \pm \varphi(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) \pm \lim_{x\to x_0}\varphi(x) = A \pm B;$$

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)\cdot\varphi(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x)\cdot\lim_{x\to x_0}\varphi(x) = A\cdot B;$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)} = \frac{A}{B}, \quad (B \neq 0).$$

Первый замечательный предел: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1.$

Второй замечательный предел (число *e* = 2,718…):

$$\lim_{x\to\infty}(1+1/x)^x = e \text{ или } \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

Замечательные пределы:

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x - 1}{x} = \ln a \qquad \lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$$

Примеры решения:

$$\lim_{x\to 1}\frac{2x^2 - 3x - 5}{x+1} = \frac{2\cdot 1^2 - 3\cdot 1 - 5}{1+1} = \frac{-6}{2} = -3$$

Использование 1-го замечательного предела

Пример 1

Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{3x}$

Выражение под знаком предела похоже на первый замечательный предел, но это не совсем он, под синусом находится $7x$, а в знаменателе $3x$. В подобных случаях первый замечательный предел нам нужно организовать самостоятельно, используя искусственный прием. Ход рассуждений может быть таким: «под синусом 7х, значит, в знаменателе тоже нужно получить 7х».
А делается это очень просто:

(1-й замечательный предел)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{3x}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{3\cdot\frac{1}{7}\cdot 7x}=\frac{1}{\frac{3}{7}}=\frac{7}{3}$$

Пример 2

Найти предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{5x^2}{\sin^2\frac{x}{2}}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{5x\cdot x}{\sin\frac{x}{2}\cdot\sin\frac{x}{2}}=\lim_{x\to 0}\frac{5\cdot 2\cdot 2\cdot\frac{x}{2}\cdot\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}\cdot\sin\frac{x}{2}}=5\cdot 2\cdot 2=20$$

Пример 3

Найти предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{tg2x}{2x^2}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x^2\cdot(\cos 2x)^{\to 1}}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x^2}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x\cdot x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}=\frac{1}{0}=\infty$$

Пример 4

Найти предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{5x}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 2x}{5x}=\frac{2}{5}\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 2x}{x}=$$
$$=\frac{2}{5}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x\cdot\sin 2x}{\frac{1}{2}\cdot 2x}=\frac{2}{5}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\frac{1}{2}}=\frac{2}{5}\cdot 2\lim_{x\to 0}(\sin 2x)^{\to 0}=\frac{4}{5}\cdot 0=0$$

Второй замечательный предел

В теории математического анализа доказано, что:

$$\lim_{\alpha\to\infty}\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)^{\alpha}=e$$

Данный факт носит название второго замечательного предела**.**

Справка: $e=2{,}718281828\ldots$ *– это иррациональное число.*

В качестве параметра α может выступать не только переменная x, но и сложная функция. Важно лишь, чтобы она стремилась к бесконечности.

Пример 5

Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{4x}$

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{4x}=1^{\infty}$ Данная неопределенность как раз и раскрывается с помощью второго замечательного предела. Но, как часто бывает, второй замечательный предел нужно искусственно организовать. Рассуждать можно следующим образом: в данном примере параметр $\alpha=3x$, значит, в показателе тоже нужно организовать $3x$. Для этого возводим основание в степень $3x$, и, чтобы выражение не изменилось – возводим в степень $\frac{1}{3x}$:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{4x}=1^{\infty}=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{3x}\right)^{\frac{1}{3x}\cdot 4x}$$

страшная степень превратилась в симпатичную букву e:

При этом сам значок предела перемещаем в показатель:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{4x}=1^{\infty}=\lim_{x\to\infty}\left(\underbrace{\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{3x}}_{\text{e (2-ой замечательный предел)}}\right)^{\frac{1}{3x}\cdot 4x}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x}{3x}}=e^{\frac{4}{3}}$$

Содержание практической работы.

1. **Вычислить пределы функции:**

$$\lim_{x\to3}\frac{x^2-9}{x-3}\qquad \lim_{x\to1}\frac{x^3-1}{x-1}\qquad \lim_{x\to3}\frac{x^2-5x+6}{x^2-7x+10}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2-5x+1}{8x^2-9x+1}\qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-9x}{6x^3-x+1}\qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{5x^4+1}{8x^2-11x+1}$$

$$\lim_{x\to3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{x^2-9}\qquad \lim_{x\to1}\frac{\sqrt{4x+5}-3\sqrt{x}}{x^2-1}\qquad \lim_{x\to4}\frac{2x^2-7x-4}{3x^2-13x+4}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{4-x}-2}{3x}\qquad \lim_{x\to0}\frac{x^3}{3x^3-x^2}\qquad \lim_{x\to1}\frac{x^3-1}{x^2-1}\qquad \lim_{x\to1}\frac{\sqrt{5-x}-2}{\sqrt{2-x}-1}$$

2. Вычислить пределы функций, используя замечательные пределы.

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{x}$ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{7x}{tg2x}$ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 9x}{5x}$ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x}-1}{2x}$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{7x}-1}{\sin 2x}$ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{4x}-1}{tg9x}$ $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{x}$ $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\frac{5}{7x}\right)^{2x}$

$\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{x}$ $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^2}$

Практическая работа №2 «Вычисление производных функций. Применение производной к решению практических задач»

Цель работы: закрепление практических навыков нахождения производных функций.

Содержание работы.
1.Внимательно изучите теоретический материал.
2.Выполните предложенное задание

Теоретические основы темы

1.1. Производная.

Производной функции $f\left(x\right)$ в точке x_0 называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю: $\lim\limits_{\Delta x\to o}\frac{\Delta f\left(x_0\right)}{\Delta x}$.

Правила дифференцирования *(u, v, w*— функции аргумента *x,* по которому производится дифференцирование, с - постоянная).

1.*Производная алгебраической суммы* $(u+v-w)'=u'+v'-w'$

2.*Производная произведения* $(uv)'=u'v+uv'$;

3. $(cu)'=cu'$;

3.*Производная частного (дроби)* $(\frac{u}{v})'=\frac{u'v-uv'}{v^2}(v\neq 0)$;

4. *Производная сложной функции (функции от функции).*
Если $y=f(u), u=\varphi(x)$, *то* $y'=f'(u)\varphi'(x)$

Таблица основных формул дифференцирования

№ п/п	Функция	Производная	№ п/п	Функция	Производная	№ п/п	Функция	Производная

1	C (постоянная)	0	**7**	e^x	e^x	**13**	ctg$x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
2	x^n (n – постоянная)	nx^{n-1}	**8**	$\log_a x$ $(0 < a \neq 1)$	$\frac{1}{x\ln a}$	**14**	arcsin$x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
3	x	1	**9**	ln$x$	$\frac{1}{x}$	**15**	arccos$x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
4	$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	**10**	sin x	cos$x$	**16**	arctg$x$	$\frac{1}{1+x^2}$
5	$\frac{1}{x} = x^{-1}$	$-\frac{1}{x^2}$	**11**	cos$x$	–sin x	**17**	arcctg$x$	$-\frac{1}{1+x^2}$
6	a^x, (a >0)	a^x ln$a$	**12**	tg$x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	**18**	lg$x$	$\frac{1}{x\ln 10}$

Пример:

№1. Вычислить производную:

$$y = x^3 - 3x^2 - \frac{1}{6}x^{-6} + 5;$$

Решение.

$$y' = \left(x^3 - 3x^2 - \frac{1}{6}x^{-6} + 5\right)' = \left(x^3\right)' - 3\left(x^2\right)' - \frac{1}{6}\left(x^{-6}\right)' + 5' =$$

$$= 3x^{3-1} - 3\cdot 2x^{2-1} - \frac{1}{6}\cdot(-6)x^{-6-1} + 0 = 3x^2 - 6x + x^{-7}.$$

№2. Найти производную функции

$$y = \frac{x^3+x-1}{x^2-2x}$$

Решение

$$y' = \left(\frac{x^3+x-1}{x^2-2x}\right)' = \frac{(x^3+x-1)'(x^2-2x) - (x^2-2x)'(x^3+x-1)}{(x^2-2x)^2}$$

$$= \frac{(3x^2+1)(x^2-2x) - (2x-2)(x^3+x-1)}{(x^4-4x^3+4x^2)}$$

$$= \frac{3x^4 - 6x^3 + x^2 - 2x - 2x^4 - 2x^2 + 2x + 2x^3 + 2x - 2}{x^4-4x^3+4x^2}$$

$$= \frac{x^4 - 4x^3 - x^2 + 2x - 2}{x^4-4x^3+4x^2}$$

1.2.Экстремумы функции

<u>Определение:</u> Точка x_0 называется точкой максимума **т.max** функции f(x) если для всех x из некоторой окрестности точки x_0 выполняется неравенство $f(x) \le f(x_0)$

Другими словами: **т.max** – точка, выше которой график не поднимается (в примере: x=4 – т.max)

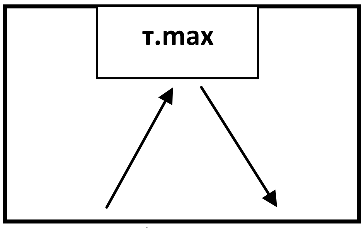
Определение: Точка x_0 называется точкой минимума **т.min** функции f(x) если для всех x из некоторой окрестности точки x_0 выполняется неравенство $f(x) \geq f(x_0)$

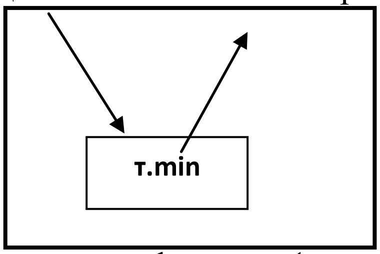
Другими словами: **т.min** – точка, ниже которой график не опускается
(в примере: x=-1 –т.min)

Определение: Точки минимума **т.min** и точки максимума **т.max** называются точками экстремума функции.

Теорема Ферма: Пусть функция f(x) определена в некоторой окрестности точки x_0 и дифференцируема в этой точке. Если x_0 – точка экстремума функции f(x), то $f'(x_0)=0$.

Другими словами: Необходимое условие существования точек экстремума: $f'(x_0)=0$





Алгоритм нахождения точек экстремума функции (т.max, т.min):

1) Найти интервалы возрастания и убывания функции:
   1. Найти производную функции $f'(x)$;
   2. Найти стационарные точки (точки, в которых производная f(x) равна нулю), т.е. решить уравнение $f'(x)=0$;
   3. Отметить эти точки на числовой оси, указать промежутки;
   4. Выявить знаки производной $f'(x)$ на каждом из полученных промежутков (подставить любое число из проверяемого промежутка в производную и узнать знак);
   5. Записать ответ.
2) По схеме определить точки максимума и точки минимума.

1.3.Исследование функции с помощью производной

Алгоритм исследования функции для построения графика

Дана функция y = f(x).
1) Найти область определения функции D(y);
2) Исследовать функцию на четность;
3) Определить, является ли функция периодичной;
4) Найти точки пересечения графика с осями координат:
   - С осью *Ox* – ***нули функции***;
   - С осью *Oy, y(0);*
5) Исследовать функцию при помощи первой производной, т.е. найти:
   - Промежутки возрастания и убывания функции;
   - Точки экстремумов и экстремумы;
6) Исследовать функцию при помощи второй производной, т.е. найти:
   - Точки перегиба и значения функции в этих точках;
   - Определить вид выпуклости графика;
7) Сосчитать дополнительные точки (в том случае, если невозможно найти нули функции);
8) Построить график.

1.4 Наибольшее и наименьшее значение функции

Алгоритм нахождения наибольшего и наименьшего значения функции на отрезке [а;в]

Найти значение функции на концах отрезка, т.е. f(а), f(в);

1) Найти производную функции $f'(x)$;
2) Найти стационарные точки ($f'(x) = 0$)
3) Проверить входят ли стационарные точки в отрезок [а;в];
4) Найти значение функции в стационарных точках;
5) Из найденных значений выбрать наибольшее и наименьшее.

2. Примеры и упражнения

Пример 1: Найти точки экстремума функции: $f(x) = x^3+6x^2+4$

Решение:

1) $\underline{f'(x)} = (x^3+6x^2+4) = (x^3)'+(6x^2)'+(4)' = 3x^2+6\cdot2x+0=\underline{3x^2+12x}$
2) $f'(x)=0 \quad 3x^2+12x=0$;

$x(3x+12)=0$

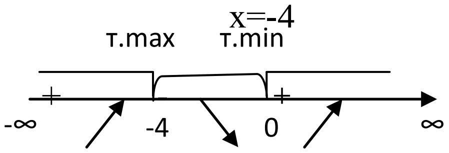
$x=0$ или $3x+12=0$

$3x=-12$

$x=\frac{-12}{3}$

$x=-4$

3) $f'(x)$



f(x)

4) На интервале (-∞;-4) возьмём число -5, подставим в производную $f'(x)$:
$f'(-1)=3\cdot(-5)^2+12\cdot(-5)=75-60=15>0$, знак «+», значит (↑)
На интервале (-4;0) возьмём число -1, подставим в производную $f'(x)$:
$f'(-1)=3\cdot(-1)^2+12\cdot(-1)=3-12=-9<0$, знак «-», значит (↓)
На интервале (0;∞) возьмём число 1, подставим в производную $f'(x)$:
$f'(1)=3\cdot1^2+12\cdot1=3+12=15>0$, знак «+», значит (↑)

5) На схеме определяем, что x=-4 т.max, x=0 – т.min

<u>Ответ:</u> x=-4 т.max, x=0 – т.min

Пример 2: Исследовать функцию и построить график $f(x) = 6x^2-2x^3$

Решение:

1) D(x) = R.
2) $f(-x) = 6(-x)^2 - 2(-x)^3 = 6x^2+2x^3$ – ни четная, ни нечетная;
3) $f'(x) = (6x^2)'-(2x^3)'=6\cdot2x-2\cdot3x^2=12x-6x^2$
4) $f'(x) = 0 \quad 12x-6x^2=0$

$x(12-6x)=0$

$x=0$ или $12-6x=0$

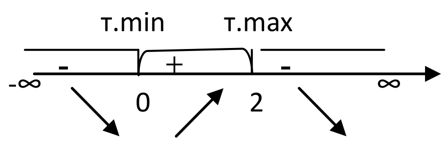
$-6x=-12$

$x=\frac{-12}{-6}$

$x=2$

4)

$f'(x)$



f(x)

(-∞;0) «-1» $f'(-1)=12\cdot(-1) -6\cdot(-1)^2=-12-6=-18<0$, знак «-», значит (↓)

(0;2) «1» $f'(1)=12\cdot1-6\cdot1^2=12-6=6>0$, знак «+», значит (↑)
(2;∞) «3» $f'(3)=12\cdot3-6\cdot3^2=36-54=-18<0$, знак «-», значит (↓)

5) Определим по схеме, что x=0 – т.min, x=2 – т.max

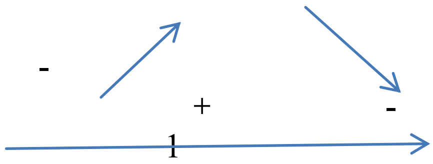
6) $f(0) = 6\cdot0^2-2\cdot0^3=0-0=0$

$f(2) = 6\cdot2^2-2\cdot2^3=24-16=8$

Заполним таблицу:

x	(-∞;0)	0	(0;2)	2	(2;∞)
f′(x)	-	0	+	0	-
f(x)	↘	0	↗	8	↘

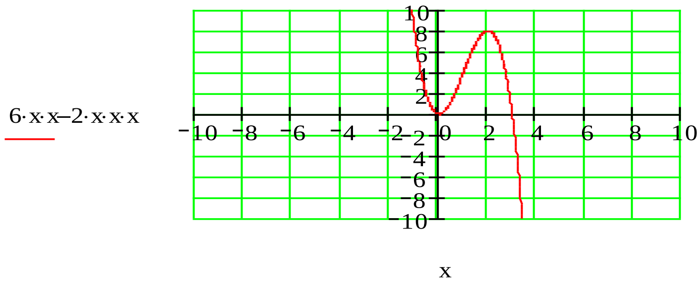
6) $f''(x)= 12- 12x$;
7) $f''(x)= 0$, $12- 12x= 0$,
$12x = 12$,
$x=1$



$f(1)= 4$, (1; 4) – точка перегиба

(-∞;1) выпукла вверх, (1;∞) выпукла вниз

9) Строим график функции $f(x) = 6x^2-2x^3$



Пример 3: Найти наибольшее и наименьшее значение функции $f(x)=2x^3-3x^2+2$ на отрезке [-2;3]

Решение:

1) **f(-2)**$=2\cdot(-2)^3-3\cdot(-2)^2+2=-16-12+2=$**-26**

f(3)$=2\cdot3^3-3\cdot3^2+2=54-27+2=$**29**

2) $f'(x) =(2x^3-3x^2+2)'= (2x^3)'-(3x^2)'+(2)'=2\cdot3x^2-3\cdot2x+0=6x^2-6x$

3) $f'(x) =0$ $6x^2-6x =0$; $x(6x -6)=0$; $x=0$ или $6x-6=0$; $6x=6$, $x=\frac{6}{6}$, $x=1$

4). Получили стационарные точки $x_1=0$, $x_2=1$, по заданию имеем отрезок [-2;3], x_1 и x_2 <u>входят</u> в заданный отрезок, значит обе стационарные точки нам подходят.

5) **f(0)**$=2\cdot0^3-3\cdot0^2+2=0-0+2=$**2** ;**f(1)**$=2\cdot1^3-3\cdot1^2+2=2-3+2=$**1**

6) Имеем:

f(-2)= <u>**-26**</u> **f(3)=**<u>**29**</u> **f(0)=**<u>**2**</u> **f(1)=**<u>**1**</u>

Выбираем самое большое и самое маленькое значение:

Наибольшее значение: f(3)= 29 **,** наименьшее значение:f(-2)= -26

Ответ: наибольшее значение: f(3)= 29 **,** наименьшее значение:f(-2)= -26

<u>**Задание для самостоятельного решения:**</u>

<u>**Задание 1:**</u> Найти производные функций

Вариант 1: а) $4tgx$; б) $\log_4 x+\sqrt{x}$; в) $x^2\cdot\ln x$; г) $\frac{\sin x}{x^2}$.

Вариант 2: а) $12ctgx$; б) $\log_3 x+x^3$; в) $\frac{\ln x}{x}$; г) $x^3\cdot\cos x$.

Вариант 3: а) $\sin(4x)$; б) $\sqrt{x}-\ln x$; в) $\frac{x^2}{e^x}$; г). $\sin x\cdot tgx$.

Вариант 4: а) $\cos(2x+1)$; б) $4x^3+\frac{1}{x}$; в) $e^x\cdot x^2$; г) $\frac{\sin x}{x}$.

Вариант 5: а) 4^x+4x^3; б) $2e^{3x}$+2x; в) $\ln x\cdot\cos(x)$; г) $\frac{\cos 2x}{e^x}$.

Вариант 6: а) $3x^2-2^x$; б) $e^{2x}-2e^x$; в) $\frac{\cos(2x)}{x^3}$; г) $x^2\cdot\log_2 x$.

Вариант 7: а) $3e^x-3^x$; б) $e^x+0{,}5^x-2x$; в) $5^x\cdot\sin 3x$; г) $\frac{\ln(3x)}{\cos x}$.

Вариант 8: а) 3^x+4e^x; б) $e^{x^2-x}-0{,}2^{-x}$; в) $\frac{\cos(5x)}{x^2}$; г) $2x\cdot\ln(x)$.

Вариант 9: а) $\left(x^2+3x-4\right)-\sin x$; б) $\frac{x}{\cos\frac{x}{3}}$; в) $ctg 2x+3x$; г) $x^2\cos\left(\frac{x}{2}\right)$.

Вариант 10: а) $\left(2x^2-x-3\right)+\cos\pi x$; б) $\frac{4x^2}{\sin\frac{x}{2}}$; в) $tg 5x-3$; г) $x^2\cdot\sin(7x)$.

Вариант 11: а) $3\cos x-2x$; б) $\log_2 x+4\sqrt{x}$; в) $x^5\cdot\ln x$; г) $\frac{\cos 3x}{x^3}$.

Вариант 12: а) $2tgx-5x-4$; б) $\ln x+2x^4+\cos x$; в) $\frac{\ln 2x}{x^2}$; г) $x\ \cdot\sin 5x$.

Вариант 13: а) $\sin(-x+1)$; б) $2\sqrt{x}+2\sin x$; в) $\frac{x^4}{e^x}$; г). $\ln x\cdot\cos x$.

Вариант 14: а) $\cos(-4x-3)$; б) $-2x^3+\frac{1}{x}$; в) $e^x\cdot x$; г) $\frac{\sin x}{x^2}$.

Вариант 15: а) 4^x+4x^3; б) $2e^x-e^{-2x}$; в) $\ln x\cdot\cos(2x)$; г) $\frac{tgx}{x+1}$.

<u>**Задание 2:**</u> Найти точки экстремума функции

Вариант 1:
а) $f(x)=-x^4+4x^2-3$ б) $f(x)=(6x-7)\cdot(2x+8)$

Вариант 2:
а) $f(x)=x^3-6x^2+9x+3$ б) $f(x)=(4x+5)\cdot(x-7)$

Вариант 3:
а) $f(x)=-x^3-3x^2+24x-4$ б) $f(x)=(2x+1)\cdot(3x+6)$

Вариант 4:
а) $f(x)=x^3-3x^2-9x+3$ б) $f(x)=(x-2)\cdot(9x+1)$

Вариант 5:
а) $f(x)=-x^3+6x^2+15x+1$ б) $f(x)=(8x+2)\cdot(4x-13)$

Вариант 6:
а) $f(x)=-x^3+x^2+8x$ б) $f(x)=(x+12)\cdot(12x-1)$

Вариант 7:
а) $f(x)=2x^3+9x^2-24x$ б) $f(x)=(8x-3)\cdot(2x-7)$

Вариант 8:
а) $f(x)=2x^3-3x^2-1$ б) $f(x)=(13x-6)\cdot(9x+1)$

Вариант 9:
а) $f(x)=2x^3-3x^2-36x$ б) $f(x)=(4x+3)\cdot(9x-5)$

Вариант 10:
а) $f(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-2$ б) $f(x)=(2x-5)\cdot(3x-4)$

Вариант 11:
а) $f(x)= x^2-12x$ б) $f(x)=(6x+7)\cdot(4x-7)$
Вариант 12:
а) $f(x)=2x^3+3x^2-11$ б) $f(x)=(2x-8)\cdot(9x+1)$
Вариант 13:
а) $f(x)=0,5x^2-x^3$ б) $f(x)=(5x+1)\cdot(x+3)$
Вариант14:
а) $f(x)=x^3-3x^2$ б) $f(x)=(4x-9)\cdot(6x+2)$
Вариант 15:
а) $f(x)=x^4-10x^2+9$ б) $f(x)=(5x-6)\cdot(2x+10)$

Задание 3: Исследовать и построить график функции

Вариант 1: $f(x)=3x^3-9x$
Вариант 2: $f(x)=x^4-8x^2+9$
Вариант 3: $f(x)=-x^4+8x^2-10$
Вариант 4: $f(x)=-x^3+12x-15$
Вариант 5: $f(x)=x^3-3x-7$
Вариант 6: $f(x)=x^3-12x-7$
Вариант 7: $f(x)= \frac{1}{3}x^3+3x^2+8x$
Вариант 8: $f(x)=-\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x-5$
Вариант 9: $f(x)=-\frac{1}{3}x^3+16x+\frac{2}{3}$
Вариант 10: $f(x)=x^3+6x^2-4$
Вариант 11: $f(x)=x^3+3x^2+20$
Вариант 12: $f(x)=-x^3+3x-4$
Вариант 13: $f(x)= 2+3x-x^3$
Вариант14: $f(x)= \frac{1}{4}x^3-3x$
Вариант 15: $f(x)= -\frac{1}{4}x^4+2x^2-4$

Задание 4: Найти наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке

Вариант 1: $f(x)=x^4-2x^2-3$, $[0;2]$
Вариант 2: $f(x)=2x^2-4x+3$, $[0;4]$
Вариант 3: $f(x)=3x^2-x^3$, $[-1;3]$
Вариант 4: $f(x)=3x^3-9x^2+2$, $[-1;1]$
Вариант 5: $f(x)=\frac{4}{3}x^3-4x$, $[0;2]$
Вариант 6: $f(x)=x^3-3x^2+3x+2$, $[-2;2]$
Вариант 7: $f(x)=-x^4+2x^2+3$, $[0; 2]$
Вариант 8; $f(x)=2x^3+3x^2-12x-1$, $[-1;3]$
Вариант 9: $f(x)=4x^2-16x+17$, $[0;3]$
Вариант 10: $f(x)=5x^2-20x+3$, $[0;3]$
Вариант 11: $f(x)=2x^3-15x^2+24x+3$, $[0;3]$
Вариант 12: $f(x)=3x^2+18x+7$, $[-5;-1]$
Вариант 13: $f(x)=5-8x-x^2$, $[-6;-3]$
Вариант14: $f(x)=2x^3+3x^2+2$, $[-2;1]$
Вариант 15: $f(x)=x^3-3x^2-9x-4$, $[-4;4]$

Практическая работа №3

Тема: «Вычисление определённых интегралов. Применение определённого интеграла в практических задачах»

Цель: закрепление практических навыков вычисления определённых интегралов.

Содержание работы.
1.Внимательно изучите теоретический материал.
2.Выполните предложенное задание

Теоретические основы темы

Определённым интегралом от непрерывной функции $f(x)$ на конечном отрезке $[a, b]$ (где $a \neq b$) называется приращение какой-нибудь еѐ первообразной на этом отрезке. При этом употребляется запись

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Числа a и b называются соответственно нижним и верхним пределами интегрирования, а отрезок $[a, b]$ – отрезком интегрирования. Равенство называется формулой Ньютона-Лейбница. Разность $F(b) - F(a)$ кратко записывают так: $F(x)\Big|_a^b$.
Поэтому формула Ньютона-Лейбница имеет и иную запись:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b.$$

Свойства определенного интеграла

Теорема 1. *Определённый интеграл с одинаковыми пределами интегрирования равен нулю*, т.е.

$$\int_a^a f(x)\ dx = F(a) - F(a) = 0.$$

Теорема 2. *Постоянный множитель можно выносить за знак определённого интеграла*, т.е.

$$\int_a^b kf(x)\ dx = k\int_a^b f(x)\ dx.$$

Теорема 3. *Определённый интеграл от алгебраической суммы конечного числа функций равен алгебраической сумме определённых интегралов от этих функций*, т.е.

$$\int_a^b [f(x) + \varphi(x) - \psi(x)]dx = \int_a^b f(x)\ dx + \int_a^b \varphi(x)\ dx - \int_a^b \psi(x)\ dx.$$

Теорема 4. *Если отрезок интегрирования разбит на части, то определённый интеграл по всему отрезку равен сумме определённых интегралов по его частям*, т.е. если$\in [a; b]$, то

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Теорема 5. *При перестановке пределов интегрирования абсолютная величина определенного интеграла не меняется, а изменяется лишь его знак*, т.е.

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx.$$

Свойства определенного интеграла позволяют упрощать непосредственное вычисление интегралов.

ПРИМЕР 1. Вычислить

$$\int_1^2 e^{2x}dx.$$

РЕШЕНИЕ. По формуле $\int e^{kx}dx = \frac{1}{k}e^{kx} + C,$ получим

$$\int_1^2 e^{2x}dx = \frac{1}{2}e^{2x}\Big|_1^2 = \frac{1}{2}(e^4 - e^2) = \frac{1}{2}e^2(e^2 - 1).$$

ПРИМЕР 2. Вычислить

$$\int_1^2 \left(\frac{4}{x} - 5x^4 + 2\sqrt{x}\right)dx.$$

РЕШЕНИЕ.

$$\int_1^2 \left(\frac{4}{x} - 5x^4 + 2\sqrt{x}\right)dx = 4\int_1^2 \frac{dx}{x} - 5\int_1^2 x^4 dx + 2\int_1^2 \sqrt{x}\,dx =$$

$$= 4\ln|x|\Big|_1^2 - 5\frac{x^5}{5}\Big|_1^2 + 2\frac{x^{3/2}}{3/2}\Big|_1^2 = 4(\ln 2 - \ln 1) - (2^5 - 1^5) +$$

$$+\frac{4}{3}\left(2\sqrt{2} - 1\sqrt{1}\right) = 4\ln 2 + \frac{8}{3}\sqrt{2} - 32\frac{1}{3}.$$

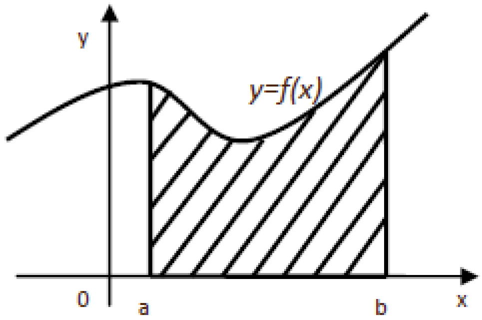
На практике очень часто приходится решать следующие задачи:

1) найти путь точки, движущейся прямолинейно, по заданному закону изменения скорости этой точки;

2) вычислить площадь фигур, которые имеют форму криволинейной трапеции;

3) вычислить объем тел, полученных вращением вокруг оси какой-либо криволинейной трапеции.

Криволинейная трапеция - это фигура, ограниченная графиком непрерывной и не меняющей своего знака на отрезке *[a; b]* функции, прямыми *x=a, x=b* и отрезком *[a; b]*.



Площадь криволинейной трапеции вычисляется по формуле Ньютона-Лейбница:

$$S_ф = \int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Объем тела вращения можно вычислить по формуле:

$$V = \pi\int_a^b f^2(x)dx$$

Пример 1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $y=-x^2+5x+6$ и осью OX.

Решение. Найдем точки пересечения параболы с осью OX:

$-x^2+5x+6=0$

Имеем корни квадратного уравнения: $x_1=-1$, $x_2=6$.

Построим график функции $y=-x^2+5x+6$.

Пределы интегрирования: -1 и 6.

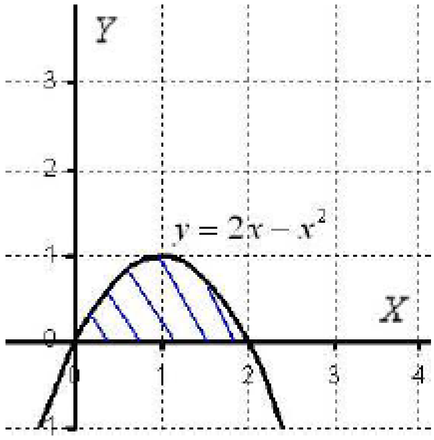
По формуле найдем площадь фигуры, ограниченной сверху параболой и снизу осью OX

$$\int_{-1}^{6}\left(-x^2+5x+6\right)dx = -\int_{-1}^{6}x^2dx+5\int_{-1}^{6}x\,dx+6\int_{-1}^{6}dx = \left(-\frac{x^3}{3}+5\frac{x^2}{2}+6x\right)\Bigg|_{-1}^{6} =$$

$$=\left(-\frac{6^3}{3}+5\cdot\frac{6^2}{2}+6\cdot6\right)-\left(-\frac{(-1)^3}{3}+5\cdot\frac{(-1)^2}{2}+6\cdot(-1)\right) = -72+90+36-\frac{1}{3}-\frac{5}{2}+6=$$

$$=60-\frac{5}{2}-\frac{1}{3}=60-\frac{17}{6}=60-2\frac{5}{6}=57\frac{1}{6}$$

Ответ: $S_ф = 57\frac{1}{6}$ (кв.ед.)



Пример 2. Вычислить объем тела, полученного вращением фигуры, ограниченной линиями $y = 2x - x^2$, $y = 0$ вокруг оси OX.

Решение. Построим фигуру, ограниченную линиями $y = 2x - x^2$, $y = 0$, здесь уравнение $y = 0$ задаёт ось OX. Плоская заштрихованная фигура вращается вокруг оси X. В результате вращения получается «яйцевидное» тело, которое симметрично относительно оси OX. В практических заданиях плоская фигура иногда может располагаться и ниже оси OX. Это ничего не меняет – функция в формуле возводится в квадрат: $f^2(x)$, таким образом, **объем тела вращения всегда неотрицателен**. Вычислим объем тела вращения, используя формулу

$$V = \pi\int_a^b f^2(x)dx = \pi\int_0^2 (2x - x^2)^2 dx = \pi\int_0^2 (4x^2 - 4x^3 + x^4)dx =$$

$$= \pi \cdot \left(\frac{4x^3}{3} - x^4 + \frac{x^5}{5}\right)\Big|_0^2 = \pi \cdot \left(\frac{32}{3} - 16 + \frac{32}{5} - 0\right) = \frac{16\pi}{15}$$

Ответ: $V = \frac{16\pi}{15}\, ед^3. \approx 3{,}35\, ед^3.$

Пример 3. Скорость прямолинейного движения точки задана уравнением *v=3t2-4t+7*. Найдите закон движения точки, если в начальный момент движения *S=1м.*

Решение. Воспользуемся формулой 1 приложения неопределенного интеграла

$\int v(t)dt = S(t) + c$, S – перемещение, v - скорость

$$\int (3t^2 - 4t + 7)dt = 3 \cdot \frac{t^3}{3} - 4 \cdot \frac{t^2}{2} + 7t + c = t^3 - 2t^2 + 7t + c$$

Г.к. при *t=0 S=1*, то $0^3 - 2 \cdot 0^2 + 7 \cdot 0 + c = 1$ $c=1$

Ответ: $S(t) = t^3 - 2t^2 + 7t + 1$ $(м)$

Задание для самостоятельного решения:

Вариант 1

1. Вычислите определенные интегралы:

а) $\int_1^3 \left(x^4 + 4^x\right)dx$; б) $\int_4^5 \frac{2dt}{t+1}$; в) $\int_0^{10} \left(5x + 3e^x - \sqrt[5]{x^2}\right)dx$; г) $\int_2^3 (2x-1)^3 dx$.

2. Решите задачу. Скорость движения точки определяется по закону $v = (2t-1)^2$ м/c. Найдите путь, пройденный точкой за 3-ю секунду.
3. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 - 5x - 6, y = 0$. Сделайте чертеж.
4. Найдите объем тела, образованного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной линиями $y = \sqrt{x}, y = 0, x = 9$. Сделайте чертеж.

Вариант 2

1. Вычислите определенные интегралы:

а) $\int_0^2 \left(x^5+5^x\right)dx$; б) $\int_3^5 \frac{3dt}{t-1}$; в) $\int_0^7 \left(e^{-2x}+4x+\sqrt[3]{x}\right)dx$; г) $\int_2^3 (2x+1)^3\,dx$.

2. Решите задачу. Скорость движения точки определяется по закону $v=(3t+2)^2$ м/с. Найдите путь, пройденный точкой от начала движения до момента времени 4с.
3. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y=8x-x^2-7, y=0$. Сделайте чертеж.
4. Найдите объем тела, образованного вращением вокруг оси ОХ фигуры, ограниченной линиями $y=2+x, x=1, x=2, y=0$. Сделайте чертеж.

Вариант 3

1. Вычислите определенные интегралы:

а) $\int_0^2 \left(x^9+9^x\right)dx$; б) $\int_4^6 \frac{2dt}{t-1}$; в) $\int_1^3 \left(\sqrt[4]{x}-2e^x+3\right)dx$; г) $\int_0^1 (3x-1)^4\,dx$.

2. Решите задачу. Скорость движения точки определяется по закону $v=(2-3t)^2$ м/с. Найдите путь, пройденный точкой за 4-ю секунду.
3. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y=x^2-3x-4, y=0$. Сделайте чертеж.
4. Найдите объем тела, образованного вращением вокруг оси ОХ фигуры, ограниченной линиями $y=2x, x=1, x=4, y=0$. Сделайте чертеж.

Вариант 4

1. Вычислите определенные интегралы:

а) $\int_1^2 \left(x^6+6^x\right)dx$; б) $\int_2^6 \frac{5dt}{t+4}$; в) $\int_0^2 \left(2x+\sqrt[4]{x^3}-e^{-x}\right)dx$; г) $\int_0^1 (3x-1)^3\,dx$.

2. Решите задачу. Скорость движения точки определяется по закону $v=(3t-1)^2$ м/с. Найдите путь, пройденный точкой за 2-ю секунду.
3. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y=5x-x^2+6, y=0$. Сделайте чертеж.
4. Найдите объем тела, образованного вращением вокруг оси ОХ фигуры, ограниченной линиями $y=2-x, x=0, y=0$. Сделайте чертеж.

Вариант 5

1. Вычислите определенные интегралы:

а) $\int_1^2 \left(x^8+8^x\right)dx$; б) $\int_3^6 \frac{4dt}{t-1}$; в) $\int_1^4 \left(2+\sqrt{x^3}-x\right)dx$; г) $\int_2^3 (2x-1)^4\,dx$.

2. Решите задачу. Скорость движения точки определяется по закону $v=(2t+1)^2$ м/с. Найдите путь, пройденный точкой от начала движения до момента времени 3с.
3. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y=x^2-6x+8, y=0$. Сделайте чертеж.
4. Найдите объем тела, образованного вращением вокруг оси ОХ фигуры, ограниченной линиями $y=x, x=5, y=0$. Сделайте чертеж.

Вариант 6

1. Вычислите определенные интегралы:

а) $\int\limits_0^1 \left(x^{10}+10^x\right)dx$; б) $\int\limits_2^8 \frac{dt}{t+10}$; в) $\int\limits_0^1 \left(x+2\sqrt[3]{x}\right)dx$; г) $\int\limits_2^3 (2x+1)^4 dx$.

2. Решите задачу. Скорость движения точки определяется по закону $v=(3t-2)^2\ м/с$. Найдите путь, пройденный точкой от начала движения до момента времени 2с.

3. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y=x^2-4x-5, y=0$. Сделайте чертеж.

4. Найдите объем тела, образованного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной линиями $y=x+1, x=0, x=2, y=0$. Сделайте чертеж.

Вариант 7

1. Вычислите определенные интегралы:

а) $\int\limits_1^4 \left(3x^2+2^x\right)dx$; б) $\int\limits_4^8 \frac{2dt}{t-3}$; в) $\int\limits_1^2 \left(2\sqrt{e}+\sqrt[5]{x}\right)dx$; г) $\int\limits_0^1 (3x+2)^4 dx$.

2. Решите задачу. Скорость движения точки определяется по закону $v=(4t-3)^2 м/с$. Найдите путь, пройденный точкой за 4-ю секунду.

3. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y=x^2+1, y=0, x=0, x=2$. Сделайте чертеж.

4. Найдите объем тела, образованного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной линиями $y=3x, x=2, y=0$. Сделайте чертеж.

Вариант 8

1. Вычислите определенные интегралы:

а) $\int\limits_0^3 \left(\frac{x^3}{2}+3^x\right)dx$; б) $\int\limits_6^7 \frac{\sqrt{2}dx}{x-5}$; в) $\int\limits_0^1 \left(e^{3x}+2\pi-\sqrt[3]{x^2}\right)dx$; г) $\int\limits_0^1 (3x-2)^5 dx$.

2. Решите задачу. Скорость движения точки определяется по закону $v=t(t-2)^2\ м/с$. Найдите путь, пройденный точкой от начала движения до момента времени 4с.

3. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y=\frac{3}{x}, x+y-4=0$. Сделайте чертеж.

4. Найдите объем тела, образованного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной линиями $y=x^2, x=2, y=0$. Сделайте чертеж.

Вариант 9

1. Вычислите определенные интегралы:

а) $\int\limits_0^2 \left(4x^2+x-3\right)dx$; б) $\int\limits_3^6 \frac{dx}{x+1}$; в) $\int\limits_0^1 e^{4x}dx$; г) $\int\limits_2^3 (2x-1)^3 dx$.

2. Скорость движения точки изменяется по закону $v=3t^2+2t+1$ (м/с). Найти путь S, пройденный точкой за 10с от начала движения.

3. Вычислите, предварительно сделав рисунок, площадь фигуры, ограниченной линиями: $y=-x^2+4,\quad y=0,\quad x=-2,\quad x=2$. Сделайте чертеж.

4. Найдите объем тела, полученного при вращении вокруг оси абсцисс криволинейной трапеции, ограниченной линиями: $y=\sqrt{x},\quad y=0,\quad x=1,\quad x=4$. Сделайте чертеж.

Вариант 10

1. Вычислите определенные интегралы:

а) $\int\limits_0^3 (2x^2 - x + 4)dx$; б) $\int\limits_2^5 \frac{dx}{x+2}$; в) $\int\limits_1^3 e^{4x}dx$; г) $\int\limits_0^1 (3x+1)^4 dx$.

2. Скорость движения точки изменяется по закону $v = 9t^2 - 8t$ (м/с). Найти путь S, пройденный точкой за четвертую секунду.
3. Вычислите, предварительно сделав рисунок, площадь фигуры, ограниченной линиями: $y = -x^2 + 1$, $y = 0$, $x = -1$, $x = 1$. Сделайте чертеж.
4. Найдите объем тела, полученного при вращении вокруг оси абсцисс криволинейной трапеции, ограниченной линиями: $y = \sqrt{x}$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$. Сделайте чертеж.

Вариант 11

1. Вычислите определенные интегралы:

а) $\int\limits_2^4 x^3 dx$; б) $\int\limits_2^4 3^x dx$; в) $\int\limits_1^8 \frac{3dx}{x+4}$; г) $\int\limits_1^3 (e + \sqrt[3]{x} - 2x)dx$.

2. Решите задачу. Скорость движения точки определяется по закону $v = (4t+3)^2 м/с$. Найдите путь, пройденный точкой за 2-ю секунду.
3. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 9 - x^2, y = 0$. Сделайте чертеж.
4. Найдите объем тела, образованного вращением вокруг оси ОХ фигуры, ограниченной линиями $y = 2x, x = 3, y = 0$. Сделайте чертеж.

Вариант 12

1. Вычислите определенные интегралы:

а) $\int\limits_1^3 x^4 dx$; б) $\int\limits_1^3 4^x dx$; в) $\int\limits_4^5 \frac{2dt}{t+1}$; г) $\int\limits_0^{10} (5x + 3e^x - \sqrt[5]{x^2})dx$.

2. Решите задачу. Скорость движения точки определяется по закону $v = (2t-1)^2 м/с$. Найдите путь, пройденный точкой за 3-ю секунду.
3. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 - 5x - 6, y = 0$. Сделайте чертеж.
4. Найдите объем тела, образованного вращением вокруг оси ОХ фигуры, ограниченной линиями $y = \sqrt{x}, y = 0, x = 9$. Сделайте чертеж.

Вариант 13

1. Вычислите определенные интегралы:

а) $\int\limits_0^2 x^5 dx$; б) $\int\limits_0^2 5^x dx$; в) $\int\limits_3^5 \frac{3dt}{t-1}$; г) $\int\limits_0^7 (e^{-2x} + 4x + \sqrt[3]{x})dx$.

2. Решите задачу. Скорость движения точки определяется по закону $v = (3t+2)^2 м/с$. Найдите путь, пройденный точкой от начала движения до момента времени 4с.
3. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 8x - x^2 - 7, y = 0$. Сделайте чертеж.
4. Найдите объем тела, образованного вращением вокруг оси ОХ фигуры, ограниченной линиями $y = 2 + x, x = 1, x = 2, y = 0$. Сделайте чертеж.

Вариант 14

1. Вычислите определенные интегралы:

а) $\int_0^2 x^9 dx$; б) $\int_0^2 9^x dx$; в) $\int_4^6 \frac{2dt}{t-1}$; г) $\int_1^3 \left(\sqrt[4]{x} - 2e^x + 3\right)dx$.

2. Решите задачу. Скорость движения точки определяется по закону $v = (2-3t)^2$ м/с. Найдите путь, пройденный точкой за 4-ю секунду.

3. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 - 3x - 4, y = 0$. Сделайте чертеж.

4. Найдите объем тела, образованного вращением вокруг оси ОХ фигуры, ограниченной линиями $y = 2x, x = 1, x = 4, y = 0$. Сделайте чертеж.

Вариант 15

1. Вычислите определенные интегралы:

а) $\int_1^2 x^6 dx$; б) $\int_1^2 6^x dx$; в) $\int_2^6 \frac{5dt}{t+4}$; г) $\int_0^2 \left(2x + \sqrt[4]{x^3} - e^{-x}\right)dx$.

2. Решите задачу. Скорость движения точки определяется по закону $v = (3t-1)^2$ м/с. Найдите путь, пройденный точкой за 2-ю секунду.

3. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 5x - x^2 + 6, y = 0$. Сделайте чертеж.

4. Найдите объем тела, образованного вращением вокруг оси ОХ фигуры, ограниченной линиями $y = 2 - x, x = 0, y = 0$. Сделайте чертеж.

Практическая работа №4

Тема: «Действия с матрицами»

Цель: закрепление практических навыков выполнения действий над матрицами.

Содержание работы.
1.Внимательно изучите теоретический материал.
2.Выполните предложенное задание

Теоретические основы темы

Сложение матриц. Суммой двух матриц А и В одинакового размера $m \times n$ называется матрица $C = A + B$, элементы которой $C_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ при i=1,2, . . . , m; j=1,2, . . . , n (т.е. матрицы складываются поэлементно).

Например, $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 6 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -4 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$, $C = A + B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -4 \\ 8 & 10 & 7 \end{pmatrix}$

В частном случае $A + O = A$.

<u>**Определение:**</u> **Произведением** матриц называется матрица, элементы которой могут быть вычислены по следующим формулам:

$$A \cdot B = C;$$

$$\boxed{c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj}.}$$

Из приведенного определения видно, что операция умножения матриц определена только для матриц, **число столбцов первой из которых равно числу строк второй.**

Пример. Вычислить произведение матриц $A \cdot B,$

где A=$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 5 & 4 & 4 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

Решение. Найдем размер матрицы-произведения (если умножение матриц возможно): $\underset{2\times3}{A} \cdot \underset{3\times3}{B} = \underset{2\times3}{C}.$ Вычислим элементы матрицы-произведения С, умножая элементы каждой

строки матрицы А на соответствующие элементы столбцов матрицы В следующим образом:

$$\tilde{N} = \begin{pmatrix} (-1)\cdot 3 + 0\cdot 5 + 2\cdot(-2) & (-1)\cdot 0 + 0\cdot 4 + 2\cdot 0 & (-1)\cdot 1 + 0\cdot 4 + 2\cdot 0 \\ 3\cdot 3 + 4\cdot 5 + 0\cdot(-2) & 3\cdot 0 + 4\cdot 4 + 0\cdot 0 & 3\cdot 1 + 4\cdot 4 + 0\cdot 1 \end{pmatrix}$$

Получаем С=$\begin{pmatrix} -7 & 0 & 1 \\ 29 & 16 & 19 \end{pmatrix}$

Пример. Найти произведение матриц А = $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ и В = $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

$$A\,B = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 2 & 1\cdot 4 & 1\cdot 1 \\ 4\cdot 2 & 4\cdot 4 & 4\cdot 1 \\ 3\cdot 2 & 3\cdot 4 & 3\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 8 & 16 & 4 \\ 6 & 12 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$BA = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = 2\cdot 1 + 4\cdot 4 + 1\cdot 3 = 2 + 16 + 3 = 21.$$

Пример. Найти произведение матриц А=$\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$, В=$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$

$$AB = (1 \quad 2) \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = (3+10 \quad 4+12) = (13 \quad 16).$$

Возведение в степень. Целой положительной степенью A^m (m>1) квадратной матрицы А называется произведение m матриц, равных А, т.е.

$$A^m \cdot = A \cdot A \cdot \ldots \cdot A.$$

Заметим, что операция возведения в степень определяется только для квадратных матриц. По определению полагают $A^0 = E, A^1 = A$. Нетрудно показать, что $A^m \cdot A^k = A^{m+k}, \left(A^m\right)^k = A^{mk}.$

Пример. Найти A^2, где А=$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}$.

Решение. $A^2=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 8 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 8 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}17 & 6\\ 24 & 32\end{pmatrix}$. Необходимо заметить, что из равенства $A^m=O$ еще не следует, что матрица A=O.

<u>Определение.</u> Рангом матрицы А называется число ненулевых строк, полученных после приведения ее к ступенчатому виду.

Теорема. Ранг матрицы не изменяется при элементарных преобразованиях матрицы.

С помощью элементарных преобразований можно привести матрицу к так называемому ступенчатому виду, когда вычисление ее ранг не представляет труда.

Матрица А называется **ступенчатой**, если она имеет вид

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} & \dots & a_{1k}\\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2r} & \dots & a_{2k}\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & a_{rr} & \dots & a_{rk}\end{pmatrix}$$

где $a_{ij}\neq 0, i=1,2,\dots,r; r\leq k.$

Пример нахождения матрицы с помощью элементарных преобразований. Найти ранг матрицы A = $\begin{pmatrix}0 & -1 & 3 & 0 & 2\\ 2 & -4 & 1 & 5 & 3\\ -4 & 5 & 7 & -10 & 0\\ -2 & 1 & 8 & -5 & 3\end{pmatrix}$.

Решение. 1. Если $a_{11}=0,$ то при перестановке строк или столбцов добиваются того, что $a_{11}\neq 0,$. В данном примере поменяем местами, например, 1-ю и 2-ю строки матрицы .

2. Если $a_{11}\neq 0,$ то, умножая элементы 2-й, 3-й и 4-й строк на подходящие числа (именно на $-a_{21}/a_{11}=0, -a_{31}/a_{11}=2, -a_{41}/a_{11}=1,$) и прибавляя полученные числа соответственно к элементам 2-й, 3-й и 4-й строк, добьемся того, чтобы все элементы 1-го столбца (кроме a_{11}) равнялись нулю

$$\begin{pmatrix}2 & -4 & 1 & 5 & 3\\ 0 & -1 & 3 & 0 & 2\\ -4 & 5 & 7 & -10 & 0\\ -2 & 1 & 8 & -5 & 3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}2 & -4 & 1 & 5 & 3\\ 0 & -1 & 3 & 0 & 2\\ 0 & -3 & 7 & -10 & 0\\ 0 & -3 & 8 & -5 & 3\end{pmatrix}$$

3. Если в полученной матрице $a_{22}\neq 0$ (в данном случае $a_{22}=-1\neq 0$), то, умножая элементы 3-й и 4-й строк на подходящие числа (а именно на $-a_{32}/a_{22}=-3$, $-a_{42}/a_{22}=-3$), добьемся того, чтобы все элементы 2-го столбца

(кроме a_{12}, a_{22}) равнялись нулю. Если в процессе преобразований получаются строки

(или столбцы), целиком состоящие из нулей (как в данном примере), то отбрасываем эти строки (или столбцы):

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 8 & -5 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Последняя матрица имеет ступенчатый вид и 2е ненулевые строки. Поэтому ранг полученной ступенчатой, а следовательно, и данной матрицы равен двум.

Задания для самостоятельного выполнения:

ЗАДАНИЕ 1. Выполнить действия:

1) А+**В**; **2) В**-А; **3)** 3А+**2В**; **4) В**^{2}-А

1.А=$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix}$ В=$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$	2.А=$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 6 \\ 4 & 0 & -3 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ В=$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 6 & -4 & 9 \end{pmatrix}$
3.А=$\begin{pmatrix} 7 & -3 & 1 \\ -5 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & -6 \end{pmatrix}$ В=$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 8 & 3 & 0 \\ 2 & -4 & 1 \end{pmatrix}$	4.А=$\begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \\ 4 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ В=$\begin{pmatrix} -4 & 5 & 8 \\ -1 & 6 & 0 \\ -4 & 3 & 5 \end{pmatrix}$
5.А=$\begin{pmatrix} -3 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 8 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ В=$\begin{pmatrix} -2 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 6 \\ 2 & -7 & 8 \end{pmatrix}$	6.А=$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -3 & 3 & -1 \\ 1 & 9 & 1 \end{pmatrix}$ В=$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ -6 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$
7.А=$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ В=$\begin{pmatrix} 1 & 9 & 5 \\ 3 & 7 & 2 \\ 0 & -3 & 5 \end{pmatrix}$	8.А=$\begin{pmatrix} 6 & -3 & 6 \\ 1 & -2 & 5 \\ 2 & 7 & 9 \end{pmatrix}$ В=$\begin{pmatrix} -9 & 1 & 4 \\ 7 & 3 & 8 \\ 3 & 9 & 2 \end{pmatrix}$
9.А=$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix}$ В=$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 6 \\ 4 & 0 & -3 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$	10.А=$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ В=$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$
11.А=$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 6 & -4 & 9 \end{pmatrix}$ В=$\begin{pmatrix} 7 & -3 & 1 \\ -5 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & -6 \end{pmatrix}$	12.А=$\begin{pmatrix} -2 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 6 \\ 2 & -7 & 8 \end{pmatrix}$ В=$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ -6 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$
13.А=$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ В=$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 8 & 3 & 0 \\ 2 & -4 & 1 \end{pmatrix}$	14.А=$\begin{pmatrix} 6 & -3 & 6 \\ 1 & -2 & 5 \\ 2 & 7 & 9 \end{pmatrix}$ В=$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$
15.А=$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 6 \\ 4 & 0 & -3 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ В=$\begin{pmatrix} 3 & -4 & 6 \\ 5 & 1 & 7 \\ -7 & 3 & 0 \end{pmatrix}$	16.А=$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 7 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ В=$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 6 & 0 & 3 \end{pmatrix}$
17.А=$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ В=$\begin{pmatrix} 1 & -7 & -2 \\ 1 & 0 & 8 \\ 4 & -4 & 1 \end{pmatrix}$	18.А=$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 6 \\ 4 & 0 & -3 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ В=$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

ЗАДАНИЕ 2. Умножить матрицы:

1. а) $\begin{pmatrix}3 & -2\\ 5 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 4\\ 2 & 5\end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix}1 & -3 & 2\\ 3 & -4 & 1\\ 2 & -5 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 5 & 6\\ 1 & 2 & 5\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 4\\ 1 & 3 & 9\end{pmatrix}$

2. а) $\begin{pmatrix}2 & -3\\ 4 & -6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & -6\\ 6 & -4\end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix}5 & 8 & -4\\ 6 & 9 & -5\\ 4 & 7 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 2 & 6\\ 4 & -1 & 3\\ 9 & 6 & 5\end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ 0 & 3 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & -2\\ 1 & 3\end{pmatrix}$

3. а) $\begin{pmatrix}2 & 5\\ 1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & 3\\ 3 & -5\end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix}1 & 4 & 3\\ 5 & -1 & -1\\ 3 & 6 & 7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -1 & 5\\ 1 & 4 & -1\\ 3 & -5 & 2\end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & -2\\ 1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ 0 & 3 & 5\end{pmatrix}$

4. а) $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5 & 6\\ 7 & 8\end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix}0 & 2 & -1\\ -2 & -1 & 2\\ 3 & -2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & 3 & 2\\ 3 & 2 & 1\\ 1 & 3 & 5\end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix}3 & 0 & 1\\ 1 & -2 & -1\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 5 & 1\\ 2 & -3\end{pmatrix}$

5. а) $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 8 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-4 & 2\\ 5 & 0\end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & 1 & 1\\ -4 & 3 & -5\\ 5 & -4 & 7\end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 3\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

6. а) $\begin{pmatrix}1 & 2\\ -4 & 8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix}1 & -2 & -1\\ 3 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & 3 & -3\\ -4 & 3 & -5\\ 5 & -4 & 7\end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 3\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix}$

7. а) $\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3 & 0\\ 4 & 1\end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix}-2 & 3 & -3\\ -4 & 3 & -5\\ 5 & -4 & 7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -2 & -1\\ 3 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 2\end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 4\\ 1 & 3 & 9\end{pmatrix}$

8. а) $\begin{pmatrix}2 & 3\\ 8 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix}4 & 1 & 1\\ -4 & 2 & 0\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 3 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 3\\ -1 & 2\\ 1 & -2\end{pmatrix}$

9. а) $\begin{pmatrix}2&5\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&-7\\1&4\end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix}1&1&1\\5&4&3\\10&5&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}11&-4&1\\-25&9&-2\\15&-5&1\end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix}0&3\\-1&2\\1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&-1\\3&0&1\end{pmatrix}$
10. а) $\begin{pmatrix}1&2\\-4&8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&1\\1&2\end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix}11&-4&1\\-25&9&-2\\15&-5&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1\\5&4&3\\10&5&1\end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&4\\1&3&9\end{pmatrix}$
11. а) $\begin{pmatrix}1&2\\0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&3\\2&1\end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix}1&2&3\\-1&1&2\\3&2&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&1&2\\0&-1&1\\1&2&1\end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&4&9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&4\\2&5\\3&6\end{pmatrix}$
12. а) $\begin{pmatrix}2&1\\0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&2\\3&5\end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix}1&-2&-1\\3&1&2\\1&2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&3&-3\\-4&3&-5\\5&-4&7\end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix}1&2&-1\\0&3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&0\\1&2&1\\1&2&3\end{pmatrix}$
13. а) $\begin{pmatrix}-1&0\\4&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&5\\7&1\end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix}0&2&-1\\-2&-1&2\\3&-2&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&3&2\\3&2&1\\1&3&5\end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix}1&2\\0&3\\2&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&-1\\1&3&0\end{pmatrix}$
14. а) $\begin{pmatrix}-2&0\\4&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&5\\3&1\end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix}1&3&2\\-3&2&0\\4&-3&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&3&3\\0&1&4\\-1&1&0\end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix}1&3&-1\\2&0&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\1&3\\1&7\end{pmatrix}$
15. а) $\begin{pmatrix}2&7\\0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\3&4\end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix}1&0&1\\2&-1&1\\3&2&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&2&0\\-1&0&1\\3&2&7\end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix}1&1&-1\\2&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&3\\2&4\\1&5\end{pmatrix}$
16. а) $\begin{pmatrix}2&-3\\4&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0\\3&1\end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix}0&1&2\\-1&2&3\\4&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1&5\\0&1&0\\2&-1&-1\end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix}1&1&5\\3&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\-1&1\\1&2\end{pmatrix}$

17. а) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$
18. а) $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 5 & 8 & -4 \\ 6 & 9 & -5 \\ 4 & 7 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 4 & -1 & 3 \\ 9 & 6 & 5 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

Практическая работа №5

Тема: «Вычисление определителей»

Цель: закрепление навыков нахождения определителей матриц различными методами.

Содержание работы.

1.Внимательно изучите теоретический материал.

2.Выполните предложенное задание

Теоретические основы темы

Определителем матрицы второго порядка $a=(a_{ij})$, или **определителем второго порядка**, называется число, которое отыскивается по формуле:

$\Delta = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$, например, пусть А=$\begin{pmatrix} -2 & 8 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$.

тогда $\Delta = |A| = \begin{vmatrix} -2 & 8 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -2\cdot 5 - 8\cdot 1 = -18$

Пусть дана квадратная матрица третьего порядка $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

Определителем матрицы третьего порядка $a=(a_{ij})$, или **определителем третьего порядка**, называется число, которое находится по формуле

$$\Delta = |A| = a_{11}\cdot\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\cdot\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\cdot\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Пример. Вычислить определитель третьего порядка |A|=$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix}$

Решение. $\Delta = 1\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} - (-1)\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 3\cdot\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$ $=1\cdot 0+1\cdot 3+3\cdot 6=21$

Определитель третьего порядка удобно вычислить по правилу треугольников (или по правилу Сарруса). Покажем это на схеме

$$\begin{vmatrix}\circ & \circ & \circ\\ \circ & \circ & \circ\\ \circ & \circ & \circ\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\bullet & \circ & \circ\\ \circ & \bullet & \circ\\ \circ & \circ & \bullet\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\circ & \bullet & \circ\\ \circ & \circ & \bullet\\ \bullet & \circ & \circ\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\circ & \circ & \bullet\\ \bullet & \circ & \circ\\ \circ & \bullet & \circ\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}\circ & \circ & \bullet\\ \circ & \bullet & \circ\\ \bullet & \circ & \circ\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}\circ & \bullet & \circ\\ \bullet & \circ & \circ\\ \circ & \circ & \bullet\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\bullet & \circ & \circ\\ \circ & \circ & \bullet\\ \circ & \bullet & \circ\end{vmatrix}$$

Например,

$$\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ -1 & 0 & 1\\ 2 & 4 & 5\end{vmatrix} = 1\cdot0\cdot5+2\cdot1\cdot2+(-1)\cdot4\cdot3-2\cdot0\cdot3-(-1)\cdot2\cdot5-4\cdot1\cdot1 = 0+4-12-0+10-4= -2$$

Для того, чтобы ввести понятие определителя более высокого порядка, потребуются некоторые дополнительные понятия.

Минором M_{ij} **элемента** a_{ij} матрицы n-го порядка называется определитель матрицы (n-1) порядка, полученной матрицы А вычеркиванием i-й строки и j-го столбца. Например, минором элемента a_{12} матрицы А третьего порядка будет

$$M_2=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_{21} & a_{23}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix}=a_{21}a_{33}-a_{31}a_{23}.$$

Каждая матрица n-го порядка имеет n^2 миноров (n-l)-го порядка.

Алгебраическим дополнением элемента A_{ij} матрицы n-го порядка называется его минор, взятый со знаком $(-1)^{i+j}$; т.е. алгебраическое дополнение совпадает с минором, если сумма номеров строки и столбца $(i + j)$ - четное число, и отличается от минора знаком, если $(i + j)$ - нечетное число. Например,

$A_{23}=(-1)^{2+3}M_{23}==M_{23}$; $A_{31}=(-1)^{3+1}M_{31}=M_{31}$

Пример. Найти алгебраические дополнения всех элементов матрицы $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 3\\ 2 & 2 & 1\\ 1 & 4 & 2\end{pmatrix}$

Решение

$\mathbf{A_{11}=(-1)^{1+1}}\begin{vmatrix}2 & 1\\ 4 & 2\end{vmatrix}\mathbf{=0;}$ $\mathbf{A_{12}=(-1)^{1+1}}\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}\mathbf{=0;}$ $\mathbf{A_{13}=(-1)^{1+1}}\begin{vmatrix}2 & 2\\ 1 & 4\end{vmatrix}\mathbf{=0;}$

$\mathbf{A_{21}=(-1)^{1+1}}\begin{vmatrix}-1 & 3\\ 4 & 2\end{vmatrix}\mathbf{=0;}$ $\mathbf{A_{22}=(-1)^{1+1}}\begin{vmatrix}1 & 3\\ 1 & 2\end{vmatrix}\mathbf{=0;}$ $\mathbf{A_{23}=(-1)^{1+1}}\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 4\end{vmatrix}\mathbf{=0;}$

$\mathbf{A_{31}=(-1)^{1+1}}\begin{vmatrix}-1 & 3\\ 2 & 1\end{vmatrix}\mathbf{=0;}$ $\mathbf{A_{32}=(-1)^{1+1}}\begin{vmatrix}1 & 3\\ 2 & 1\end{vmatrix}\mathbf{=0;}$ $\mathbf{A_{33}=(-1)^{1+1}}\begin{vmatrix}1 & -1\\ 2 & 2\end{vmatrix}\mathbf{=0;}$

Определителем квадратной матрицы А n-го порядка называется число, равное сумме произведений элементов 1-й строки на их алгебраические дополнения:

$\Delta = a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\ldots+a_{1n}A_{1n}=\sum_{s=1}^{n}a_{is}A_{is}$ (разложение по элементам 1-й строки).

Задания для самостоятельного выполнения:

ЗАДАНИЕ 1:

1.1. Выписать все миноры данного определителя;

1.2. Вычислить определитель с помощью правила «треугольников».

1. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 7 \\ 4 & 3 & -5 \\ -6 & -4 & 3 \end{vmatrix}$	2. $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & -5 & 8 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix}$	3. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & -4 & 7 \\ -3 & 12 & -15 \end{vmatrix}$	4. $\begin{vmatrix} 4 & -2 & 4 \\ 10 & 2 & 12 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$	5. $\begin{vmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}$
6. $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & -3 \end{vmatrix}$	7. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \end{vmatrix}$	8. $\begin{vmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & -3 \\ -2 & -3 & 2 \end{vmatrix}$	9. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$	10. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix}$
11. $\begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix}$	12. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$	13. $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 25 \\ 1 & 7 & 49 \\ 1 & 8 & 64 \end{vmatrix}$	14. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 9 \\ 16 & 25 & 81 \end{vmatrix}$	15. $\begin{vmatrix} -2 & -3 & 5 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & -2 \end{vmatrix}$
16. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -4 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$	17. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 7 \\ 4 & 3 & -5 \\ -6 & -4 & 3 \end{vmatrix}$	18. $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & -5 & 8 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix}$	19. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & -4 & 7 \\ -3 & 12 & -15 \end{vmatrix}$	20. $\begin{vmatrix} 4 & -2 & 4 \\ 10 & 2 & 12 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$

ЗАДАНИЕ 2:

2.1. Выписать все алгебраические дополнения элементов 3 строки

2.2. Вычислить определитель с помощью разложения его по элементам строки или столбца

1. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & -1 & 7 \end{vmatrix}$	2. $\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 5 & -6 & 7 \end{vmatrix}$	3. $\begin{vmatrix} 12 & 6 & -4 \\ 6 & 4 & 4 \\ 3 & 2 & 8 \end{vmatrix}$	4. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -5 \\ -1 & 4 & 1 \\ 6 & -2 & -7 \end{vmatrix}$	5. $\begin{vmatrix} 6 & 4 & 2 \\ 7 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix}$
6. $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 2 & -1 & -7 \\ 3 & 5 & -2 \end{vmatrix}$	7. $\begin{vmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 2 & 8 & 5 \\ 8 & 7 & 3 \end{vmatrix}$	8. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$	9. $\begin{vmatrix} 1 & 17 & -7 \\ -1 & 13 & 1 \\ 1 & 7 & 1 \end{vmatrix}$	10. $\begin{vmatrix} 4 & -3 & 5 \\ 3 & -2 & 8 \\ 1 & -7 & -5 \end{vmatrix}$
11. $\begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 5 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}$	12. $\begin{vmatrix} 5 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 7 & 4 & 5 \end{vmatrix}$	13. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$	14. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & -4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$	15. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & -4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$
16. $\begin{vmatrix} 5 & 7 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \end{vmatrix}$	17. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & -1 & 7 \end{vmatrix}$	18. $\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 5 & -6 & 7 \end{vmatrix}$	19. $\begin{vmatrix} 12 & 6 & -4 \\ 6 & 4 & 4 \\ 3 & 2 & 8 \end{vmatrix}$	20. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -5 \\ -1 & 4 & 1 \\ 6 & -2 & -7 \end{vmatrix}$

АДАНИЕ 3: Вычислить определитель 2мя способами

1. $\begin{vmatrix} 6 & -1 & 1 \\ 2 & 6 & -2 \\ -3 & 3 & 6 \end{vmatrix}$	**2** $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$	**3** $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 6 & -6 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}$	**4** $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix}$	**5** $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & -1 \\ -1 & 8 & 3 \end{vmatrix}$
6 $\begin{vmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 0 & 8 & 4 \\ 2 & 3 & 8 \end{vmatrix}$	**7** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix}$	**8** $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$	**9** $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$	**10** $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 4 & 1 & -2 \\ 5 & 2 & -3 \end{vmatrix}$
11 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix}$	**12** $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 7 & 1 & 6 \\ 6 & 0 & 5 \end{vmatrix}$	**13** $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix}$	**14** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 5 \end{vmatrix}$	**15** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 5 \\ -7 & 1 & 0 \end{vmatrix}$
16 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 5 \\ -2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$	**17** $\begin{vmatrix} 6 & -1 & 1 \\ 2 & 6 & -2 \\ -3 & 3 & 6 \end{vmatrix}$	**18** $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$	**19** $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 6 & -6 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}$	**20** $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix}$

Практическая работа №6

Тема: «Нахождение обратной матрицы»

Цель: формирование умений вычислять обратные матрицы;

закрепление умений вычислять определители второго и третьего порядков, составлять и вычислять алгебраические дополнения к элементам матрицы.

Содержание работы.
1.Внимательно изучите теоретический материал.
2.Выполните предложенное задание

Теоретические основы темы

Матрица A^{-1} называется обратной по отношению к квадратной матрице А, если выполнено условие $\boldsymbol{A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E}$**,** где E – единичная матрица, порядок которой равен порядку матрицы A.

Невырожденная матрица – матрица, определитель которой не равен нулю. ***Вырожденная матрица*** – матрица, определитель которой равен нулю.

Обратная матрица A^{-1} существует тогда и только тогда, когда матрица А – невырожденная. Если обратная матрица A^{-1} существует, то она единственная.

Пусть задана матрица $A_{n\times n}$. Для того, чтобы найти обратную матрицу A^{-1}, требуется осуществить три шага:

1. Найти определитель матрицы A и убедиться, что $\Delta A \neq 0$, т.е. что матрица *A – невырожденная.*

2. Составить алгебраические дополнения Aij каждого элемента матрицы A и записать матрицу $A^*_{n\times n}=(Aij)$ из найденных алгебраических дополнений.
3. Записать обратную матрицу по формуле $A^{-1}=\frac{1}{\Delta A}\cdot A^{*T}$

Матрица A^{*T} называется присоединённой (взаимной, союзной) к матрице А.

Союзной или присоединенной к матрице A называют матрицу A^{*T}, которая получается из матрицы A, если все ее элементы заменить соответствующими алгебраическими дополнениями A_{ij} и к полученной матрице применить операцию транспонирования. (Присоединенная матрица – это транспонированная матрица, составленная из алгебраических дополнений к элементам данной матрицы)

Пример 1.

Найти обратную матрицу к $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ матрице

Решение. Вычисляем определитель матрицы:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix}=1\cdot(-1)\cdot(-1)+2\cdot 3\cdot 2+0\cdot 1\cdot 1-$$
$$-1\cdot(-1)\cdot 2-3\cdot 1\cdot 1-2\cdot 0\cdot(-1)=1+12+0+2-3+0=12\neq 0$$

Так как определитель не равен нулю, то матрица имеет обратную. Обратная матрица A^{-1} к матрице A находится по формуле: $A^{-1}=\frac{1}{\Delta A}\cdot A^{*T}$

Найдем (присоединенную) союзную матрицу A^{*T} , для этого вычислим алгебраические дополнения к элементам матрицы A :

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}=(-1)\cdot(-1)-3\cdot 1=1-3=-2$$
$$A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=-[2\cdot(-1)-1\cdot 1]=-(-2-1)=3$$
$$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=2\cdot 3-1\cdot(-1)=6+1=7$$
$$A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}=-[0\cdot(-1)-3\cdot 2]=-(0-6)=6$$
$$A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=1\cdot(-1)-1\cdot 2=-1-2=-3$$
$$A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=-[1\cdot 3-1\cdot 0]=-(3-0)=-3$$
$$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}=0\cdot 1-(-1)\cdot 2=0+2=2$$
$$A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=-[1\cdot 1-2\cdot 2]=-(1-4)=3$$
$$A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}=1\cdot(-1)-2\cdot 0=-1-0=-1$$

Таким образом, $A^*=\begin{pmatrix} -2 & 3 & 7 \\ 6 & -3 & -3 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ – матрица, составленная из алгебраических дополнений к элементам матрицы A .

Транспонируем эту матрицу (т.е. строки матрицы делаем столбцами с тем же номером), поучим присоединенную (союзную)матрицу A^{*T} :

$$A^{*T}=\begin{pmatrix}-2 & 6 & 2\\ 3 & -3 & 3\\ 7 & -3 & -1\end{pmatrix}$$

Итак, $A^{*T}=\frac{1}{12}\begin{pmatrix}-2 & 6 & 2\\ 3 & -3 & 3\\ 7 & -3 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{2}{12} & \frac{6}{12} & \frac{2}{12}\\ \frac{3}{12} & -\frac{3}{12} & \frac{3}{12}\\ \frac{7}{12} & -\frac{3}{12} & -\frac{1}{12}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6}\\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4}\\ \frac{7}{12} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{12}\end{pmatrix}$,

Ответ: $A^{*T}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6}\\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4}\\ \frac{7}{12} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{12}\end{pmatrix}$

Задания для самостоятельного выполнения:

ЗАДАНИЕ найти матрицу, обратную заданной матрице А.

1.A= $\begin{pmatrix}2 & 5 & 6\\ 1 & 2 & 5\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix}$	2.A= $\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 3 & 2\\ 6 & -4 & 9\end{pmatrix}$
3.A= $\begin{pmatrix}7 & -3 & 1\\ -5 & 3 & 1\\ 2 & 0 & -6\end{pmatrix}$	4.A= $\begin{pmatrix}-1 & -2 & -3\\ 4 & 3 & 4\\ 2 & -1 & 3\end{pmatrix}$
5.A= $\begin{pmatrix}-3 & 2 & 4\\ 2 & 6 & 8\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix}$	6.A= $\begin{pmatrix}2 & 2 & 2\\ -3 & 3 & -1\\ 1 & 9 & 1\end{pmatrix}$
7.A= $\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ -1 & -2 & -3\\ 4 & 0 & 4\end{pmatrix}$	8.A= $\begin{pmatrix}6 & -3 & 6\\ 1 & -2 & 5\\ 2 & 7 & 9\end{pmatrix}$
9.A= $\begin{pmatrix}1 & -3 & 2\\ 3 & -4 & 1\\ 2 & -5 & -3\end{pmatrix}$	10.A= $\begin{pmatrix}2 & -1 & 6\\ 4 & 0 & -3\\ -1 & 2 & -1\end{pmatrix}$
11.A= $\begin{pmatrix}-9 & 1 & 4\\ 7 & 3 & 8\\ 3 & 9 & 2\end{pmatrix}$	12.A= $\begin{pmatrix}-2 & -2 & 5\\ 0 & 1 & 6\\ 2 & -7 & 8\end{pmatrix}$
13.A= $\begin{pmatrix}-2 & 1 & 3\\ 8 & 3 & 0\\ 2 & -4 & 1\end{pmatrix}$	14.A= $\begin{pmatrix}3 & -3 & 6\\ 1 & -2 & 5\\ 2 & 7 & 2\end{pmatrix}$

15.A= $\begin{pmatrix} 3 & -4 & -1 \\ 5 & 1 & 2 \\ -7 & 3 & 0 \end{pmatrix}$	16.A= $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 7 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$
17.A= $\begin{pmatrix} 1 & -7 & -2 \\ 1 & 0 & 8 \\ 4 & -4 & 1 \end{pmatrix}$	18.A= $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ -6 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

Практическая работа №7

Тема: «Решение систем линейных уравнений методами линейной алгебры ».

Цель: закрепить знания, умения и навыки по теме «Методы решения систем линейных уравнений».

Содержание работы.
1.Внимательно изучите теоретический материал.
2.Выполните предложенное задание

Теоретические основы темы

Решение системы линейных уравнений тремя методами: методом Гаусса, методом Крамера и методом обратной матрицы.
Задача. Данную систему линейных уравнений решить тремя различными методами.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 7 \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 8 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 3 \end{cases}$$

Метод Гаусса:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 7 \\ 5 & 1 & 2 & 8 \\ 3 & -1 & 1 & 3 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ II-5\cdot I \\ III-3\cdot I \end{matrix} \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & -9 & -18 & -27 \\ 0 & -7 & -11 & -18 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ II:(-9) \\ III\cdot(-1) \end{matrix} \to$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 7 & 11 & 18 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \\ III-7\cdot II \end{matrix} \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \end{array}\right) III:(-3) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} I-4\cdot III \\ II-2\cdot III \to \\ \\ \end{matrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} I-2\cdot II \\ \\ \\ \end{matrix} \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

$x_1 = 1;\ x_2 = 1;\ x_3 = 1.$

Правило Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 20 + 12 - 12 + 2 - 10 = -27;$$

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} 7 & 2 & 4 \\ 8 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 7 - 32 + 12 - 12 + 14 - 16 = -27;$$

$$\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} 1 & 7 & 4 \\ 5 & 8 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 8 + 60 + 42 - 96 - 6 - 35 = -27;$$

$$\Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 5 & 1 & 8 \\ 3 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 35 + 48 - 21 + 8 - 30 = -27;$$

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta} = 1;\ x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta} = 1;\ x_3 = \frac{\Delta_{x_3}}{\Delta} = 1.$$

Решение с помощью обратной матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix};\ B = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix};\ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix};\ X = A^{-1}B.$$

$$\Delta A = -27;$$

$$A_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 3;\ A_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1;\ A_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -8;$$

$$A_{21} = -6;\ A_{22} = -11;\ A_{23} = 7;$$

$$A_{31} = 0;\ A_{32} = 18;\ A_{33} = -9.$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{27} \begin{pmatrix} 3 & -6 & 0 \\ 1 & -11 & 18 \\ -8 & 7 & -9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{27} \begin{pmatrix} 3 & -6 & 0 \\ 1 & -11 & 18 \\ -8 & 7 & -9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$x_1 = 1;\ x_2 = 1;\ x_3 = 1.$$

Задание

1. Решить систему линейных уравнений третьего порядка методом Крамера
2. Решить систему линейных уравнений третьего порядка методом Гаусса
3. Решить систему линейных уравнений третьего порядка матричным методом.

1 $\begin{cases} 3x+5y+z=-2 \\ -2x-2y-3z=7 \\ x+4y+z=-5 \end{cases}$

2 $\begin{cases} x+y+z=6 \\ 3x-y+3z=2 \\ 4x+3y-z=5 \end{cases}$

3 $\begin{cases} x+y-3z=-3 \\ 2x-y-6z=9 \\ -x+y+4z=-6 \end{cases}$

4 $\begin{cases} 3x-6y-z=1 \\ -x+2y+z=-3 \\ 2x+y+3z=-4 \end{cases}$

5 $\begin{cases} 3x+5y+z=2 \\ 2x-y+2z=1 \\ -x+3y-3z=-4 \end{cases}$

6 $\begin{cases} -x-y+z=-5 \\ 3x-2y-2z=-4 \\ -2x+2y-3z=1 \end{cases}$

7 $\begin{cases} x-y-2z=6 \\ -2x-3y-5z=-1 \\ 4x-2y-z=6 \end{cases}$

8 $\begin{cases} 4x-3y+z=3 \\ 3x+2y-2z=-3 \\ -x+3y+z=10 \end{cases}$

9 $\begin{cases} -x+3y-4z=-3 \\ 2x-y-3z=5 \\ -3x+4y+5z=-2 \end{cases}$

10 $\begin{cases} x-y+z=4 \\ 5x-3y-2z=1 \\ 3x+2y-3z=-1 \end{cases}$

11 $\begin{cases} 3x-2y+2z=3 \\ x+2y-5z=3 \\ -4x+y+2z=-3 \end{cases}$

12 $\begin{cases} 3x-2y+2z=5 \\ 5x+y-3z=-6 \\ -2x+2y-z=1 \end{cases}$

13 $\begin{cases} 3x-4y+5z=4 \\ x+2y+z=6 \\ 2x-y+2z=2 \end{cases}$

14 $\begin{cases} x+2y+3z=4 \\ 2x-5y+2z=3 \\ 3x-8y+2z=5 \end{cases}$

15 $\begin{cases} 3x-2y+3z=-2 \\ x+5y-2z=-1 \\ -4x-3y-5z=-5 \end{cases}$

16 $\begin{cases} 4x+5y+4z=3 \\ -7x+2y-z=2 \\ 3x+y+z=-1 \end{cases}$

17 $\begin{cases} 2x+2y-z=1 \\ x-3y-5z=4 \\ 4x+5y-3z=-1 \end{cases}$

18 $\begin{cases} x-y+z=-4 \\ 5x+6y-2z=23 \\ 4x-3y-2z=4 \end{cases}$

19 $\begin{cases} -2x+3y-2z=4 \\ x+y+z=-7 \\ 4x-3y-z=6 \end{cases}$

20 $\begin{cases} x+y-z=-3 \\ 4x-2y-5z=5 \\ 3x+2y+7z=4 \end{cases}$

21 $\begin{cases} x-y-z=-3 \\ 2x-2y+5z=1 \\ 3x-y-z=3 \end{cases}$

22 $\begin{cases} x+y-z=-1 \\ 3x+3y+2z=7 \\ 2x-y-3z=8 \end{cases}$

23 $\begin{cases} 5x+2y-z=-1 \\ 3x-y+3z=-4 \\ x+2y-3z=3 \end{cases}$

24 $\begin{cases} x+y+z=-4 \\ 3x+4y-3z=1 \\ 4x+5y-3z=-1 \end{cases}$

25 $\begin{cases} x+5y-3z=-4 \\ 3x+y-5z=10 \\ -2x-3y+z=-9 \end{cases}$

26 $\begin{cases} 3x+y+z=2 \\ 5x+3y+2z=-1 \\ x-y+4z=1 \end{cases}$

27 $\begin{cases} x+y-z=2 \\ -4x+3y-z=3 \\ 3x-2y-2z=11 \end{cases}$

28 $\begin{cases} x+y-2z=3 \\ 4x+5y+4z=-3 \\ 3x+3y-5z=8 \end{cases}$

29 $\begin{cases} x+y+z=-1 \\ 3x+4y+5z=2 \\ -4x-7y-3z=3 \end{cases}$

30 $\begin{cases} -x+y-z=-6 \\ 4x-2y-z=-1 \\ -2x+y+z=7 \end{cases}$

31 $\begin{cases} x+y+z=-2 \\ 5x+7y-4z=3 \\ 2x-2y-7z=-3 \end{cases}$

32 $\begin{cases} x+y-z=6 \\ 3x+7y+z=2 \\ -2x+2y-3z=-1 \end{cases}$

33 $\begin{cases} -x-y-z=-2 \\ 7x-4y-z=-4 \\ -5x+3y+2z=9 \end{cases}$

Практическая работа №8

Тема: Комплексные числа и действия над ними.

Цель: закрепить навыки действий над комплексными числами в разных формах.

Содержание работы.
1.Внимательно изучите теоретический материал.
2.Выполните предложенное задание

Теоретическая часть: Комплексным числом z называется выражение

$z = a + bi,$ *где* a *и* b- действительные числа, i - мнимая единица, которая определяется соотношением: $i^2 = -1; i = \sqrt{-1}$.

Число a называется действительной частью числа z, а b - мнимой частью.
Числа $z = a + bi$ *и* $z = a - bi$ *называются комплексно* − *сопряженными.*
Два комплексных числа $z_1 = a + bi$ и $z_2 = c + di$, называются равными, если соответственно равны их действительные и мнимые части : $a = c;\ b = d$.
$z = a + bi$ − алгебраическая форма комплексного числа
$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ −тригонометрическая форма
$z = re^{i\varphi}$ − показательная форма

<u>Действия с комплексными числами в алгебраической форме.</u>

$$z_1 = a + bi \qquad\qquad z_2 = c + di$$

1. Сложение и вычитание комплексных чисел:
$$z_1 + z_2 = (a + bi) \pm (c + di) = (a \pm c) + (b \pm d)i$$
2. Произведение комплексных чисел:
$$z_1 \cdot z_2 = (a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$
3. Деление комплексных чисел:
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(a + bi)}{(c + di)} = \frac{(a + bi) \cdot (c - di)}{(c + di) \cdot (c - di)} = \frac{(a + bi) \cdot (c - di)}{c^2 + d^2}$$

<u>Тригонометрическая форма комплексного числа</u>

$\mathbf{Z = r(\cos\boldsymbol{\varphi} + i\sin\boldsymbol{\varphi})}$;
Модуль комплексного числа r можно найти по формуле r = $\sqrt{a^2 + b^2}$
Величину угла φ можно найти по формуле $\cos\varphi = \frac{a}{r}$; $\sin\varphi = \frac{b}{r}$

<u>Показательная форма комплексного числа</u> **Z = r$\boldsymbol{e^{i\varphi}}$**

<u>Действия над комплексными числами в тригонометрической форме.</u>

$z_1 = r_1 \cdot (\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) \qquad z_2 = r_2 \cdot (\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$

1. Произведение комплексных чисел:
$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$$
2. Деление комплексных чисел:
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \cdot (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2))$$

3. Возведение в степень:

$$z^n = r^n(\cos\varphi n + i\sin\varphi n)$$

4. Извлечение корня $n-$ *ой степени*:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right)$$

Примеры и решения

№1 Решить квадратное уравнение:

$X^2 - 6x + 13 = 0$

Решение: a=1, в=-6, c=13. Найдем $D=b^2-4ac$;

$D=(-6)^2 - 4\cdot 1\cdot 13 = 35-52 = -16$

Корни уравнения находим по формулам $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$x_{1,2}=\frac{6\pm\sqrt{-16}}{2} = \frac{6\pm 4i}{2} = 3\pm 2i;$ *таким образом*

$x_1=3+2i$ $x_2=3-2i$

Ответ: $x_1=3+2i$; $x_2=3-2i$.

№2 Найти значения x и y из равенства (2x+3y) + (x-y)i = 7 + 6i

Решение: из условия равенства комплексных чисел следует

$$\begin{cases} 2x+3y=7, \\ x-y=6 \end{cases}$$

Умножив второе уравнение на 3, и сложив результат с первым уравнением, имеем 5x=25,т.е. x=5. Подставим это значение во второе уравнение: 5 – y = 6,откуда y = -1. Итак, получаем ответ: x = 5,y = -1.

№3 Даны комплексные числа $z_1 = 5 + 3i$, $z_2 = 7 - 4i$

Найти

а) z_1+z_2 *б)* z_1-z_2 *в)* $z_1\cdot z_2$

Решение:

а) $z_1+z_2 = (5+3i)+(7-4i) = 5+3i+7-4i = 12-i$

б) $z_1-z_2 = (5+3i)-(7-4i) = 5+3i-7+4i = -2+7i$

в) $z_1\cdot z_2 = (5+3i)\cdot(7-4i) = 35-20i+21i-12i^2 = 35+i-12\cdot(-1) = 35+i+12 = 47+i$

г).

№4 Выполнить деление $\frac{3+2i}{7-5i}$:

Решение:

$$\frac{3+2i}{7-5i} = \frac{(3+2i)\cdot(7+5i)}{(7-5i)\cdot(7+5i)} = \frac{21+15i+14i+10i^2}{49-25i^2} = \frac{11+29i}{74} = \frac{11}{74}+\frac{29}{74}$$

№5 Записать число $Z = 3 - 3i\sqrt{3}$ в тригонометрической и показательной формах.

Решение: 1.Так как a=3, в=$-3\sqrt{3}$,то $r=\sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{3^2+(-3\sqrt{3})^2} = \sqrt{9+9\cdot 3} = 6$

2. Геометрически определяем, что числу z соответствует точка Z, лежащая в 4 четверти

3. Составим отношения $\cos\varphi = \frac{a}{r} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}, \sin\varphi = \frac{b}{r} = \frac{-3\sqrt{3}}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.Отсюда следует, что

$\varphi = 360° - 60° = 300°$ *или* $\varphi = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$

4. Итак, z = $6(\cos\frac{5\pi}{3} + \sin\frac{5\pi}{3})$ - тригонометрическая форма числа

Z = $6e^{\frac{5\pi}{3}i}$ - показательная форма числа.

№6 Даны комплексные числа $\boldsymbol{z_1 = 3(\cos 330° + i\sin 330°)}$

$$\boldsymbol{z_2 = 2(\cos 60° + i\sin 60°)}$$

Найти:

а) $\boldsymbol{z_1 \cdot z_2}$ *б)* $\boldsymbol{{z_1}/{z_2}}$ **в)**$\boldsymbol{z_2^4}$ *г)*$\sqrt[3]{\boldsymbol{z_1}}$

Решение:

а) $z_1 \cdot z_2 = 2 \cdot 3(\cos(330° + 60°) + i\sin(330° + 60°)) = 6(\cos 390° + i\sin 390°) =$ *6(*cos*30°+i*sin*30°)=6(32+i12)=33+3i*

б) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{2}{3}(\cos(330° - 60°) + i\sin(330° - 60°)) = \frac{2}{3}(\cos 270° + i\sin 270°) = 1{,}5 \cdot$ *0+i·−1=−1,5i*

в) $z_2^4 = [2(\cos 60° + i\sin 60°)]^4 = 2^4[\cos(60° \cdot 4) + i\sin(60° \cdot 4)] = 16(\cos 240° +$ *i*sin*240°)*

Используем формулы приведения

$\cos 240\,° = \cos(180° + 60°) = -\cos 60° = -\frac{1}{2}$

$$\sin 240° = \sin(180° + 60°) = -\sin 60° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$z_2^4 = 16\left(\cos 240° + i\sin 240°) = 16(-\frac{1}{2} + i\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) = -8 - 8 \cdot \sqrt{3}i$$

г)$\sqrt[3]{z_1} = \sqrt[3]{3}\left(\cos\frac{330°+360°k}{3} + i\sin\frac{330°+360°k}{3}\right)$, *где* k *принимает значение* 0,1,2.

Если $k = 0,$ *то* $z_1^{(1)} = \sqrt[3]{3}(\cos 110° + i\sin 110°)$

Если $k = 1,$ *то* $z_1^{(2)} = \sqrt[3]{3}(\cos 230° + i\sin 230°)$

Если $k = 2,$ *то* $z_1^{(3)} = \sqrt[3]{3}(\cos 350° + i\sin 350)$

<u>Задание для самостоятельного решения:</u>

1.Решить уравнение:

$$x^2 + 2x + 5 = 0 \qquad\qquad x^2 - 6x + 18 = 0$$

2.Найти действительные числа x *и* y из условия равенства двух комплексных чисел:

$$5x - 2y + (x + y)i = 4 + 5i \qquad\qquad 2xi + 3yi + 17 = 3x + 2y + 18i$$

3.Даны комплексные числа:

$$z_1 = 5 + 3i \text{ и } z_2 = 2 - 7i \qquad\qquad z_1 = 2 + 6i \text{ и } z_2 = 3 + 5i$$

Найти: а)$z_1 + z_2$ *б)*$z_1 - z_2$ *в)*$z_1 \cdot z_2$ *г)* $\frac{z_1}{z_2}$

4.Записать комплексное число в тригонометрической и показательной формах:

$$z = 1 - \sqrt{3}i \qquad\qquad z = -\sqrt{3} + i$$

5.Найти: $z_1 \cdot z_2$; $\frac{z_1}{z_2}$; z_1^4; $\sqrt[3]{z_2}$, *если*

$$z_1 = 1 - i; z_2 = -2 - 2i \qquad\qquad z_1 = 2\sqrt{3} - 2i; z_2 = \sqrt{3} + i$$

Действия произвести, предварительно записав комплексные числа в тригонометрической форме.

Критерии оценки

«5»-выполнены правильно все задания
«4»-выполнены правильно любые четыре задания
«3»-выполнены правильно любые три задания
«2»-выполнено правильно только два задания

Практическая работа №9

Тема: «Решение практических задач на определение вероятности события »

Цель: сформировать умение решать задачи на нахождение вероятностей

Содержание работы.
1.Внимательно изучите теоретический материал.
2.Выполните предложенное задание

Теоретические основы темы

Раздел математики, изучающий закономерности случайных событий, называется теорией вероятностей.

Вероятностью P(A) события A в испытании с равновозможными элементарными исходами называют отношение числа исходов m, благоприятствующих событию A, к числу n всех исходов испытания.

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

Пример 1: В партии из 30 миксеров 2 бракованных. Найти вероятность купить исправный миксер.

$$n = 30, m = 30 - 2 = 28$$
$$P = \frac{28}{30} = \frac{14}{15}$$

Свойства вероятностей:

Вероятность невозможного события равна нулю P=0.

Вероятность достоверного события равна единице P=1.

Вероятность произвольного случайного события A заключается между 0 и 1: 0<P(A)<1.

Пример 2: Из 34 экзаменационных билетов, пронумерованных с помощью чисел от 1 до 34, наудачу извлекается один. Какова вероятность, что номер вытянутого билета есть число, кратное трем.

Решение: Найдем количество чисел от 1 до 34, кратных трем. Это числа 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33. Всего таких чисел 11. Таким образом, искомая вероятность $p=\frac{11}{34}$

События А и В называются совместными, если они могут одновременно произойти, и несовместными, если при осуществлении одного события не может произойти другое.

События А и В называются независимыми, если вероятность наступления одного события не зависит от того, произошло другое событие или нет.

Вероятность суммы двух совместных событий равна сумме вероятностей слагаемых без вероятности произведения: P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)

Пример 3: Вероятность поражения одной мишени – 0,7, а другой – 0,8. Какова вероятность, что будет поражена хотя бы одна мишень, если по ним стреляют независимо друг от друга.

Решение: Т.к. события совместны, то $p=0,7+0,8-0,7\cdot 0,8=1,5-0,56=0,94$

Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей слагаемых: P(A+B)=P(A)+P(B).

$$P(A)+P(\overline{A})=1$$

Условная вероятность – вероятность одного события, при условии, что другое событие уже произошло.

Вероятность произведения событий А и В равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого: P(AB)=P(A)·P(A/B) или P(BA)=P(A)·P(B/A)

Вероятность произведения двух независимых событий А и В равна произведению вероятностей сомножителей: P(AB)=P(A)·P(B).

Пример 4: В двух коробках лежат ручки разного цвета. В первой коробке – 4 красных и 6 черных, во второй – 3 красных, 5 синих и 2 черных. Из обеих коробок вынимают по одной ручки. Найти вероятность, что обе ручки красные.

Решение: Найдем вероятности вытащить красную ручку из каждой коробки

$n_1 = 10$
$m_1 = 4$
$p_1 = \frac{4}{10}$
Тогда вероятность того, что обе ручки красные: $p = p_1 \cdot p_2 = \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{10} = \frac{12}{100} = 0{,}12$
$n_2 = 10$
$m_2 = 3$
$p_2 = \frac{3}{10}$

Задание для самостоятельного решения:

Решите задачи

Вариант 1

1. Из 1000 собранных на заводе телевизоров 5 штук бракованных. Эксперт проверяет один наугад выбранный телевизор из этой 1000. Найдите вероятность того, что проверяемый телевизор окажется бракованным.
2. В урне 9 красных, 6 жёлтых и 5 зелёных шаров. Из урны наугад достают один шар. Какова вероятность того, что этот шар окажется жёлтым?
3. В классе 16 учащихся, среди них два друга - Вадим и Сергей. Учащихся случайным образом разбивают на 4 равные группы. Найдите вероятность того, что Вадим и Сергей окажутся в одной группе.
4. В случайном эксперименте симметричную монету бросают 2 раза. Найдите вероятность того, что орел выпадет ровно 1 раз.
5. Для экзамена подготовили билеты с номерами от 1 до 50. Какова вероятность того, что наугад взятый учеником билет имеет однозначный номер?
6. Из районного центра в деревню ежедневно ходит автобус. Вероятность того, что в понедельник в автобусе окажется меньше 20 пассажиров, равна 0,94. Вероятность того, что окажется меньше 15 пассажиров, равна 0,56. Найдите вероятность того, что число пассажиров будет от 15 до 19.
7. Перед началом матча по футболу судья бросает монету, чтобы определить, какая из команд будет первой владеть мячом. Команда «Байкал» играет по очереди с командами «Амур», «Енисей», «Иртыш». Найти вероятность того, что команда «Байкал» будет первой владеть мячом только в игре с «Амуром».
8. Бросаем две игральные кости. Какова вероятность, что в сумме выпадет 10?
9. Наташа и Вика играют в кости. Они бросают кость по одному разу. Выигрывает тот, кто выбросил больше очков. Если очков выпало поровну, то наступает ничья. В сумме выпало 9 очков. Найдите вероятность того, что Наташа проиграла.
10. Люда дважды бросает кубик. В сумме у нее выпало 9 очков. Найти вероятность того, что при первом броске выпало 5 очков.

2 вариант

1. Петя, Вика, Катя, Игорь, Антон, Полина бросили жребий — кому начинать игру. Найдите вероятность того, что начинать игру должен будет мальчик.
2. На каждые 1000 электрических лампочек приходится 5 бракованных. Какова вероятность купить исправную лампочку?

3. В классе 21 учащийся, среди них два друга — Вадим и Олег. Класс случайным образом разбивают на 3 равные группы. Найдите вероятность того, что Вадим и Олег окажутся в одной группе.
4. В случайном эксперименте симметричную монету бросают дважды. Найдите вероятность того, что орёл не выпадет ни разу.
5. В мешке содержатся жетоны с номерами от 5 до 54 включительно. Какова вероятность, того, что извлеченный наугад из мешка жетон содержит двузначное число?
6. На экзамене по геометрии школьнику достаётся один вопрос из списка экзаменационных вопросов. Вероятность того, что это вопрос на тему «Вписанная окружность», равна 0,2. Вероятность того, что это вопрос на тему «Параллелограмм», равна 0,15. Вопросов, которые одновременно относятся к этим двум темам, нет. Найдите вероятность того, что на экзамене школьнику достанется вопрос по одной из этих двух тем.
7. У Пети в кармане лежат 6 монет: 4 монеты по рублю и 2 монеты по два рубля. Петя, не глядя, переложил какие-то 3 монеты в другой карман. Найдите вероятность того, что теперь две двухрублёвые монеты лежат в одном кармане.
8. Подбрасываем монету два раза. Какова вероятность того, что оба раза выпадет орел?
9. Катя и Даша играют в кости. Они бросают кость по одному разу. Выигрывает тот, кто выбросил больше очков. Если очков выпало поровну, то наступает ничья. В сумме выпало 9 очков. Найдите вероятность того, что Катя проиграла.
10. Таня дважды бросает кубик. В сумме у нее выпало 9 очков. Найти вероятность того, что при первом броске выпало 5 очков

Практическая работа № 10

Тема: «Вычисление числовых характеристик дискретной случайной величины»

Цель: усвоить понятие дискретной случайной величины, законы ее распределения, характеристики. Научиться находить вероятность дискретной случайной величины. Выработать навыки вычисления основных характеристик дискретной случайной величины.

Содержание работы.

1.Внимательно изучите теоретический материал.

2.Выполните предложенное задание

Теоретические основы темы

Случайные величины

Случайной величиной называется величина, которая в результате опыта может принять любые заранее неизвестные значения. Различают дискретные и непрерывные случайные величины.

Дискретной случайной величиной называется такая, значение которой есть конечное или счетное множество фиксированных величин. Например, количество студентов, пришедших на лекцию, число бракованных изделий в партии продукции, число новорожденных за сутки. Для описания поведения дискретной случайной величины X задают все значения

$x_1, x_2, \dots x_n$, *которые она может принять,*
и вероятности появления этих величин $p_1, p_2, \dots p_n$.

Непрерывной называют такую случайную величину, которая может принимать любые значения в определенном интервале. Например, температура тела пациента за определенный промежуток времени; дальность полета футбольного мяча, объем утечки воды из городского водопровода.

Под *законом распределением* случайной величины мы будем понимать соответствие

«значение случайной величины ↔ вероятность принимать это значение».

Случайная величина считается заданной, если задан её закон распределения:

Значение случайной величины x_i	x_1	x_2	…	x_n
Вероятности значений p_i	p_1	p_2	…	p_n

Пример 1. Подбрасываем 1 раз кубик. Пусть $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ количество очков, выпавшее при бросании кубика. Можно записать соответствие между значениями случайных величин x и p вероятностями принимать эти значения в виде «таблицы распределения вероятностей» или, коротко, «таблицы распределения»:

x	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
P	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

Рассмотрим случайную величину X^2=$\{1, 4, 9, 16, 25, 36\}$:

X^2	**1**	**4**	**9**	**16**	**25**	**36**
P	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

При решении практических задач нет необходимости знать все возможные значения случайной величины и соответствующие им вероятности, а удобнее использовать такие количественные показатели, которые в сжатой форме достаточную информацию о случайной величине. Такие показатели называются числовыми характеристиками случайной величины. Основными из них являются: *математическое ожидание, дисперсия и среднее квадратичное отклонение.*

Математическое ожидание M(X) характеризует положение случайной величины на числовой оси, определяя некоторое среднее значение, около которого сосредоточены все возможные значения случайной величины.

M(X)=$x_1 p_1 + x_1 p_1 + \dots + x_n p_n = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i (1)$

Дисперсия характеризует рассеяние (отклонение) случайной величины относительно математического ожидания.

Математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины X от ее метематического ожидания M(X)называют дисперсией случайной величины X и обозначают D(x), т.е. D(x)=M$[X - M(X)]^2$ (2)

Размерность дисперсии равна квадрату случайной величины и ее неудобно использовать для характеристики разброса, поэтому удобнее применять корень квадратный из дисперсии – **среднее квадратическое отклонение**. Эта величина дает представление о размахе колебаний случайной величины около математического ожидания.

σ(сигма)=$\sqrt{\mathrm{D(x)}}$ (3)

Пример 2

Найти математическое ожидание дискретной случайной величины X, зная закон её распределения.

x	**-1**	**0**	**1**	**2**	**3**
P	0,05	0,2	0,4	0,3	0,05

Решение: по формуле (1):

M(X)=-1·0,05+0·0,2+1·0,4+2·0,3+3·0,05=1,1

Пример 3

Дискретная случайная величина X имеет закон распределения

x	**0**	**1**	**2**
P	0,3	0,5	0,2

Найти дисперсию и среднее квадратичное отклонение X.

1) M(X)=0·0,3+1·0,5+2·0,2=0,7

x	p_i	$x_i p_i$	x_i-M(X)	$[x_i - \mathrm{M(X)}]^2$	$[x_i - \mathrm{M(X)}]^2 p_i$
-1	0,1	-0,1	-1,7	2,89	0,289
0	0,3	0	-0,7	0,49	0,147
1	0,4	0,4	0,3	0,09	0,036
2	0,2	0,4	1,3	1,69	0,338
Σ	1	0,7			0,81

2) Из таблицы следует D(X)=0,81
3) σ(X)=$\sqrt{\mathrm{D(X)}}$=$\sqrt{0{,}81}$=0,9

Выполните самостоятельно:

Вариант 1

Случайная величина X задана законом распределения:

X_i	2	3	10
p_i	0,1	0,4	0,5

Найти математическое ожидание M(X), дисперсию D(X) и среднее квадратичное отклонение σ(X).

Вариант 2

Случайная величина X задана законом распределения:

X_i	0,1	2	10	20
p_i	0,4	0,2	0,15	0,25

Найти математическое ожидание M(X), дисперсию D(X) и среднее квадратичное отклонение σ(X).

Вариант 3

Случайная величина X задана законом распределения:

X_i	-1	1	2	3
p_i	0,48	0,01	0,09	0,42

Найти математическое ожидание M(X), дисперсию D(X) и среднее квадратичное отклонение σ(X).

Вариант 4

Случайная величина X задана законом распределения:

X_i	-1	1	2	3
p_i	0,19	0,51	0,25	0,05

Найти математическое ожидание M(X), дисперсию D(X) и среднее квадратичное отклонение σ(X).

Вариант 5

Случайная величина X задана законом распределения:

X_i	3	5	2
p_i	0,1	0,6	0,3

Найти математическое ожидание M(X), дисперсию D(X) и среднее квадратичное отклонение σ(X).

Вариант 6

Случайная величина X задана законом распределения:

X_i	2	3	5
p_i	0,1	0,6	0,3

Найти математическое ожидание M(X), дисперсию D(X) и среднее квадратичное отклонение σ(X).

Список рекомендуемой литературы:

1. Богомолов Н.В. Практические занятия по математике. - М.: издательство Юрайт, 2016. - 495 с.

2. Богомолов Н.В. Математика – М: издательство Юрайт, 2016. - 396 с.

3. Матыцина Т.Н. Линейная алгебра: учебно-методическое пособие [Электронный ресурс] / Матыцина Т. Н., Коржевина Е. К. - КГУ им. Н. А. Некрасова, 2014. (Университетская библиотека)

Информационные ресурсы

1. http://mathem.hl/ru/
2. http://math.child.ru/
3. http://zadachi.mccme.ru/
4. http://mschool.kubsu.ru/
   http://sumik.open-edu.ru/SUMIK/e-SUMIK-Matematika.index.HTM